

J. CEA

R. GLOWINSKI

Sur des méthodes d'optimisation par relaxation

Revue française d'automatique informatique recherche opérationnelle. Analyse numérique, tome 7, n° R3 (1973), p. 5-31

http://www.numdam.org/item?id=M2AN_1973__7_3_5_0

© AFCET, 1973, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Revue française d'automatique informatique recherche opérationnelle. Analyse numérique » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SUR DES METHODES D'OPTIMISATION PAR RELAXATION

par J. CEA (1) et R. GLOWINSKI (2)

Communiqué par J. CEA

Résumé. — *Dans cet article, les auteurs étudient les méthodes de relaxation, sous/sur — relaxation par blocs, appliquées à la minimisation avec contraintes des fonctionnelles convexes, différentiables ou non, dans le cadre des espaces de Banach réflexifs.*

1. GENERALITES ET ORIENTATION

1.1. Généralités

L'idée essentielle des méthodes de relaxation est de ramener, par un procédé itératif, la résolution de certains problèmes se posant dans un espace produit

$V = \prod_{i=1}^N V_i$ (minimisation de fonctionnelles, résolution de systèmes d'équations ou d'inéquations, etc...) à la résolution d'une suite de sous-problèmes de même nature, mais plus simples, dans les espaces V_i .

Un exemple type est donné par la méthode classique de Gauss-Seidel, ponctuelle et par blocs, utilisée dans la résolution de certains systèmes linéaires en dimension finie, cf. R. S. Varga [1]. Pour la résolution de systèmes d'équations non-linéaire, on renvoie à J. M. Ortega et W. C. Rheinboldt [2], [3], J. C. Miellou [4], [5] et à la bibliographie de ces travaux.

En ce qui concerne l'optimisation, par ce type de méthodes, de fonctionnelles convexes, avec ou sans contraintes, citons, entre autres, S. Schechter [6], [7], [8], J. Cea [9], [10], A. Auslender [11], Christofersen [12], C. W. Cryer [13], [14], R. Glowinski [15].

(1) Département de Mathématiques, Université de Nice.

(2) Analyse Numérique, T. 55, Université de Paris-VI.

1.2. Orientation

Dans cet article, on va s'intéresser aux méthodes de relaxation et sous ou sur relaxation appliquées à la minimisation avec contraintes des fonctionnelles convexes, en élargissant le cadre des auteurs précédents; soit l'espace $V = \prod_{i=1}^N V_i$ où les V_i sont des espaces de dimension finie ou infinie, soit l'ensemble convexe $K = \prod_{i=1}^N K_i$ où les K_i sont des convexes non vides de V_i et soit J une application de V sur \mathbf{R} ; on définit alors le problème d'optimisation :

$$(1.1) \quad \begin{cases} \text{Déterminer } u \in K \text{ tel que} \\ J(u) \leq J(v) \quad \forall v \in K \end{cases}$$

On notera $v = (v_1, v_2, \dots, v_N)$, $v_i \in V_i \quad \forall i = 1, 2, \dots, N$, l'élément générique de V ; dans ces conditions, l'algorithme de type relaxation utilisé pour résoudre (1.1) est de la forme :

$$(1.2) \quad U^0 \text{ donné arbitrairement dans } K,$$

U^n étant connu, on détermine U^{n+1} en calculant progressivement ses composantes U_i^{n+1} , $i = 1, 2, \dots, N$, par

$$(1.3) \quad \begin{cases} U_i^{n+1} \in K_i \\ J(U_1^{n+1}, \dots, U_{i-1}^{n+1}, U_i^{n+1}, U_{i+1}^n, \dots, U_N^n) \\ \leq J(U_1^{n+1}, \dots, U_{i-1}^{n+1}, v_i, U_{i+1}^n, \dots, U_N^n) \\ \forall v_i \in K_i \end{cases}$$

Afin d'alléger le formalisme, on notera :

$$(1.4) \quad K_i^{n+1} = \{ v \mid v = (U_1^{n+1}, \dots, U_{i-1}^{n+1}, v_i, U_{i+1}^n, \dots, U_N^n), v_i \in K_i \}$$

et

$$(1.5) \quad \begin{cases} \tilde{U}_0^{n+1} = U^n \\ \tilde{U}_i^{n+1} = (U_1^{n+1}, \dots, U_{i-1}^{n+1}, U_i^{n+1}, U_{i+1}^n, \dots, U_N^n), i = 1, 2, \dots, N-1 \end{cases}$$

avec ces notations, le problème (1.3) s'écrit :

$$(1.6) \quad \begin{cases} \tilde{U}_i^{n+1} \in K_i^{n+1} \\ J(\tilde{U}_i^{n+1}) \leq J(v) \quad \forall v \in K_i^{n+1} \end{cases}$$

Ceci étant, on traitera au n° 2 de la minimisation, par relaxation par blocs, de fonctionnelles strictement convexes, différentiables ou non, sur des espaces de Banach réflexifs; au n° 3, on étudiera les méthodes de sur et sous-relaxation appliquées à la minimisation, avec contraintes, de fonctionnelles quadratiques définies sur des espaces de Hilbert; au n° 4 on donnera une application numérique.

1.3. Rappels

Nous allons donner, sans démonstration, un résultat classique sur l'*existence*, l'*unicité* et la *caractérisation* de la solution d'un problème de minimisation; soit :

- (i) V un espace de Banach réflexif,
- (ii) K un ensemble convexe et fermé, non vide, de V ,
- (iii) J_0 une application de V dans \mathbf{R} , strictement convexe, Gateaux-différentiable,
- (iv) J_1 une application de V dans \mathbf{R} , convexe et faiblement semi-continue inférieurement; on posera $J = J_0 + J_1$.

Dans ces conditions, on démontre (cf, par exemple, J. Cea [10]) que le problème

$$(1.7) \quad \begin{cases} J(u) \leq J(v) & \forall v \in K \\ u \in K \end{cases}$$

admet une solution et une seule caractérisée par

$$(1.8) \quad \begin{cases} (J'_0(u), v - u) + J_1(v) - J_1(u) \geq 0 & \forall v \in K \\ u \in K \end{cases}$$

où, dans (1.8), $J'_0(u)$ désigne le gradient, au sens de Gateaux, de J_0 au point u , et (\cdot, \cdot) le produit scalaire de la dualité entre le dual V' de V et V . Enfin, pour terminer, rappelons qu'un opérateur A de V dans V' est dit monotone lorsque :

$$(A(v) - A(u), v - u) \geq 0 \quad \forall u, v \in V$$

strictement monotone lorsque :

$$(A(v) - A(u), v - u) > 0 \quad \forall u, v \in V, u \neq v$$

et que lorsqu'une fonctionnelle J admet un gradient J' (au sens de Gateaux) il y a équivalence entre la convexité (resp. stricte convexité) de J et la monotonie (resp. stricte monotonie) de J' .

2. MINIMISATION AVEC CONTRAINTES DANS DES ESPACES DE BANACH REFLEXIFS DE FONCTIONNELLES STRICTEMENT CONVEXES PAR RELAXATION PAR BLOCS

2.1. Position du problème. Convergence de l'algorithme

Soit $V = \prod_{i=1}^N V_i$ où V et les V_i , $i = 1, \dots, N$ sont des espaces de Banach réflexifs; on notera (\cdot, \cdot) le produit scalaire de la dualité entre l'espace dual V' de V et V , $\|\cdot\|_*$ et $\|\cdot\|$ les normes dans V' et V .

Soit $K = \prod_{i=1}^N K_i$ où K et les K_i , $i = 1, \dots, N$ sont des ensembles convexes, fermés non vides de V et V_i .

Soit J_0 une application de V dans \mathbf{R} vérifiant les hypothèses suivantes :

H1 : J_0 admet un gradient, au sens de Gateaux, noté J'_0

H2 : J_0 est convexe au sens suivant : soit $B_M = \{v \mid v \in V, \|v\| \leq M\}$, alors il existe une application T_M de $B_M \times B_M$ dans \mathbf{R} telle que

$$(2.1) \quad \begin{cases} J_0(v) \geq J_0(u) + (J'_0(u), v - u) + T_M(u, v) & \forall u, v \in B_M \\ T_M(u, v) \geq 0 & \forall u, v \in B_M \\ T_M(u, v) > 0 & \forall u, v \in B_M, u \neq v \end{cases}$$

et telle que

$$(2.2) \quad \left\{ \begin{array}{l} u_n, v_n \in B_M \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} T_M(u_n, v_n) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \|u_n - v_n\| = 0$$

H3 : Continuité du gradient

$$(2.3) \quad \left\{ \begin{array}{l} u_n, v_n \in B_M \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \|v_n - u_n\| = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \|J'_0(u_n) - J'_0(v_n)\|_* = 0$$

Soit J_1 une application de V dans \mathbf{R} du type suivant : si $v = (v_1, \dots, v_N) \in V$ alors

$$J_1(v) = \sum_{i=1}^N J_{1,i}(v_i)$$

où les $J_{1,i}$, $i = 1, \dots, N$ sont des applications de V_i dans \mathbf{R} vérifiant l'hypothèse.

H4 : $J_{1,i}$ est convexe et faiblement semi-continue inférieurement pour $i = 1, \dots, N$.

Enfin, on pose

$$J = J_0 + J_1$$

et on suppose que J vérifie l'hypothèse.

$$H5 : \quad \lim_{\|v\| \rightarrow +\infty} J(v) = +\infty.$$

On considère alors le problème de minimisation : déterminer u tel que

$$(2.5) \quad \begin{cases} u \in K \\ J(u) \leq J(v) \quad \forall v \in K \end{cases}$$

Notons que J_1 , donc J , n'a pas été supposé différentiable.

On va démontrer le :

Théorème 2.1. — Sous les hypothèses H1, H2, H3, H4, H5,

(i) le problème (2.5) admet une solution u et une seule, caractérisée par

$$(2.6) \quad \begin{cases} u \in K \\ (J'_0(u), v - u) + J_1(v) - J_1(u) \geq 0 \quad \forall v \in K \end{cases}$$

(ii) La suite u^n définie par l'algorithme de relaxation (1.2) et (1.3) converge vers u dans V fort lorsque $n \rightarrow +\infty$.

Démonstration.

1^{er} point : D'après (2.1) la fonctionnelle J est strictement convexe et le point (i) résulte alors du rappel 1.3.

2^e point : l'algorithme a un sens : en effet K_i^{n+1} étant un ensemble convexe, fermé, non vide de V , l'existence de \tilde{u}_i^{n+1} résulte là encore du rappel 1.3 qui fournit en outre la caractérisation

$$(2.7) \quad \begin{cases} \tilde{u}_i^{n+1} \in K_i^{n+1} \\ (J'_0(\tilde{u}_i^{n+1}), v - \tilde{u}_i^{n+1}) + J_1(v) - J_1(\tilde{u}_i^{n+1}) \geq 0 \quad \forall v \in K_i^{n+1} \end{cases}$$

Notons qu'avec les définitions de K_i^{n+1} et de \tilde{u}_i^{n+1} , cela s'écrit aussi

$$(2.7') \quad \begin{cases} \tilde{u}_i^{n+1} \in K_i^{n+1} \\ (J'_{0,i}(\tilde{u}_i^{n+1}), v - \tilde{u}_i^{n+1}) + J_{1,i}(v) - J_{1,i}(\tilde{u}_i^{n+1}) \geq 0 \quad \forall v \in K_i^{n+1} \end{cases}$$

3^e point : décroissance de la suite $J(u^n)$:

On a $\tilde{u}_{i-1}^{n+1} \in K_i^{n+1}$, $i = 1, \dots, N$ et donc

$$J(\tilde{u}_i^{n+1}) \leq J(\tilde{u}_{i-1}^{n+1})$$

5^e point : Convergence :

En permutant les rôles de u et v dans (2.1), il vient :

$$(J'_0(v) - J'_0(u), v - u) \geq R_M(u, v)$$

avec

$$R_M(u, v) = T_M(u, v) + T_M(v, u)$$

d'où

$$\begin{aligned} (J'_0(u^{n+1}) - J'_0(u), u^{n+1} - u) &\geq R_M(u, u^{n+1}) \\ (J'_0(u^{n+1}), u^{n+1} - u) &\geq (J'_0(u), u^{n+1} - u) + R_M(u, u^{n+1}) \\ (J'_0(u^{n+1}), u^{n+1} - u) + J_1(u^{n+1}) - J_1(u) &\geq [(J'_0(u), u^{n+1} - u) + J_1(u^{n+1}) \\ &\quad - J_1(u)] + R_M(u, u^{n+1}) \end{aligned}$$

Mais $u^{n+1} \in K$, donc d'après (2,6), le terme entre crochets est non négatif, d'où

$$(2.11) \quad (J'_0(u^{n+1}), u^{n+1} - u) + J_1(u^{n+1}) - J_1(u) \geq R_M(u, u^{n+1})$$

Définissons w_i^{n+1} par

$$w_i^{n+1} = \tilde{u}_i^{n+1} + (0, \dots, 0, u_i - U_i^{n+1}, 0, \dots, 0)$$

on a

$$(2.12) \quad \left\{ \begin{aligned} w_i^{n+1} &\in K_i^{n+1} \\ u^{n+1} - u &= \sum_{i=1}^N (\tilde{u}_i^{n+1} - w_i^{n+1}) \\ J_1(u^{n+1}) - J_1(u) &= \sum_{i=1}^N (J_{1,i}(U_i^{n+1}) - J_{1,i}(u_i)) \\ &= \sum_{i=1}^N (J_1(\tilde{u}_i^{n+1}) - J_1(w_i^{n+1})). \end{aligned} \right.$$

Dans (2.11) on a alors

$$\sum_{i=1}^N (J'_0(u^{n+1}), \tilde{u}_i^{n+1} - w_i^{n+1}) + \sum_{i=1}^N (J_1(\tilde{u}_i^{n+1}) - J_1(w_i^{n+1})) \geq R_M(u, u^{n+1})$$

ce qui donne

$$(2.13) \quad \left\{ \begin{aligned} &\sum_{i=1}^N (J'_0(u^{n+1}) - J'_0(\tilde{u}_i^{n+1}), \tilde{u}_i^{n+1} - w_i^{n+1}) \\ &\geq \sum_{i=1}^N [(J'_0(\tilde{u}_i^{n+1}), w_i^{n+1} - \tilde{u}_i^{n+1}) + J_1(w_i^{n+1}) - J_1(\tilde{u}_i^{n+1})] + R_M(u, u^{n+1}). \end{aligned} \right.$$

D'après (2.7), les termes entre crochets sont non négatifs d'où

$$\sum_{i=1}^N (J'_0(u^{n+1}) - J'_0(\tilde{u}_i^{n+1}), \tilde{u}_i^{n+1} - w_i^{n+1}) \geq R_M(u, u^{n+1}).$$

En utilisant l'hypothèse (2.3) et (2.9), (2.10), on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|J'_0(u^{n+1}) - J'_0(\tilde{u}_i^{n+1})\|_* = 0 \quad i = 1, \dots, N$$

D'où le résultat cherché, en utilisant une fois de plus l'hypothèse (2.2).

REMARQUE 2.1 : Si K est borné, l'hypothèse $H5$ est superflue.

2.2. Cas de la dimension finie et des fonctionnelles différentiables

On suppose maintenant que J_0 est une application de $V = \mathbf{R}^p$ dans \mathbf{R} , vérifiant les hypothèses

$K1$: $J_0 \in C^1(\mathbf{R}^p ; \mathbf{R})$.

$K2$: J_0 est strictement convexe.

$K3$: Comportement à l'infini :

$$\lim_{\|v\| \rightarrow +\infty} J_0(v) = +\infty.$$

On pose

$$J = J_0$$

(autrement dit, J_1 est identiquement nulle dans le cas présent).

Les hypothèses $H1$, $H3$, $H4$, $H5$, sont alors vérifiées; pour pouvoir utiliser le théorème 2.1, il suffit de démontrer que $H2$ a lieu : cela résulte immédiatement du

Lemme 2.1. — Si la fonctionnelle J de classe C^1 sur \mathbf{R}^p est strictement convexe, alors J est uniformément convexe sur tout borné de \mathbf{R}^p i.e. $\forall M > 0$, $\exists \delta_M \in C^0([0, 2M]; \mathbf{R}^+)$, strictement croissante, vérifiant

$$(2.14) \quad \delta_M(0) = 0$$

$$(2.15) \quad \begin{cases} \forall u, v \in \mathbf{R}^p & , & \|u\| \leq M & , & \|v\| \leq M \\ (J'(v) - J'(u), v - u) \geq \delta_M(\|v - u\|) \end{cases}$$

et

$$(2.16) \quad \begin{cases} \forall u, v \in \mathbf{R}^p & , & \|u\| \leq M & , & \|v\| \leq M \\ J(v) \geq J(u) + (J'(u), v - u) + \frac{1}{2} \delta_M(\|v - u\|) \end{cases}$$

(Dans (2.15), (2.16) les symboles $\| \cdot \|$ et (\cdot, \cdot) désignent la norme et le produit scalaire euclidiens de \mathbf{R}^p .)

Démonstration : Soit $B_M = \{ v | v \in \mathbf{R}^p, \|v\| \leq M \}$; pour $\tau \in [0, 2M]$ définissons $\delta_M^0(\tau)$ par

$$(2.17) \quad \delta_M^0(\tau) = \inf_{\substack{\|v-u\|=\tau \\ u, v \in B_M}} (J'(v) - J'(u), v - u).$$

Par définition

$$(2.18) \quad \delta_M^0(0) = 0$$

et

$$(2.19) \quad (J'(v) - J'(u), v - u) \geq \delta_M^0(\|v - u\|) \quad \forall u, v \in B_M$$

Soit $\tau_2 \in]0, 2M[$, par continuité et compacité, dans (2.17) le minimum est atteint en au moins un couple noté u_2, v_2 d'où

$$\delta_M^0(\tau_2) = (J'(v_2) - J'(u_2), v_2 - u_2) \text{ et } \delta_M^0(\tau_2) > 0$$

par la stricte monotonie de J' ; si $0 < \tau_1 < \tau_2$, on définit $w \in]u_2, v_2[$ par

$w = u_2 + \frac{\tau_1}{\tau_2}(v_2 - u_2)$. Puisque $0 < \frac{\tau_1}{\tau_2} < 1$ par stricte monotonie de J' on a :

$$(J'(v_2) - J'(u_2), v_2 - u_2) > \left(J' \left(u_2 + \frac{\tau_1}{\tau_2}(v_2 - u_2) \right) - J'(u_2), v_2 - u_2 \right)$$

d'où

$$(2.20) \quad \begin{cases} (J'(v_2) - J'(u_2), v_2 - u_2) > \frac{\tau_2}{\tau_1} (J'(w) - J'(u_2), w - u_2) \\ > (J'(w) - J'(u_2), w - u_2) \end{cases}$$

et puisque $\|w - u_2\| = \tau_1$ il vient :

$$\delta_M^0(\tau_2) > \delta_M^0(\tau_1).$$

En appliquant (2.19) au couple $u + t(v - u), u$ on a :

$$(2.21) \quad (J'(u + t(v - u)), v - u) \geq (J'(u), v - u) + \frac{1}{t} \delta_M^0(t\|v - u\|)$$

et de la continuité de J' il résulte immédiatement que

$$\lim_{\tau \rightarrow 0+} \frac{1}{\tau} \delta_M^0(\tau) = 0$$

ce qui donne un sens à (2.21) pour $t = 0$.

Par intégration de (2.21) entre 0 et 1, il vient

$$(2.22) \quad J(v) - J(u) \geq (J'(u), v - u) + \int_0^1 \delta_M^0(t \|v - u\|) \frac{dt}{t}$$

et on a une relation analogue en permutant les rôles de u et v d'où par addition :

$$(2.23) \quad \begin{aligned} (J'(v) - J'(u), v - u) &\geq 2 \int_0^1 \delta_M^0(t \|u - v\|) \frac{dt}{t} \\ &= 2 \int_0^{\|v - u\|} \delta_M^0(s) \frac{ds}{s} \end{aligned}$$

et la fonction δ_M définie par

$$\delta_M(\tau) = 2 \int_0^\tau \delta_M^0(s) \frac{ds}{s}$$

vérifie les propriétés requises; notons qu'avec la définition de δ_M , (2.22) n'est autre que la relation (2.16).

2.3. Cas de la dimension finie et des fonctionnelles non différentiables

On suppose que $V = \mathbf{R}^p$ et que $V_i = \mathbf{R}^{p_i}$, $i = 1, \dots, N$ avec

$$p = \sum_{i=1}^N p_i$$

On suppose que J_0 vérifie les hypothèses K_1, K_2, K_3 et que J_1 vérifie l'hypothèse (Rappelons que $J_1(v) = \sum_{i=1}^N J_{1,i}(v_i)$):

K4 : $J_{1,i}$ est une fonctionnelle convexe, continue, non négative définie sur \mathbf{R}^{p_i} , $i = 1, \dots, N$.

Si on définit J par

$$J = J_0 + J_1$$

alors J vérifie les hypothèses du théorème 2.1, et donc l'algorithme de relaxation est convergent.

Nous allons donner quelques exemples de fonctionnelles J_1 qui vérifient l'hypothèse K4.

Exemple 2.1 : On prend

$$J_{1,i}(v_i) = \alpha_i \cdot |l_i(v_i)|$$

où α_i est un nombre fixe, non négatif, l_i est une forme linéaire et continue sur $V_i = \mathbf{R}^{p_i}$.

En particulier, si $p_i = 1$, $p = N$, on peut prendre

$$J_{1,i}(v_i) = \alpha_i |v_i|$$

et

$$J_1(v) = \sum_{i=1}^N \alpha_i |v_i|$$

ce cas a été étudié par A. Auslender [11] qui a établi la convergence de u^n vers un *point critique*.

Exemple 2.2 : On prend

$$J_{1,i}(v)_i = \alpha_i \cdot l_i(v_i)^+$$

(où l'indice supérieur + a sa signification classique :

$$y_i^+ = y_i \quad \text{si} \quad y_i \geq 0 \quad , \quad 0 \quad \text{si} \quad y_i \leq 0)$$

Exemple 2.3 : On prend

$$J_{1,i}(v_i) = \alpha_i \cdot \|v_i\|_{\mathbf{R}^{p_i}}$$

où

$$\|v_i\|_{\mathbf{R}^{p_i}} = \left(\sum_{j=1}^{p_i} |v_{i,j}|^2 \right)^{1/2}$$

REMARQUE 2.2. Dans le cas de l'exemple 2.1, par exemple, on peut « éliminer » la non différentiabilité en introduisant des variables et des contraintes supplémentaires :

$$J_{1,i}(v_i) \text{ est changée en } J_{1,i}(v_i, y_i) = \alpha_i y_i$$

avec la contrainte

$$y_i \geq |l_i(v_i)|$$

ou encore

$$\begin{cases} y_i + l_i(v_i) \geq 0 \\ y_i - l_i(v_i) \geq 0 \end{cases}$$

si on pose $z_i = (v_i, y_i) \in \mathbf{R}^{p_i} \times \mathbf{R}$ alors la fonctionnelle $J(v)$ devient une fonctionnelle $\hat{J}(z) = J_0(v) + \sum_{i=1}^N \alpha_i y_i$.

On montre que l'algorithme de relaxation appliqué à la minimisation de \hat{J} est convergent.

2.4. Cas des espaces de Banach uniformément convexes (fonctionnelles différentiables)

On rappelle qu'un espace de Banach est dit uniformément convexe si $\forall \varepsilon > 0$, il existe $\gamma(\varepsilon) > 0$ tel que $\forall u, v \in V$ avec $\|u\| \leq 1$, $\|v\| \leq 1$ et $\|u - v\| \geq \varepsilon$ on ait $\left\| \frac{u+v}{2} \right\| \leq 1 - \gamma(\varepsilon)$; par homothétie, on aurait

$$\|u\| \leq L, \quad \|v\| \leq L, \quad \|v - u\| \geq \varepsilon \Rightarrow \left\| \frac{u+v}{2} \right\| \leq L \left(1 - \gamma \left(\frac{\varepsilon}{L} \right) \right).$$

On démontre (cf. K. Yosida [16]) que tout espace de Banach uniformément convexe est réflexif.

On suppose que V est un espace de Banach uniformément convexe; on prendra $J_1 \equiv 0$ et donc $J \equiv J_0$ et on supposera que J est une application de V dans \mathbb{R} vérifiant les hypothèses $H1$, $H3$, $H5$ et II : $\forall M > 0$ il existe une fonction $g_M \in C^0([0, M])$ strictement croissante et telle que :

$$(2.24) \quad (J'(v) - J'(u), v - u) \geq (g_M(\|v\|) - g_M(\|u\|))(\|v\| - \|u\|). \\ \forall u, v \in B_M$$

Pour pouvoir utiliser le théorème 2.1, il suffit de démontrer que $H2$ a lieu; cela résulte du

Lemme 2.2. — Si l'hypothèse II a lieu, alors l'hypothèse $H2$ est vérifiée avec

$$(2.25) \quad T_M(u, v) = \int_0^1 (g_M(\|u + t(v - u)\|) - g_M(\|u\|))(\|u + t(v - u)\| - \|u\|) dt$$

Démonstration. — Posons $u_t = u + t(v - u)$ et appliquons (2.24) au couple (u_t, u) :

$$(J'(u_t) - J'(u), u_t - u) \geq (g_M(\|u_t\|) - g_M(\|u\|))(\|u_t\| - \|u\|)$$

et pour $t \in]0, 1[$, on a :

$$(J'(u_t), v - u) - (J'(u), v - u) \geq \frac{1}{t} (g_M(\|u_t\|) - g_M(\|u\|))(\|u_t\| - \|u\|) \\ \geq (g_M(\|u_t\|) - g_M(\|u\|))(\|u_t\| - \|u\|)$$

d'où par intégration entre 0 et 1 et compte tenu de la définition (2.25)

$$(2.26) \quad J(v) - J(u) - (J'(u), v - u) \geq T_M(u, v);$$

clairement $T_M(u, v) \geq 0 \forall u, v \in B_M$; supposons que $T_M(u, v) = 0$ et montrons qu'alors $u = v$: si $T_M(u, v) = 0$ alors d'après (2.25) et la stricte monotonie de g_M on a $\|u_t\| = \|u\| \forall t \in [0, 1]$ d'où $u = v$ grâce à la convexité uniforme de V , par suite la propriété (2.1) est vérifiée. Démontrons (2.2) : soit $u_n, v_n \in B_M$ tels que $\lim_{n \rightarrow +\infty} T_M(u_n, v_n) = 0$ et posons $u_{n,t} = u_n + t(v_n - u_n)$; par un raisonnement analogue au précédent, on obtient

$$(2.27) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} (\|u_{n,t}\| - \|u_n\|) = 0 \quad \text{p.p.} \quad t \in [0, 1]$$

si $v_n - u_n$ ne converge pas vers 0 dans V fort lorsque $n \rightarrow +\infty$, alors il existe $\theta > 0$ et deux sous suites u_m, v_m telles que

$$(2.28) \quad \|v_m - u_m\| \geq \theta > 0 \quad \forall m$$

soit l un point adhérent à la suite $\|u_m\|$; par extraction d'une sous-suite, encore notée u_m , on a

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \|u_m\| = l$$

et d'après (2.27)

$$(2.29) \quad \lim_{m \rightarrow +\infty} \|u_{m,t}\| = l \quad \text{p.p.} \quad t \in [0, 1]$$

si $l = 0$ alors $\lim_{m \rightarrow +\infty} u_m = \lim_{m \rightarrow +\infty} u_{m,t} = 0$ et alors $\lim_{m \rightarrow +\infty} (v_m - u_m) = 0$, ce qui contredit (2.28).

Étudions le cas $l \neq 0$: $\forall \varepsilon > 0$ et presque pour tout $t \in [0, 1]$, $\exists N(\varepsilon, t)$ tel que $m > N(\varepsilon, t)$ entraîne

$$(2.30) \quad \begin{cases} \|u_m\| \leq l + \varepsilon \\ \|u_{m,t}\| \leq l + \varepsilon \end{cases}$$

soit α vérifiant $0 < \alpha < 1$, on a, compte tenu de (2.28)

$$(2.31) \quad \|u_{m,t} - u_m\| = \|t(v_m - u_m)\| \geq \alpha \theta \quad \forall t \in [\alpha, 1].$$

Les relations (2.30), (2.31) et la convexité uniforme de V entraînent pour presque tout $t \in [\alpha, 1]$

$$\left\| \frac{u_{m,t} + u_m}{2} \right\| \leq (l + \varepsilon) \left(1 - \gamma \left(\frac{\alpha \theta}{l + \varepsilon} \right) \right)$$

dès que $m > N(\varepsilon, t)$, c'est-à-dire

$$\left\| u_{m, \frac{t}{2}} \right\| \leq (l + \varepsilon) \left(1 - \gamma \left(\frac{\alpha \theta}{l + \varepsilon} \right) \right) \quad \forall m > N(\varepsilon, t)$$

si ε vérifie $0 < \varepsilon < 1$, alors

$$\left\| u_{m, \frac{t}{2}} \right\| \leq (l + \varepsilon) \left(1 - \gamma \left(\frac{\alpha \theta}{l + 1} \right) \right) \quad \forall m > N(\varepsilon, t)$$

en utilisant (2.29), le passage à la limite donne

$$l \leq (l + \varepsilon) \left(1 - \gamma \left(\frac{\alpha \theta}{l + 1} \right) \right)$$

Comme ε est arbitrairement petit et que $\gamma \left(\frac{\alpha \theta}{l + 1} \right) > 0$, cette inéquation ne peut avoir lieu, donc le cas $l \neq 0$ entraîne lui aussi une contradiction.

REMARQUE 2.3. — En fait, compte tenu de l'hypothèse II, on peut démontrer à l'aide du lemme 2.2, un résultat tout à fait analogue à celui du lemme 2.1 par des techniques très voisines; δ_M^0 vérifie dans ce cas

$$\delta_M^0(\tau) = \inf_{\substack{u, v \in B_M \\ \|v - u\| = \tau}} (J'(v) - J'(u), v - u) \geq \inf_{\substack{u, v \in B_M \\ \|v - u\| = \tau}} 2T_M(u, v)$$

le lemme 2.2 sert à démontrer que

$$\tau > 0 \Rightarrow \delta_M^0(\tau) > 0.$$

2.5. Cas des ensembles convexes quelconques

Si K n'est pas de la forme $\prod_{i=1}^N K_i$, on peut envisager la généralisation suivante de l'algorithme (1.2), (1.3)

$$(2.32) \quad u^0 \text{ est donné arbitrairement dans } K$$

u^n étant connu dans K , on détermine u^{n+1} en calculant successivement ses composantes U_i^{n+1} , $i = 1, 2, \dots, N$ par

$$(2.33) \quad \begin{cases} \tilde{u}_i^{n+1} \in K \\ J(\tilde{u}_i^{n+1}) \leq J(v) \end{cases} \quad \forall v \in K_i^{n+1}$$

où

$$K_i^{n+1} = \{ v \mid v \in K, \quad v = (U_1^{n+1}, \dots, U_{i-1}^{n+1}, v_i, U_{i+1}^n, \dots, U_N^n) \}.$$

Ici encore l'algorithme a un sens, c'est-à-dire qu'on peut construire la suite u^n ; malheureusement on n'est pas assuré de la convergence de la suite u^n vers la solution u comme le montre le contre-exemple suivant :

On considère dans \mathbf{R}^2 le problème

$$\text{Min}_{x,y \in K} (x^2 + y^2)$$

$$K = \{ (x, y) \mid x \geq 0, y \geq 0, x + y \geq 1 \}$$

dont la solution est évidemment $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$. Si on applique l'algorithme (2.32),

(2.33) à ce problème avec $x^0, y^0 \in K, y^0 \neq \frac{1}{2}$ alors $\forall n$ on a

$$x^n = x^1 \neq \frac{1}{2}, y^n = y^1 \neq \frac{1}{2}.$$

3. MINIMISATION, AVEC CONTRAINTES, PAR SUR ET SOUS-RELAXATION DE FONCTIONNELLES QUADRATIQUES SUR DES ESPACES DE HILBERT

3.1. Position du problème de minimisation

Soit l'espace $V = \prod_{i=1}^N V_i$ où V_i est pour $i = 1, 2, \dots, N$ un espace de Hilbert dont la norme et le produit scalaire sont notés respectivement $\| \cdot \|_i$ et $((\cdot, \cdot))_i$; on définit sur V un produit scalaire et une norme par :

$$(3.1) \quad ((u, v)) = \sum_{i=1}^N ((u_i, v_i))_i$$

$$(3.2) \quad \|v\| = \left(\sum_{i=1}^N \|v_i\|_i^2 \right)^{1/2}$$

pour lesquels V est un espace de Hilbert.

Soit K le convexe fermé de V défini par $K = \prod_{i=1}^N K_i$ où les K_i sont des convexes fermés, non vides, de V_i .

Soit $J : V \rightarrow \mathbf{R}$ définie par :

$$(3.3) \quad J(v) = a(v, v) - 2((f, v))$$

où a est une forme bilinéaire, continue, symétrique et V -elliptique i.e.

$$\exists \alpha > 0 \text{ tel que } a(v, v) \geq \alpha \|v\|^2 \quad \forall v \in V \text{ et } f \in V;$$

sous les hypothèses ci-dessus sur V, K, J le problème d'optimisation :

$$(3.4) \quad \begin{cases} J(u) \leq J(v) & \forall v \in K \\ u \in K \end{cases}$$

admet une solution et une seule caractérisée par :

$$(3.5) \quad \begin{cases} a(u, v - u) - ((f, v - u)) \geq 0 & \forall v \in K \\ u \in K \end{cases}$$

3.2. Quelques résultats préliminaires

Compte tenu de la structure de V on a :

$$(3.6) \quad J(v) = J(v_1, \dots, v_N) = \sum_{1 \leq i, j \leq N} a_{ij}(v_i, v_j) - 2 \sum_{i=1}^N ((f_i, v_i))_i$$

où les formes a_{ij} sont bilinéaires, continues sur $V_i \times V_j$ avec $a_{ij} = a_{ji}^*$, les formes a_{ii} étant V_i -elliptiques (de constante α) sur V_i . Par utilisation du théorème de Riesz, on montre facilement l'existence d'opérateurs $A_{ij} \in \mathcal{L}(V_j, V_i)$ tels que :

$$(3.7) \quad a_{ij}(v_i, v_j) = ((v_i, A_{ij}v_j))_i$$

$$(3.8) \quad A_{ij} = A_{ji}^*$$

les A_{ii} (auto-adjoints) étant des isomorphismes de V_i sur V_i . On aura besoin par la suite de travailler avec les normes définies par les a_{ii} sur les V_i , soit :

$$(3.9) \quad |||v_i|||_i^2 = a_{ii}(v_i, v_i) = ((A_{ii}v_i, v_i))_i, \quad i = 1, 2, \dots, N.$$

Les normes $\|\cdot\|_i$ et $|||\cdot|||_i$ sont équivalentes et on notera P_i le projecteur de V_i sur K_i selon la norme $|||\cdot|||_i$. Avant de décrire la méthode itérative, de type sur ou sous-relaxation avec projection, utilisée pour résoudre (3.4) nous allons démontrer quelques propriétés des projecteurs dans les espaces de Hilbert, utiles pour la suite :

Soit :

— H un Hilbert réel de produit scalaire (\cdot, \cdot) et de norme $\|\cdot\|$.

— b une forme bilinéaire, continue, symétrique, H -elliptique (on a donc $b(v, v) \geq \beta \|v\|^2 \forall v \in H, \beta > 0$) et $g \in H$; d'après le théorème de Riesz et compte tenu de la H -ellipticité de b il existe un isomorphisme $B : H \rightarrow H$ tel que :

$$(3.5) \quad \begin{cases} (Bu, v) = b(u, v) & \forall u, v \in H \\ B = B^* \end{cases}$$

On notera respectivement $[\cdot, \cdot]$ et $|\cdot|$ le produit scalaire sur H et la norme définis par :

$$(3.6) \quad [u, v] = b(u, v) \quad \forall u, v \in H;$$

$$(3.7) \quad |u|^2 = b(u, u) \quad \forall u \in H;$$

les normes $|\cdot|$ et $\|\cdot\|$ sont équivalentes.

— C un convexe fermé, non vide de H et Π l'opérateur de projection de H sur C selon la norme $|\cdot|$.

— $j : H \rightarrow \mathbf{R}$ la fonctionnelle définie par :

$$(3.8) \quad j(v) = b(v, v) - 2(g, v)$$

Dans ces conditions, on a les lemmes ci-dessous :

Lemme 3.1. Si u est la solution (unique) de

$$(3.9) \quad \begin{cases} j(u) \leq j(v) & \forall v \in C \\ u \in C \end{cases}$$

on a :

$$(3.10) \quad u = \Pi(B^{-1}g)$$

Démonstration. — La solution u de (3.9) est caractérisée par :

$$(3.11) \quad \begin{cases} (Bu - g, v - u) \geq 0 & \forall v \in C \\ u \in C \end{cases}$$

qui s'écrit encore :

$$(3.12) \quad \begin{cases} (B(v - u), B^{-1}g - u) = b(v - u, B^{-1}g - u) \leq 0 & \forall v \in C \\ u \in C \end{cases}$$

et (3.12) caractérise bien u comme projection de $B^{-1}g$ sur C selon la norme $|\cdot|$.

Lemme 3.2. — Soit $u_0 \in C$, et u_1 défini par :

$$(3.13) \quad u_1 = \Pi(u_0 + \omega(B^{-1}g - u_0)) \quad , \quad \omega > 0$$

on a alors :

$$(3.14) \quad j(u_0) - j(u_1) \geq \frac{2 - \omega}{\omega} |u_0 - u_1|^2$$

Démonstration

On a, $\forall v_1, v_2 \in H$:

$$(3.15) \quad j(v_1) - j(v_2) = |v_1 - B^{-1}g|^2 - |v_2 - B^{-1}g|^2$$

Partant de $u_1 - B^{-1}g = u_0 - B^{-1}g + u_1 - u_0$ on déduit :

$$(3.16) \quad |u_0 - B^{-1}g|^2 = |u_1 - B^{-1}g|^2 + 2[u_0 - B^{-1}g, u_0 - u_1] - |u_0 - u_1|^2.$$

Par définition de u_1 , et $u_0 \in C$, on a :

$$(3.17) \quad [u_0 + \omega(B^{-1}g - u_0) - u_1, u_0 - u_1] \leq 0$$

d'où

$$(3.18) \quad |u_0 - u_1|^2 \leq \omega[u_0 - B^{-1}g, u_0 - u_1]$$

et de (3.16), (3.18) on déduit :

$$(3.19) \quad |u_0 - B^{-1}g|^2 - |u_1 - B^{-1}g|^2 \geq \frac{2-\omega}{\omega} |u_0 - u_1|^2$$

ce, qui compte tenu de (3.15), démontre le lemme.

3.3. Description de l'algorithme

Soit $\omega_i, i = 1, 2, \dots, N$ des scalaires positifs; on considère l'algorithme :

$$(3.20) \quad u^0 = (u_1^0, \dots, u_N^0) \text{ donné arbitrairement dans } K$$

u^n connu on détermine u^{n+1} par :

$$(3.21) \quad u_i^{n+1} = P_i \left(u_i^n - \omega_i A_{ii}^{-1} \left(\sum_{j < i} A_{ij} u_j^{n+1} + \sum_{j \geq i} A_{ij} u_j^n - f_i \right) \right), \quad i = 1, 2, \dots, N$$

REMARQUE 3.1. — Au vu de (3.21) on peut décomposer la détermination de u_i^{n+1} : on minimise d'abord sur V_i et sans contrainte la fonctionnelle

$$v_i \rightarrow J(u_1^{n+1} \dots u_{i-1}^{n+1}, v_i, u_{i+1}^n \dots u_N^n)$$

par rapport à la seule variable v_i , d'où

$$u_i^{n+1/3} = A_{ii}^{-1} \left(f_i - \sum_{j < i} A_{ij} u_j^{n+1} - \sum_{j > i} A_{ij} u_j^n \right),$$

on calcule ensuite $u_i^{n+2/3} = u_i^n + \omega_i(u_i^{n+1/3} - u_i^n)$ et on obtient enfin u_i^{n+1} par $u_i^{n+1} = P_i(u_i^{n+2/3})$ on remarquera que si $\omega_i = 1 \forall i = 1, 2, \dots, N$, on retrouve d'après le lemme 3.1, l'algorithme (1.2), (1.3) du n° 1.2.

3.4. Convergence de l'algorithme (3.20), (3.21) :

Proposition 3.1. — On a :

$$(3.22) \quad J(u^n) - J(u^{n+1}) \geq \sum_{i=1}^N \frac{2 - \omega_i}{\omega_i} \|u_i^{n+1} - u_i^n\|^2$$

Démonstration. — Cela résulte immédiatement de

$$(3.23) \quad J(u^n) - J(u^{n+1}) = \sum_{i=1}^N (J(\tilde{u}_{i-1}^{n+1}) - J(\tilde{u}_i^{n+1})),$$

de (3.21) et de l'application du lemme 3.2 à chacune des différences du deuxième membre de (3.23).

Proposition 3.2. — Si $0 < \omega_i < 2, \forall i = 1, 2, \dots, N$, on a $J(u^n) \geq J(u^{n+1}) \forall n$ et

$$(3.24) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} (u^n - u^{n+1}) = 0 \text{ dans } V \text{ fort.}$$

Démonstration. — La décroissance de $J(u^n)$ résulte de (3.22) et de $\frac{2 - \omega_i}{\omega_i} > 0 \forall i = 1, 2, \dots, N$; la suite $J(u^n)$ étant décroissante et bornée inférieurement par $J(u)$, où u est la solution de (3.4), est convergente, d'où $\lim_{n \rightarrow +\infty} (J(u^n) - J(u^{n+1})) = 0$ ce qui, d'après (3.22) implique

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|u_i^{n+1} - u_i^n\|_i = 0$$

d'où le résultat.

De ces propositions, on déduit le

Théorème 3.1. — Si $0 < \omega_i < 2, i = 1, 2, \dots, N$, on a pour la suite u^n définie par (3.20), (3.21) :

$$(3.24) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} u^n = u \text{ dans } V \text{ fort}$$

où u est la solution de (3.4).

Démonstration. — On part de la relation de V -ellipticité :

$$(3.26) \quad a(u^{n+1} - u, u^{n+1} - u) \geq \alpha \|u^{n+1} - u\|^2$$

qui s'écrit encore

$$\begin{aligned} a(u^{n+1}, u^{n+1} - u) - ((f, u^{n+1} - u)) \\ \geq a(u, u^{n+1} - u) - ((f, u^{n+1} - u)) + \alpha \|u^{n+1} - u\|^2 \end{aligned}$$

mais u est minimal sur K donc $a(u, u^{n+1} - u) - ((f, u^{n+1} - u)) \geq 0$, d'où :

$$(3.27) \quad a(u^{n+1}, u^{n+1} - u) - ((f, u^{n+1} - u)) \geq \alpha \|u^{n+1} - u\|^2.$$

On va expliciter le premier membre de (3.27), soit :

$$(3.28) \quad a(u^{n+1}, u^{n+1} - u) - ((f, u^{n+1} - u)) \\ = \sum_{i=1}^N \left(\left(\sum_{j=1}^N A_{ij} u_j^{n+1} - f_i, u_i^{n+1} - u_i \right) \right)_i.$$

Soit \bar{u}^{n+1} réalisant le minimum sur K_i de la fonctionnelle

$$v_i \rightarrow J(u_1^{n+1}, \dots, u_{i-1}^{n+1}, v_i, u_{i+1}^n \dots, u_N^n),$$

alors d'après le lemme 3.1, on a :

$$(3.29) \quad \bar{u}_i^{n+1} = P_i \left(A_{ii}^{-1} \left(f_i - \sum_{j<i} A_{ij} u_j^{n+1} - \sum_{j>i} A_{ij} u_j^n \right) \right)$$

et par ailleurs

$$(3.30) \quad \left(\left(A_{ii} \bar{u}_i^{n+1} + \sum_{j<i} A_{ij} u_j^{n+1} + \sum_{j>i} A_{ij} u_j^n - f_i, v_i - \bar{u}_i^{n+1} \right) \right)_i \geq 0 \\ \forall v_i \in K_i$$

On peut écrire (3.28) sous la forme :

$$(3.31) \quad \left\{ \begin{array}{l} a(u^{n+1}, u^{n+1} - u) - ((f, u^{n+1} - u)) \\ \qquad \qquad \qquad = \sum_{i=1}^N ((A_{ii}(u_i^{n+1} - \bar{u}_i^{n+1}), u_i^{n+1} - u_i))_i \\ + \sum_{i=1}^N \left(\left(\sum_{j>i} A_{ij} (u_j^{n+1} - u_j^n), u_i^{n+1} - u_i \right) \right)_i \\ \qquad \qquad \qquad + \sum_{i=1}^N \left(\left(\sum_{j<i} A_{ij} u_j^{n+1} + A_{ii} \bar{u}_i^{n+1} \right. \right. \\ \left. \left. + \sum_{j>i} A_{ij} u_j^n - f_i, u_i^{n+1} - \bar{u}_i^{n+1} \right) \right)_i + \sum_{i=1}^N \left(\left(\sum_{j<i} A_{ij} u_j^{n+1} + A_{ii} \bar{u}_i^{n+1} \right. \right. \\ \left. \left. + \sum_{j>i} A_{ij} u_j^n - f_i, \bar{u}_i^{n+1} - u_i \right) \right)_i \end{array} \right.$$

et d'après (3.30) le quatrième terme du deuxième membre de (3.31) est négatif ou nul, on déduit donc de (3.26), (3.31) :

$$(3.32) \left\{ \begin{aligned} & \sum_{i=1}^N ((A_{ii}(u_i^{n+1} - \bar{u}_i^{n+1}), u_i^{n+1} - u_i))_i + \sum_{i=1}^N \left(\left(\sum_{j<i} A_{ij}u_j^{n+1} + A_{ii}\bar{u}_i^{n+1} \right. \right. \\ & \left. \left. + \sum_{j>i} A_{ij}u_j^n - f_i, u_i^{n+1} - \bar{u}_i^{n+1} \right) \right)_i \\ & \left. + \sum_{i=1}^N \left(\left(\sum_{j>i} A_{ij}(u_j^{n+1} - u_j^n), u_i^{n+1} - u_i \right) \right)_i \right\} \geq \alpha \|u^{n+1} - u\|^2 \end{aligned} \right.$$

Pour démontrer que u^{n+1} tend vers u dans V fort il suffit donc de démontrer que le premier membre de (3.32) tend vers zéro; en fait, les opérateurs A_{ij} étant linéaires continus, les vecteurs u_i^n, \bar{u}_i^n bornés, uniformément en i et n , avec $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u^n - u^{n+1}) = 0$ dans V fort, il suffit de démontrer que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (\bar{u}^n - u^n) = 0$$

dans V fort, où $\bar{u}^n = (\bar{u}_1^n, \dots, \bar{u}_N^n)$; montrons ce dernier point : le paramètre ω_i étant positif on a d'après (3.30)

$$(3.33) \quad \bar{u}_i^{n+1} = P_i \left[\bar{u}_i^{n+1} - \omega_i A_{ii}^{-1} \left(\sum_{j<i} A_{ij}u_j^{n+1} + A_{ii}\bar{u}_i^{n+1} + \sum_{j>i} A_{ij}u_j^n - f_i \right) \right]$$

d'où, compte tenu de (3.21), et la projection sur K_i étant contractante :

$$(3.34) \quad \|\bar{u}_i^{n+1} - u_i^{n+1}\|_i \leq |1 - \omega_i| \|\bar{u}_i^{n+1} - u_i^n\|_i \quad \forall i = 1, 2, \dots, N$$

et puisque $0 < \omega_i < 2$ entraîne $0 < |1 - \omega_i| < 1$, on a également :

$$(3.35) \quad \|\bar{u}_i^{n+1} - u_i^{n+1}\|_i \leq \|\bar{u}_i^{n+1} - u_i^n\|_i \quad \forall i = 1, 2, \dots, N.$$

De l'inégalité du triangle et de (3.34), (3.35) on déduit alors :

$$(3.36) \quad \left\{ \begin{aligned} & \|\bar{u}_i^n - u_i^{n+1}\|_i \geq \|\bar{u}_i^n - \bar{u}_i^{n+1}\|_i - \|\bar{u}_i^{n+1} - u_i^{n+1}\|_i \\ & \geq (1 - |1 - \omega_i|) \|\bar{u}_i^{n+1} - u_i^n\|_i \\ & \geq (1 - |1 - \omega_i|) \|\bar{u}_i^{n+1} - \bar{u}_i^{n+1}\|_i \end{aligned} \right.$$

avec $0 < 1 - |1 - \omega_i| < 1$.

D'après la proposition 3.2 on a $u^{n+1} - u^n \rightarrow 0$ dans V fort, il résulte de (3.36) qu'il en est de même de $\bar{u}^n - u^n$, ce qui démontre le théorème.

REMARQUE 3.2. — Le théorème précédent constitue une généralisation de C. W. Cryer [14] et d'un résultat classique en dimension finie (et en l'absence de contrainte) pour lequel nous renvoyons à R. S. Varga [1].

REMARQUE 3.3. — Si on a $\omega_i > 1$ (resp. $\omega_i = 1$, $\omega_i < 1$) $\forall i = 1, 2, \dots, N$ l'algorithme (3.20), (3.21) est du type sur-relaxation (resp. relaxation, sous-relaxation, avec projection).

4. RESOLUTION PAR SUR-RELAXATION D'UN PROBLEME ELASTO-PLASTIQUE BI-DIMENSIONNEL

4.1. Position du problème continu

On considère une barre cylindrique de section droite Ω simplement connexe, de frontière Γ constituée d'un matériau élastique, parfaitement plastique; l'état initial du matériau étant supposé sans contrainte, on soumet la barre à un couple de torsion *croissant*, dans ces conditions l'état physique de la barre peut être décrit à partir de la solution du problème :

$$(4.1) \quad \begin{cases} \text{Min } J(v) \\ v \in K_0 \\ J(v) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\text{grad } v|^2 dx - C \int_{\Omega} v(x) dx, C > 0 \\ K_0 = \{ v \mid v \in H_0^1(\Omega), |\text{grad } v(x)| \leq 1 \text{ p.p.} \} \quad (1) \end{cases}$$

Il est classique que (P_0) admet une solution et une seule; pour les propriétés de cette solution cf. Brezis-Stampacchia [17], H. Lanchon [18], H. Lanchon-G. Duvaut [19], etc... et la bibliographie de ces travaux.

Dans H. Brezis-M. Sibony [20], on démontre que la solution de (4.1) est également solution du problème :

$$(4.2) \quad \begin{cases} \text{Min } J(v) \\ v \in K_1 \\ K_1 = \{ v \mid v \in H_0^1(\Omega), |v(x)| \leq \delta(x, \Gamma) \text{ p.p.} \} \end{cases}$$

où $\delta(x, \Gamma)$ est la distance du point x à la frontière Γ de Ω .

Dans cet article on se limitera à la résolution numérique de (4.2); pour la résolution du problème sous la forme (4.1) on renvoie à Céa-Glowinski-Nédélec [21], Bourgat [22], Goursat [23], et à la bibliographie de ces travaux.

(1) On rappelle que $H_0^1(\Omega) = \left\{ v \mid v, \frac{\partial v}{\partial x_1}, \frac{\partial v}{\partial x_2} \in L^2(\Omega), v|_{\Gamma} = 0 \right\}, \frac{\partial v}{\partial x_i}, i = 1, 2$, étant la dérivée distribution de v .

4.2. Approximation de (4.2)

Soit $h > 0$, destiné à tendre vers zéro, on définit :

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_h &= \{ M_{ij} \mid M_{ij} = (ih, jh), ij \in Z \} \\ \sigma_{ij} &= \left[\left(i - \frac{1}{2} \right) h, \left(i + \frac{1}{2} \right) h \right] \times \left[\left(j - \frac{1}{2} \right) h, \left(j + \frac{1}{2} \right) h \right] \\ \rho_{ij} &= \sigma_{ij} \cup \sigma_{i \pm \frac{1}{2} j} \cup \sigma_{i \pm \frac{1}{2} j} \end{aligned}$$

où $\sigma_{i \pm \frac{1}{2} j}$ (resp. $\sigma_{ij \pm \frac{1}{2}}$) est le translaté de $\pm \frac{h}{2}$ parallèlement à ox_1 (resp. ox_2) de σ_{ij} .

On définit alors (cf. par exemple Cea [24])

(4.3) $\Omega_h = \{ M_{ij} \mid M_{ij} \in \mathbf{R}_h, \rho_{ij} \subset \Omega \}$

(4.4) $\Gamma_h = \{ M_{ij} \mid M_{ij} \in \mathbf{R}_h, M_{ij} \notin \Omega_h, \text{l'un des points } M_{i \pm 1 j}, M_{i j \pm 1} \in \Omega_h \}$

(4.5) $\bar{\Omega}_h = \Omega_h \cup \Gamma_h$

Soit :

(4.6) $V_h = \{ v_h \mid v_h = (v_{ij})_{M_{ij} \in \Omega_h} \}$

On approche alors $J(v)$ par :

(4.7)
$$J_h(v_h) = \frac{h^2}{4} \sum_{M_{ij} \in \bar{\Omega}_h} \left(\frac{v_{i+1j} - v_{ij}}{h} \right)^2 + \left(\frac{v_{i-1j} - v_{ij}}{h} \right)^2 + \left(\frac{v_{ij+1} - v_{ij}}{h} \right)^2 + \left(\frac{v_{ij-1} - v_{ij}}{h} \right)^2 - h^2 C \sum_{M_{ij} \in \Omega_h} v_{ij}$$

et K_1 par :

(4.8) $K_{1h} = \{ v_h \mid v_h \in V_h, |v_{ij}| \leq \delta_{ij} = \delta(M_{ij}, \Gamma) \}$

Dans (4.7) on convient de prendre $v_{kl} = 0$ si $M_{kl} \notin \Omega_h$.

Il est alors naturel de prendre pour problème approché :

(4.9)
$$\begin{cases} \text{Min } J_h(v_h) \\ v_h \in K_{1h} \end{cases}$$

4.3. Résolubilité de (4.9) et convergence lorsque $h \rightarrow 0$

La partie quadratique de la fonctionnelle (4.7) définit le carré d'une norme euclidienne sur V_h , J_h est donc strictement convexe et K_{1h} étant convexe et

borné (4.9) admet une solution unique, soit u_h . Relativement à la convergence, on définit $q_h : V_h \rightarrow L^2(\Omega)$ comme la restriction à Ω de la fonction étagée

$$(4.10) \quad \sum_{M_{ij} \in \Omega_h} v_{ij} \theta_{ij}(x)$$

où θ_{ij} est la fonction caractéristique de σ_{ij} ; on définit également sur Ω , $\nabla_{1h} q_h v_h$ (resp. $\nabla_{2h} q_h v_h$) par :

$$\frac{q_h v_h \left(x_1 + \frac{h}{2}, x_2 \right) - q_h v_h \left(x_1 - \frac{h}{2}, x_2 \right)}{h}$$

$$\left(\text{resp. } \frac{q_h v_h \left(x_1, x_2 + \frac{h}{2} \right) - q_h v_h \left(x_1, x_2 - \frac{h}{2} \right)}{h} \right)$$

on démontre alors (cf. par exemple Céa-Glowinski-Nédélec, loc. cit.), que lorsque $h \rightarrow 0$ on a :

$$(4.11) \quad \left[\begin{array}{l} q_h u_h \rightarrow u \quad \text{dans } L^2(\Omega) \text{ fort} \\ \nabla_{1h} q_h u_h \rightarrow \frac{\partial u}{\partial x_1} \quad \text{dans } L^2(\Omega) \text{ fort} \\ \nabla_{2h} q_h u_h \rightarrow \frac{\partial u}{\partial x_2} \quad \text{dans } L^2(\Omega) \text{ fort} \end{array} \right.$$

où u est la solution de (4.2) (et de (4.1)).

4.4. Résolution de (4.9)

On utilise l'algorithme (3.20), (3.21) (cf. n° 3.3) avec $\omega = \omega_i \mathbf{V}_i$; la forme explicite est donnée, en itérant à i, j croissants, par :

$$(4.12) \quad u_h^0 \in K_{1h} \quad \text{donné}$$

et pour $M_{ij} \in \Omega_h$:

$$(4.13) \quad u_{ij}^{n+\frac{1}{2}} = (1 - \omega) u_{ij}^n + \frac{\omega}{4} (u_{i+1j}^n + u_{ij+1}^n + u_{i-1j}^n + u_{ij-1}^n + h^2 C)$$

$$(4.14) \quad u_{ij}^{n+1} = \max(-\delta_{ij}, \min(u_{ij}^{n+\frac{1}{2}}, \delta_{ij}))$$

avec, là encore, la convention $u_{kl} = 0$, si $M_{kl} \notin \Omega_h$.

On a démontré au n° 3.4, théorème 3.1, que (4.12), (4.13), (4.14) converge, pour $0 < \omega < 2$ vers la solution u_h de (4.9).

4.5. Analyse des résultats

On a pris l'exemple correspondant à $\Omega =]0,1[\times]0,1[$, $C = 10$ avec $h = \frac{1}{40}$, $u_h^0 = 0$, le test d'arrêt choisi étant :

$$\sum_{i,j} |u_{ij}^{n+1} - u_{ij}^n| < 10^{-4}.$$

Relativement à la vitesse de convergence en fonction de ω on a le tableau suivant :

ω	1	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9	2
Nombre d'itérations	290	138	118	98	93	108	188	divergence

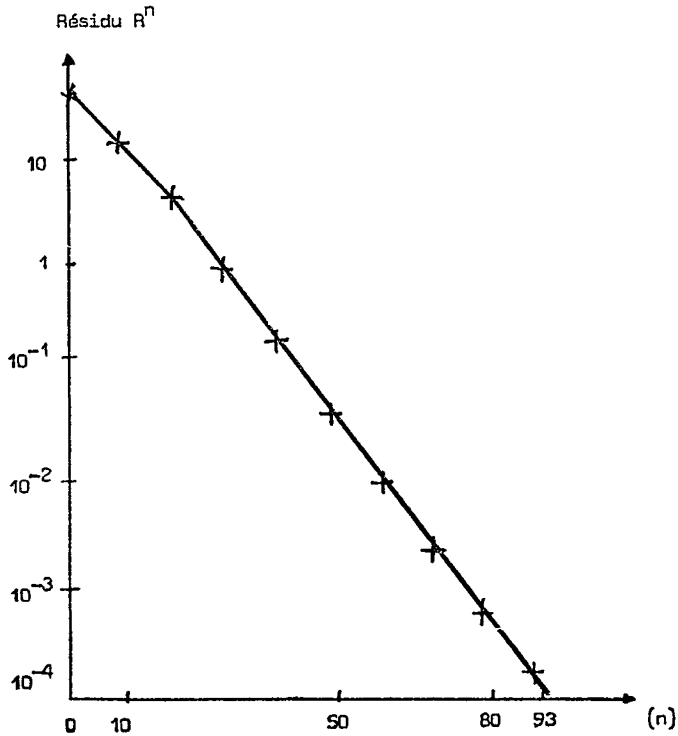


Figure 4.1

Décroissance du résidu R^n en fonction du nombre d'itérations n effectuées.
Cas où $C = 10$ (Échelle semi-log).

Le temps d'exécution sur I.B.M. 360/91 est de 7.33 s pour $\omega = 1$ et 2.51 s pour $\omega = 1.7$.

On a représenté sur la figure 4.1 la décroissance de la quantité

$$R^n = \sum_{i,j} |u_{ij}^{n+1} - u_{ij}^n|$$

en fonction du nombre d'itérations, pour $\omega = 1.7$; sur la figure 4.2, on a représenté les zones plastiques ($|u| = \delta(x, \Gamma)$) et élastique ($|u| < \delta(x, \Gamma)$) (1); relativement à la valeur optimale de ω on peut faire la :

REMARQUE 4.1. La valeur optimale de ω est très sensiblement celle qui correspond à la résolution du problème de Dirichlet $-\Delta u = C$ dans la zone

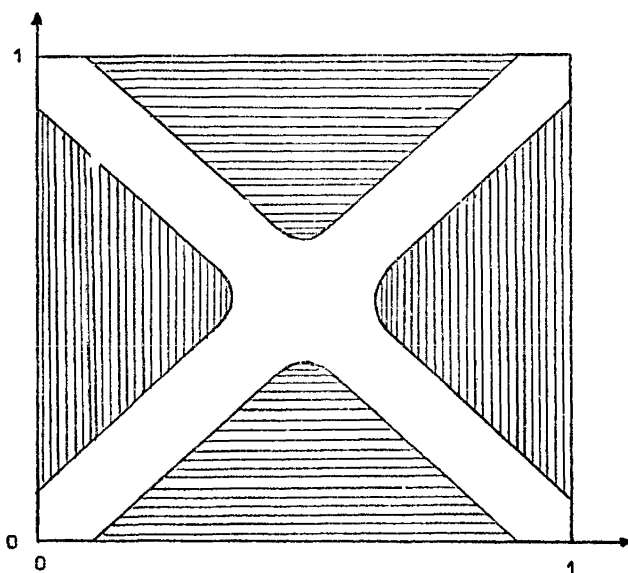


Figure 4.2

Représentation des zones élastiques (en blanc)
et plastiques (hachurées) pour $C = 10$.

élastique pour une discrétisation de pas h ; ceci correspond au fait que la zone plastique, i.e. celle où les contraintes sont vérifiées avec égalité, est très rapidement localisée et que le temps de calcul est essentiellement utilisé à résoudre le problème $-\Delta u = C$ dans la zone élastique. Par ailleurs la zone plastique est croissante avec C , ce qui explique que le ω optimal et le nombre d'itérations (donc le temps de calcul) soient des fonctions décroissantes de C , à h donné.

(1) et $-\Delta u = C$.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] VARGA R. S., *Matrix iterative analysis*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1962.
- [2] ORTEGA J. M. et RHEIBOLDT W. C., *Monotone iterations for non linear equations with application to Gauss-Seidel method*. SIAM J. of Num. Anal., vol. 4, n° 2, 1967.
- [3] ORTEGA J. M. et RHEIBOLDT W. C., *Iterative solution of non linear equations in several variables*, Academic Press, 1970.
- [4] MIELLOU J. C., C.R.A.S., 273, série A, 1971, p. 1257-1260.
- [5] MIELLOU J. C., C.R.A.S., 275, série A, 1972, p. 1107-1110.
- [6] SCHECHTER S., *Iterations method for non linear problems*, Trans A.M.S., 104, p. 179-189, 1962.
- [7] SCHECHTER S., *Relaxation method for convex problems*, SIAM J. of Num. Anal., vol. 5, 1968, p. 601-612.
- [8] SCHECHTER S., Minimization of convex functions by relaxation, ch. 7 de *Integer and non linear programming*. Abadie editor, North Holland, 1970, p. 177-189.
- [9] CEA J., *Recherche numérique d'un optimum dans un espace produit*. Lectures Notes in Mathematics, Springer Verlag, 112, Colloquium on Methods of Optimization, 1970.
- [10] CEA J., *Optimisation, théorie et algorithme*, Dunod, 1971.
- [11] AUSLENDER A., *Méthodes numériques pour la décomposition et la minimisation de fonctions non différentiables*, Numer. Math., 18, 213-223, 1972.
- [12] CHRISTOPHERSON D. G., *A New Mathematical method for the solution of Film Lubrification Problems*, Proc. Inst. Mech. Engrs, 146, 1941, p. 126-135.
- [13] CRYER C. W., *The Method of Christopherson for Solving Free Boundary problems for Infinite Journal Bearings by Means of Finite Differences*. Math. Comp., 25, 1971, p. 435-443.
- [14] CRYER C. W., *The solution of a quadratic programming problem using systematic over relaxation*, SIAM J. of Control, vol. 9, n° 3, Aug. 1971, p. 385-392.
- [15] GLOWINSKI R., *La Méthode de Relaxation*, Rendiconti di Matematica, 14, Univ. de Rome, 1971.
- [16] YOSIDA K., *Functional Analysis*, Springer Verlag, 1968.
- [17] BREZIS H. et STAMPACCHIA G., *Sur la régularité de la solution d'inéquations elliptiques*, Bull. de la Soc., Mathématiques de France, t. 96, 1968, p. 153-180.
- [18] LANCHON H., C.R.A.S., 269, série A, 1969, p. 791-794.
- [19] LANCHON H. et DUVAUT G., C.R.A.S., 264, série A, 1967, p. 520-523.
- [20] BREZIS H. et SIBONY M., *Equivalence de deux Inéquations variationnelles et Applications*, Arch. Rat. Mech. Analysis, vol. 41, Number 4, 1971, p. 254-265.
- [21] CEA J., GLOWINSKI R. et NEDELEC J. C., *Méthodes Numériques pour le problème de la Torsion Elasto-Plastique d'une barre cylindrique*, à paraître aux Cahiers de l'I.R.I.A., 1973.
- [22] BOURGAT J. F., Thèse de 3^e cycle, Paris VI, 1971.
- [23] GOURSAT M., Thèse de 3^e cycle, Paris VI, 1971.
- [24] CEA J., *Approximation variationnelle des problèmes aux limites*. Ann. Inst. Fourier, 14, 2, 1964.