REVUE FRANÇAISE D'AUTOMATIQUE INFORMATIQUE
RECHERCHE OPÉRATIONNELLE. MATHÉMATIQUE

B. GERMAIN-BONNE

Brève communication. Transformations de suites

Revue française d'automatique informatique recherche opérationnelle. Mathématique, tome 7, nº R1 (1973), p. 84-90

<http://www.numdam.org/item?id=M2AN_1973__7_1_84_0>

R.A.I.R.O.
(7e année, avril 1973, R-1, p. 84-90)

TRANSFORMATIONS DE SUITES

par B. GERMAIN-BONNE [1]

Résumé. — *Étude des propriétés de fonctions permettant de transformer une suite convergente en une autre suite qui converge vers la même limite, avec une meilleure rapidité de convergence.*

INTRODUCTION

Soit (S_i) une suite de nombres réels, convergente, et de limite S. Nous nous proposons d'étudier des transformations de la forme $y = G(x_0, x_1, ..., x_n)$, que nous appliquerons à $(n + 1)$ éléments consécutifs de la suite. Notons T_i le transformé de S_i, S_{i+1}, ..., S_{i+n}; nous déterminerons des conditions (sur la suite (S_i) et les transformations à $(n + 1)$ variables) permettant d'avoir les propriétés suivantes :

$$\lim_{i \to \infty} T_i = \lim_{i \to \infty} S_i = S \qquad \text{(propriété de régularité)}$$

$$\lim_{i \to \infty} \frac{T_i - S}{S_i - S} = 0 \qquad \text{(propriété d'accélération de convergence).}$$

I. — TRANSFORMATIONS REGULIERES

1-0. Définition

Soient $S_i, S_{i+1}, ..., S_{i+n}$, $(n + 1)$ éléments consécutifs d'une suite convergente, de limite S; soit G une fonction de $(n + 1)$ variables. La transformation G est *régulière* pour la suite (S_n) si :

$$\lim_{i \to \infty} G(S_i, S_{i+1} \dots S_{i+n}) = \lim_{i \to \infty} S_i = S.$$

(1) Maître-Assistant, Laboratoire de Calcul Numérique, Faculté des Sciences de Lille.

1-1. Hypothèses

H-0. G est une fonction définie et continue sur $\mathbf{R}^{n+1}$.

H-1. La fonction G est *homogène* de degré 1 :

$$G(ax_0, ax_1, ..., ax_n) = aG(x_0, x_1, ..., x_n) \quad \forall a \in \mathbf{R}.$$

H-2. La fonction G est *translative*

$$G(x_0 + t, ..., x_n + t) = G(x_0, x_1, ..., x_n) + t \quad \forall t \in \mathbf{R}.$$

1-2. Propriétés

1. $G(x, x, ..., x) = x \ \forall x$

En effet $H_1 \Rightarrow G(0, 0, ..., 0) = 0$
$H_2 \Rightarrow G(t, t, ... t) = G(0 ... 0) + t \ \forall t.$

2. Soit $\mathfrak{D}_{n+1}$ le sous-ensemble de $\mathbf{R}^{n+1}$ formé par les vecteurs ayant toutes leurs composantes distinctes ($x = (x_0, x_1 ... x_n) \in \mathfrak{D}_{n+1} \Leftrightarrow x_i \neq x_j \ \forall i \neq j$).

Soit $\mathcal{F}_{n-1}$ le sous-ensemble de $\mathbf{R}^{n-1}$ formé par les vecteurs ayant toutes leurs composantes $\neq 0$.

Théorème : Toute transformation G définie et continue sur $\mathfrak{D}_{n+1}$ et vérifiant les hypothèses H_1, H_2 peut être sous la forme :

$$G(x_0, x_1, ... x_n) = x_0 + (x_1 + x_0)g\left(\frac{x_2 - x_1}{x_1 - x_0}, ... \frac{x_{i+1} - x_i}{x_i - x_{i-1}}, ... \frac{x_n - x_{n-1}}{x_{n-1} - x_{n-2}}\right)$$

g étant une fonction de $(n - 1)$ variables définie et continue sur $\mathcal{F}_{n-1}$.

Démonstration. Soient $x_0, x_1, ..., x_n$ $(n + 1)$ nombres réels distincts. D'après H_1 et H_2 on peut écrire :

$$G(x_0, x_1, ... x_n) = x_0 + (x_1 - x_0)G\left(0, 1, \frac{x_2 - x_0}{x_1 - x_0}, ... \frac{x_i - x_0}{x_1 - x_0}, ... \frac{x_n - x_0}{x_1 - x_0}\right).$$

Posons $X_j = \dfrac{x_{j+1} - x_j}{x_j - x_{j-1}} \qquad Y_j = \dfrac{x_j - x_0}{x_1 - x_0}.$

On a
$$Y_0 = 0$$
$$Y_1 = 1$$
$$Y_i = 1 + \sum_{j=1}^{i-1} X_1 ... X_j \qquad i \geqslant 2.$$

Chaque Y_i peut être considéré comme une fonction définie et continue des X_j (le cas $X_i = 0$ étant exclu).

Notons $G(0, 1, y_2 \dots y_n) = g(X_1 \dots X_{n-1})$, g est une fonction des $(n-1)$ variables $X_1 \dots X_n$ continue sur $\mathcal{F}_{n-1}$.

On peut donc écrire

$$\boxed{G(x_0 \dots x_n) = x_0 + (x_1 - x_0) g\left(\frac{x_2 - x_1}{x_1 - x_0}, \dots \frac{x_n - x_{n-1}}{x_{n-1} - x_{n-2}}\right).}$$

3. A toute fonction g définie et continue sur $\mathcal{F}_{n-1}$, on peut associer G définie sur $\mathfrak{D}_{n+1}$, continue et satisfaisant à H_1 et H_2.

Soit $G(x_0, \dots x_n) = x_0 + (x_1 - x_0) g\left(\dfrac{x_2 - x_1}{x_1 - x_0}, \dots \dfrac{x_n - x_{n-1}}{x_{n-1} - x_{n-2}}\right)$.

G est définie pour tout ensemble $(x_0 \dots x_n)$ de valeurs distinctes ($x_i \neq x_j$ si $i \neq j$).

G vérifie H_2.

G vérifie H_1 pour $a \neq 0$: $G(ax_0 \dots x_n) = aG(x_0 \dots x_n)$.

(G vérifie aussi H_1 pour $a = 0$ si on pose $G(0, \dots, 0) = 0$.)

1-3. Application aux transformations régulières de suites

Soit (S_n) une suite convergente, de limite S.

Théorème 1. Toute transformation G satisfaisant aux hypothèses H_0, H_1, H_2 est régulière pour toute suite convergente.

Démonstration : D'après la propriété 1, $G(S, S, \dots, S) = S$.

La fonction G étant continue en S,

$$\lim_{i \to \infty} G(S_i, S_{i+1}, \dots S_{i+n}) = G(S, S, \dots S) = S.$$

Théorème 2. Toute transformation G définie et continue sur $\mathfrak{D}_{n+1}$, satisfaisant aux hypothèses H_1, H_2 est régulière pour une suite (S_n) ayant les propriétés suivantes : à partir d'un certain rang les S_i sont distincts (suite non stationnaire) et $\left|\dfrac{S_{i+1} - S_i}{S_i - S_{i-1}}\right| < M$.

Démonstration : D'après la propriété 2 on peut écrire :

$$G(S_i, S_{i+1}, \dots S_{i+n}) = S_i + (S_{i+1} - S_i) g\left(\frac{S_{i+2} - S_{i+1}}{S_{i+1} - S_i}, \dots \frac{S_{i+n} - S_{i+n-1}}{S_{i+n-1} - S_{i+n-2}}\right)$$

g étant une fonction définie et continue sur $\mathcal{F}_{n-1}$.

Les quantités $\frac{S_{j+1} - S_j}{S_j - S_{j-1}}$ restent finies

$$g\left(\frac{S_{i+2} - S_{i+1}}{S_{i+1} - S_i}, \dots \frac{S_{i+n} - S_{i+n-1}}{S_{i+n-1} - S_{i+n-2}}\right)$$

reste donc borné.

Donc $\lim\limits_{i \to \infty} G(S_i, S_{i+1}, \dots S_{i+n}) = \lim\limits_{i \to \infty} S_i = S.$

REMARQUE. Les transformations rationnelles introduites par Pennacchi, Shanks, Aitken sont un cas particulier des transformations G et sont définies sur un ensemble plus restreint que $\mathfrak{D}_{n+1}$. Les fonctions g associées à ces transformations sont des fractions rationnelles des variables $X_j = \frac{\Delta x_j}{\Delta x_{j-1}}$.

II. ACCELERATION DE LA CONVERGENCE

2-0. Définition. Notations

Définition. Soit (S_n) une suite convergente. Une transformation G possède la *propriété d'accélération* (on « accélère la convergence » de la suite (S_n)) si :

$$\lim_{i \to \infty} \frac{G(S_i, S_{i+1} \dots S_{i+n}) - S}{S_i - S} = 0$$

REMARQUE. Si une transformation possède la propriété d'accélération pour une suite (S_n), elle est forcément régulière pour cette suite.

Notations

$$\rho_i = \frac{S_{i+1} - S_i}{S_i - S_{i-1}} \quad ; \quad e_i = S_i - S \quad ; \quad \varepsilon_i = G(S_i, \dots, S_{i+n}) - S \quad ; \quad r_i = \frac{e_{i+1}}{e_i}.$$

Avec ces notations, on a, pour une transformation G définie sur $\mathfrak{D}_{n+1}$:

$$\varepsilon_i = e_i + (e_{i+1} - e_i) g(\rho_{i+1}, \dots, \rho_{i+n-1}).$$

2-1. Etude de suites à convergence linéaire

Considérons les suites convergentes possédant les propriétés suivantes : à partir d'un certain rang $\Delta S_i \neq 0$ et ρ_i, r_i tendent vers une même limite finie $\rho \neq 1$ (le cas de convergence logarithmique est donc exclu). D'après le théorème 2, une transformation G définie sur $\mathfrak{D}_{n+1}$ est régulière pour de telles suites.

Notons $\mathcal{G}_{n-1}$ le sous-ensemble de $\mathbf{R}^{n-1}$ tel que :

$$X = (X_1 \dots X_{n-1}) \in \mathcal{G}_{n-1} \quad \Leftrightarrow \quad \forall i, X_i \neq 0 \quad \text{et} \quad |X_i| > 1.$$

Théorème. Une C.N.S. pour qu'une transformation G ait la propriété d'accélération de convergence est que la fonction g associée, définie sur $\mathcal{G}_{n-1}$ vérifie :

$$g(\rho, \rho, \dots \rho) = \frac{1}{1 - \rho} \qquad \forall \rho.$$

Démonstration. La condition d'accélération de convergence s'écrit :

$$\lim_{i \to \infty} \frac{\varepsilon_i}{e_i} = 0 \text{ c.a.d. : } \lim \left[1 + \left(\frac{e_{i+1}}{e_i} - 1\right) g(\rho_{i+1}, \dots, \rho_{i+n-1})\right] = 0.$$

La fonction g étant continue, cette condition devient, à la limite :

$$1 + (\rho - 1)\, g(\rho \dots \rho) = 0.$$

Réciproquement, si g est une fonction définie et continue sur $\mathcal{G}_{n-1}$, la condition $g(\rho, \dots, \rho) = \dfrac{1}{1 - \rho}$ donne à la fonction G associée la propriété d'accélération.

REMARQUE. Les suites d'ordre de convergence supérieur à 1

$$\left(\lim \frac{S_{n+1} - S_n}{S_n - S_{n-1}} = 0\right)$$

ne pourront être accélérées par de telles transformations car la transformation g n'est pas définie en $(0, 0 \dots 0)$.

2-2. Ordre de convergence de la suite transformée

Soit G une transformation possédant la propriété d'accélération. Toute suite (S_i) à convergence linéaire est transformée par G en (T_i) telle que :

$$\lim_{i \to \infty} \frac{T_i - S}{S_i - S} = 0.$$

En général on ne peut rien dire sur l'ordre de convergence de la suite (T_i).

En effet :

$$\frac{T_{i+1} - S}{T_i - S} = \frac{e_{i+1} + (e_{i+2} - e_{i+1}) g(\rho_{i+2} \dots \rho_{i+n})}{e_i + (e_{i+1} - e_i) g(\rho_{i+1} \dots \rho_{i+n-1})}$$

$$= \frac{e_{i+1}}{e_i} \, \frac{1 + \left(\dfrac{e_{i+2}}{e_{i+1}} - 1\right) g(\rho_{i+2} \dots \rho_{i+n})}{1 + \dfrac{e_{i+1}}{e_i} - 1 \;\; g(\rho_{i+1} \dots \rho_{i+n-1}}.$$

Ce rapport se présente, à la limite sous la forme $\frac{0}{0}$.

On doit faire des hypothèses supplémentaires pour lever l'indétermination.

Définition. Une transformation G possède la propriété *d'accélération de degré k* si :

$$\lim_{i \to \infty} \frac{G(S_i, S_{i+1} \dots S_{i+n}) - S}{(S_i - S)^{k+1}} = M.$$

Propriété. Soit G une transformation possédant la propriété d'accélération de degré k et (S_i) une suite à convergence linéaire $\left(\lim_{i \to \infty} \frac{S_{i+1} - S}{S_i - S} = \rho \neq 0\right)$.

On a alors : $\lim \frac{G(S_{i+1} \dots S_{i+n+1}) - S}{G(S_i \dots S_{i+n}) - S} = \frac{M(S_{i+1} - S)^{k+1}}{M(S_i - S)^{k+1}} = \rho^{k+1}$.

La suite transformée est donc aussi à convergence linéaire et sa constante asymptotique d'erreur est ρ^{k+1}.

2-3. Etude de suites définies par récurrence.

Théorème. Si la suite (S_i), à convergence linéaire, de limite S, est telle que $e_{i+1} = f(e_i)$ (f étant une fonction suffisamment dérivable), il existe g (fonction de $(n - 1)$ variables, suffisamment dérivable) telle que la transformation G associée possède la propriété d'accélération de degré k.

La démonstration est basée sur le fait qu'on peut écrire :

$$G(S_i, \dots, S_{i+n}) - S = e_i + (e_{i+1} - e_i) g(\rho_{i+1} \dots \rho_{i+n-1}) = F(e_i).$$

Imposer à G de posséder la propriété d'accélération de degré k revient à imposer :

$$F(0) = F'(0) = \dots = F^{(k)}(0) = 0.$$

Chacune de ces conditions correspond à une condition sur les dérivées $i^{\text{èmes}}$ de la fonction g, qui se trouve ainsi déterminée.

Si on explicite les premières conditions ($F'(0) = 0$, $F''(0) = 0$), on trouve :

$F'(0) = 0 \rightarrow$ $\boxed{1 + (\rho - 1) g(\rho \dots \rho) = 0}$ Propriété d'accélération de degré 1.

$F''(0) = 0 \rightarrow$ $\boxed{g'_{x_1} + \rho g'_{x_2} + \dots + \rho^{n-2} g'_{x_{n-1}} = \frac{1}{(\rho - 1)^2 (\rho + 1)}}$

Propriété d'accélération de degré 2.

(On a noté $g'_{x_i} = g'_{x_i}(\rho \dots \rho)$.)

La propriété d'accélération de degré 3 devient complexe à expliciter car elle fait intervenir les dérivées secondes de g et les quantités $f'(0)$, $f''(0)$, $f'''(0)$.

REMARQUES.

1) La fonction f (telle que $e_{i+1} = f(e_i)$) est en général inconnue. Pour déterminer une transformation G possédant la propriété d'accélération de degré n, il faut avoir préalablement estimé les quantités $f'(0), f''(0) \ldots f^{(n)}(0)$. (Ceci est valable pour $n > 2$, car dans le cas $n = 2$, il est inutile d'avoir $f''(0)$.) On ne peut estimer $f^{(n)}(0)$ qu'avec $(n + 2)$ éléments successifs. Il est donc possible de construire des transformations G à $(n + 1)$ variables, possédant la propriété d'accélération de degré $(n - 1)$.

2) La propriété d'accélération de degré 2 est intéressante car c'est une condition sur la fonction g faisant intervenir uniquement la quantité ρ (il se trouve que $= f''(0)$ est éliminé). Il est facile de déterminer des fonctions possédant cette propriété.

REFERENCES

B. GERMAIN-BONNE, *Transformations de suites*, Colloque d'Analyse Numérique, Épinal, juin 1972.

R. PENNACCHI, *Le transformazioni razionale di una successione*, Calcolo, 1968, 5, p. 37-50.