REVUE FRANÇAISE D'AUTOMATIQUE INFORMATIQUE RECHERCHE OPÉRATIONNELLE. MATHÉMATIQUE

MAURICE GAULTIER

# Brève communication. Une équation du second ordre

*Revue française d'automatique informatique recherche opérationnelle. Mathématique*, tome 7, nº R1 (1973), p. 76-83

<http://www.numdam.org/item?id=M2AN_1973__7_1_76_0>

R.A.I.R.O.
(6e année, décembre 1972, R-3, p. 76-83)

# UNE EQUATION DU SECOND ORDRE

par Maurice GAULTIER (1)

Résumé. — *Nous résolvons, dans un certain sens, l'équation du second ordre*

$$\frac{d^2u}{dt^2} \in Au + Mu + f$$

*sous les conditions* $u(0) = u_0 \in D(A)$ *et* $u'(T) = 0$ *(T fini > 0)** où A est un opérateur (multivoque) maximal monotone dans un espace de Hilbert H et M un opérateur univoque.*

## NOTATIONS ET DONNEES

Soient $H$ un espace de Hilbert réel et $T$ un nombre $> 0$ fini. Le produit scalaire et la norme dans $H$ sont respectivement désignés par $(,)$ et $|\ |$.

On note :

. $L^2(0, T; H)$ l'espace des classes de fonctions $t \mapsto f(t)$ de $]0, T[$ dans $H$, mesurables et telles que : $\int_0^T |f(t)|^2 \, dt < +\infty$. $L^2(0, T; H)$ est un espace de Hilbert pour le produit scalaire $((f, g)) = \int_0^T (f(t), g(t)) \, dt$. La norme associée est $\|f\| = \left(\int_0^T |f(t)|^2 \, dt\right)^{1/2}$

. $\mathcal{H}^{2,2}(0, T; H) = \{ u \mid u \in L^2(0, T; H) \text{ et } \frac{d^2u}{dt^2} \in L^2(0, T; H) \}$

On se donne :

1) Un sous-ensemble $A$ de $H \times H$, maximal monotone. On désigne encore par $A$ la multiplication associée. Adoptant les notations de [2], pour chaque

(1) U.E.R. de Mathématiques et Informatique, Talence.

$n \in \mathbf{N}^*$ nous désignons par $A_n$ et $J_n$ respectivement l'approximation de Yosida et le résolvant de $A$.

2) Un opérateur (univoque) $M$, non linéaire de $L^2(0, T; H)$ dans $L^2(0, T; H)$.

3) Un opérateur noté $D_2$ défini de la façon suivante :

$$\mathfrak{D}(D_2) = \{ u \mid u \in \mathcal{H}^{2,2}(0, T; H); u(0) = 0, u'(T) = 0 \}$$

$$D_2 u = \frac{d^2 u}{dt^2} \text{ quelque soit } u \in \mathfrak{D}(D_2)$$

4) Une contraction $R$ de $H$ et pour chaque $n \in \mathbf{N}^*$ nous posons

$$\Phi_n = n(I - R)$$

Alors $\Phi_n$ est monotone et de Lipschitz.

## RESULTATS PRELIMINAIRES

**Proposition 1.** $\mathfrak{D}(D_2)$ est dense dans $L^2(0, T; H)$ et pour chaque $\lambda > 0$ l'opérateur $(\lambda - D_2)^{-1}$ est partout défini dans $L^2(0, T; H)$ et de norme moindre que $\dfrac{1}{\lambda + T^{-2}}$

*Démonstration.*

1) La densité est évidente.

2) Pour chaque $u \in \mathfrak{D}$ $(D_2)$ on vérifie facilement que

$$((D_2 u, u)) = -\frac{1}{T^2} \|u\|^2$$

3) Le problème

$$\lambda u - \frac{d^2 u}{dt^2} = f \text{ pour } f \text{ donné dans } L^2(0, T; H)$$

$$u(0) = 0$$

$$u'(T) = 0$$

a pour chaque $\lambda \in \mathbf{C}$ tel que $R_e \lambda > 0$ UNE et UNE SEULE solution que nous écrivons : $u = (\lambda - D_2)^{-1} f$.

4) Soit $\lambda > 0$ alors :

$$(\lambda - D_2)^{-1} f = u \Leftrightarrow u \in \mathfrak{D}(D_2) \text{ et } f = \lambda u - D_2 u$$

De ceci on déduit aussitôt que : $(\lambda + T^{-2}) \|u\| \leqslant \|f\|$ et ensuite que : quel que soit $\lambda > 0$ : $\|(\lambda - D_2)^{-1}\| \leqslant \dfrac{1}{\lambda + T^{-2}}$

REMARQUE. Les résultats précédents prouvent que $D_2$ est le générateur infinitésimal d'un demi groupe linéaire sur $L^2(0, T; H)$ de domaine $\mathfrak{D}(D_2)$.

**Proposition 2.** Pour $u_0$ et $u_1$ donnés dans $H$, $f$ donné dans $L^2(0, T; H)$ et pour $\mu T^2 < 1$ il existe UNE et UNE SEULE fonction $u$ telle que

$$\frac{d^2u(t)}{dt^2} = \Phi_n(u(t)) + Mu(t) + f(t) \text{ p. p. } t \in ]0, T[ \tag{1}$$

$$u(o) = u_0 \text{ et } u'(T) = u_1$$

De plus l'application : $t \rightarrow \Phi_n(u(t))$ est de Lipschitz sur $[0, T]$.

*Démonstration*

Nous allons nous ramener aux conditions $v(0) = 0$ et $v'(T) = 0$ en posant $v(t) = u(t) - u_0 - u_1 t = u(t) - \alpha(t)$.

Le problème à résoudre est alors le suivant : trouver $v \in \mathfrak{D}(D_2)$ et tel que pour presque tout $t \in ]0, T[$ :

$$\frac{d^2v(t)}{dt^2} = n(1 - R)(v(t) + \alpha(t)) + M(v(t) + \alpha(t)) + f(t)$$

Soit encore : $v \in \mathfrak{D}(D_2)$ et pour presque tout $t \in ]0, T[$ :

$$(n - D_2)v(t) = nR(v(t) + \alpha(t)) - n\alpha(t) - M(v(t) + \alpha(t)) - f(t)$$

L'application suivante de $L^2(0, T; H)$ dans $\mathfrak{D}(D_2)$ :

$$S : v \mapsto Sv = n(n - D_2)^{-1} R(v + \alpha) - n(n - D_2)^{-1}\alpha$$
$$- (n - D_2)^{-1}[M(v + \alpha) + f]$$

admet un point fixe UNIQUE; en effet : quels que soient les éléments $v$ et $w$ de $L^2(0, T; H)$ nous vérifions que :

$$\|Sv - Sw\| \leqslant \frac{n + \mu}{n + T^{-2}} \|v - w\|$$

et grâce à l'hypothèse $\mu T^2 < 1$; l'application $S$ est une contraction STRICTE.

REMARQUE. Si $\mu = 0$ ($M$ opérateur nul) alors l'équation (1) admet une solution et une seule répondant aux conditions $u(0) = u_0$ et $u'(T) = u_1$ comme on le vérifie aisément (utiliser la monotonie de $\Phi_n$).

## RESULTAT ESSENTIEL

**Théorème.** Sous la condition $\mu T^2 < 1$, pour chaque $f$ donné dans $L^2(0, T; H)$ et pour chaque $u_0$ donné dans $D(A)$; il existe AU MOINS une fonction $u \in L^\infty(0, T; H) \cap H^{2,2}(0, T; H)$ et telle que

$$(2) \qquad \begin{cases} u(t) \in D(A) \text{ p. p. sur } ]0, T[ \\ \dfrac{d^2u(t)}{dt} \in Au(t) + Mu(t) + f(t) \text{ p. p. } t \in ]0, T[ \\ u(0) = u_0 \text{ et } u'(T) = 0 \end{cases}$$

*Démonstration*

La méthode que nous utilisons a déjà été employée dans [3]. Nous considérons l'approximation de Yosida $A_n$ de $A (n \in \mathbf{N}^*)$ et nous résolvons, grâce à la proposition 2, l'équation :

$$(3) \qquad \frac{d^2u_n(t)}{dt} = A_n u_n(t) + Mu_n(t) + f(t) \text{ p. p. } t \in ]0, T[$$

$$\text{avec} \qquad u_n(0) = u_0 \text{ et } u'_n(T) = 0$$

### 1) Estimations a priori

Nous allons montrer que la suite $\{ u_n \}$ est bornée dans $L^\infty(0, T; H)$ et que la suite $\left\{ \dfrac{d^2u_n}{dt^2} \right\}$ est bornée dans $L^2(0, T; H)$. En effet de (3) nous déduisons

$$(4) \qquad \int_0^T \left| \frac{d^2u_n(t)}{dt^2} \right|^2 dt \leqslant \int_0^T |A^0 u| \left| \frac{d^2u_n(t)}{dt^2} \right| dt + \int_0^T |Mu_n(t)| \cdot \left| \frac{d^2u_n(t)}{dt^2} \right| dt + \int_0^T |f(t)| \cdot \left| \frac{d^2u_n}{dt^2} \right| dt$$

D'autre part

$$(5) \qquad |u_n(t)| \leqslant |u_0| + \int_0^t \left| \frac{du_n(\sigma)}{d\sigma} \right| d\sigma$$

et puisque : $\dfrac{du_n(t)}{dt} = - \displaystyle\int_t^T \frac{d^2u_n(\sigma)}{d\sigma^2} d\sigma$; nous déduisons :

$$(6) \qquad \left| \frac{du_n(t)}{dt} \right| \leqslant \sqrt{T-t} \left( \int_0^T \left| \frac{d^2u_n(t)}{dt^2} \right|^2 dt \right)^{1/2}$$

Grâce à (5) :

$$|u_n(t)| \leqslant |u_0| + \frac{2}{3}[T^{3/2} - (T-t)^{3/2}]^2 \left\|\frac{d^2u_n}{dt^2}\right\| \tag{7}$$

De (7) résulte aussitôt

$$\int_0^T |u_n(t)|^2 \, dt \leqslant 2T|u_0|^2 + \frac{2}{5}T^4 \left\|\frac{d^2u_n}{dt^2}\right\|^2 \tag{8}$$

De (4) et (8) nous déduisons :

$$\int_0^T \left|\frac{d^2u_n(t)}{dt^2}\right|^2 dt \leqslant \int_0^T |A^0u_0| \left|\frac{d^2u_n(t)}{dt^2}\right| dt + \int_0^T |f(t)| \left|\frac{d^2u_n(t)}{dt^2}\right| dt + \mu\left(2T|u_0|^2 + \frac{2}{5}T^4 \left\|\frac{d^2u_n}{dt^2}\right\|^2\right)^{1/2} \left\|\frac{d^2u_n}{dt^2}\right\|$$

Soit encore :

$$\int_0^T \left|\frac{d^2u_n(t)}{dt^2}\right|^2 dt \leqslant \int_0^T |A^0u_0| \left|\frac{d^2u_n}{dt^2}\right| dt + \int_0^T |f(t)| \cdot \left|\frac{d^2u_n(t)}{dt^2}\right| dt + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{5}\mu^2T^4\right)\int_0^T \left|\frac{d^2u_n(t)}{dt^2}\right|^2 dt + \mu^2T|u_0|^2$$

Grâce à la condition $\mu T^2 < 1 : \frac{1}{2} + \frac{1}{5}\mu^2T^4 < \frac{7}{10}$ et donc :

$$\frac{3}{10}\int_0^T \left|\frac{d^2u_n(t)}{dt^2}\right|^2 dt \leqslant \mu^2T|u_0|^2 + \int_0^T |A^0u_0| \left|\frac{d^2u_n(t)}{dt^2}\right| dt + \int_0^T |M^0| \left|\frac{d^2u_n(t)}{dt^2}\right| dt + \int_0^T |f(t)| \cdot \left|\frac{d^2u_n(t)}{dt^2}\right| dt \tag{9}$$

L'inégalité (9) nous montre que la suite $\left\{\frac{d^2u_n}{dt^2}\right\}$ est bornée dans $L^2(0, T; H)$ et grâce à (7) que la suite $\{u_n\}$ est bornée dans $L^\infty(0, T; H)$. Compte tenu des propriétés de l'opérateur $M$ la suite $\{Mu_n\}$ est bornée dans $L^2(0, T; H)$; et résulte ALORS de (3) que la suite $\{A_nu_n\}$ est bornée dans $L^2(0, T; H)$.

**2) La suite $\{u_n\}$ est de Cauchy dans $L^2(0, T; H)$**

Nous avons en effet

$$|u_n(t) - u_m(t)|^2 \leqslant t\int_0^t |u_n'(\sigma) - u_n'(\sigma)|^2 \, d\sigma \tag{10}$$

Mais d'autre part, pour presque tout $t \in ]0, T[$

$$\frac{d^2}{dt^2}(u_n(t) - u_m(t)) = (A_n u_n(t) - A_m u_m(t)) + \mu(u_n(t) - u_m(t))$$

Nous déduisons alors

$$\frac{d^2}{dt^2}|u_n(t) - u_n(t)|^2 = 2\left|\frac{d}{dt}(u_n(t) - u_m(t))\right|^2 + 2(\mu(u_n(t) - u_n(t)), u_n(t) - u_n(t))$$

$$(11) \qquad + 2(A_n u_n(t) - A_m u_m(t), u_n(t) - u_m(t))$$

et par un calcul analogue à celui fait dans [2] page 389 :

$$(A_n u_n(t) - A_m u_m(t), u_n(t) - u_m(t)) \geqslant (A_n u_m(t) - A_m u_m(t), \frac{1}{n} A_n u_n(t) - \frac{1}{m} A_m u_m(t))$$

Compte tenu de ceci (11) nous donne

$$\int_0^t \left|\frac{d}{d\sigma}(u_n(\sigma) - u_m(\sigma))\right|^2 d\sigma \leqslant \frac{1}{2}\int_0^t \frac{d}{d\sigma}\left(\frac{d}{d\sigma}|u_n(\sigma) - u_m(\sigma)|^2\right) d\sigma$$

$$(12) \qquad + K\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{m}\right) + \int_0^t |Mu_n(\sigma) - Mu_m(\sigma)| \cdot |u_n(\sigma) - u_m(\sigma)| \, d\sigma$$

$K$ est une constante indépendante de $n$ et de $m$.

Comme d'autre part on a (10), nous déduisons de (12)

$$|u_n(t) - u_m(t)|^2 \leqslant t(u_n'(t) - u_m'(t), u_n(t) - u_m(t)) + Kt\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{m}\right)$$

$$(13) \qquad + \mu t \int_0^T |u_n(\sigma) - u_m(\sigma)|^2 \, d\sigma$$

(12) et (13) nous donnent alors :

$$\int_0^T |u_n(t) - u_m(t)|^2 \, dt \leqslant \frac{T}{2}|u_n(T) - u_m(T)|^2 - \frac{1}{2}\int_0^T |u_n(t) - u_m(t)|^2 \, dt$$

$$(14) \qquad + \frac{KT^2}{2}\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{m}\right) + \mu \frac{T^2}{2}\int_0^T |u_n(t) - u_m(t)|^2 \, dt$$

Utilisons (13) pour $t = T$ et compte tenu de l'hypothèse

$$u_n'(T) = u_m'(T) = 0$$

il vient :

$$|u_n(T) - u_m(T)|^2 \leqslant KT\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{m}\right) + \mu T \int_0^T |u_n(t) - u_n(t)|^2 \, dt \tag{15}$$

Enfin en portant dans (14)

$$\left(\frac{3}{2} - \mu T^2\right) \int_0^T |u_n(t) - u_m(t)|^2 \, dt \leqslant KT^2 \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{m}\right)$$

**3) Passage à la limite**

Compte tenu des estimations a priori précédentes et des propriétés de l'opérateur $M$ nous pouvons supposer que si $n \to \infty$

$u_n \to u$ dans $L^\infty(0, T; H)$ faible*

$u_n \to u$ dans $L^2(0, T; H)$ fort

$u_n(t) \to u(t)$ dans $H$ fort p.p. $t \in ]0, T[$

$Mu_n(t) \to Mu(t)$ dans $H$ faible p.p. $t \in ]0, T[$

$\dfrac{d^2u_n}{dt^2} \to \dfrac{d^2u}{dt^2}$ dans $L^2(0, T; H)$ faible

$A_n u_n \to \chi$ dans $L^2(0, T; H)$ faible

Nous posons ensuite, comme dans [3].

$\mathcal{A} = \{ [u, v] \in L^2(0, T; H) \times L^2(0, T; H), u(t) \in D(A)$

et $v(t) \in Au(t)$ p. p. $t \in ]0, T[$

$\mathcal{F}_n = (1 + n^{-1}\mathcal{A})^{-1}$ et $\mathcal{A}_n = n(1 - \mathcal{F}_n) \ \forall \ n \in \mathbb{N}^*$

$\mathcal{A}$ est maximal monotone dans $L^2(0, T; H) \times L^2(0, T; H)$ et par une technique en tout point analogue à celle de [3] nous montrons que :

$u(t) \in D(A)$ et $\chi(t) \in Au(t)$ p.p. $t \in ]0, T[$ et :

$\dfrac{d^2u(t)}{dt^2} \in Au(t) + Mu(t) + f(t)$ p. p. $t \in ]0, T[$

$u(o) = u_0 \; ; u'(T) = 0$

**Corollaire.** Lorsque $\mu = 0$ ($M$ opérateur nul); l'équation (2) a une solution UNIQUE répondant aux conditions $u(0) = u_0$ et $u'(T) = 0$.

L'existence découle du théorème précédent (puisque la condition $\mu T^2 < 1$ est alors vérifiée), l'unicité se démontre immédiatement grâce à la monotonie de $A$.

EXEMPLE. Soient $K$ un convexe fermé de $H$; $\Psi_K$ sa fonction indicatrice et $\partial\Psi_K$ le sous-différentiel de $\Psi_K$; on sait (voir par exemple [4] que $\partial\Psi_K$ est maximal monotone. Nous supposons que quelque soit $\lambda > 0$; $(1 + \lambda A)^{-1}K \subset K$ alors $A + \partial\Psi_K$ est aussi maximal monotone [1]. Appliquons le théorème : pour chaque $f \in L^2$ $(0, T; H)$ il existe $u$ et $w$ tels que pour presque tout $t \in ]0, T[$ :

$$u(t) \in D(A) \cap K; \; w(t) \in Au(t) \text{ et}$$

$$(u''(t) - w(t) - Mu(t), v - u(t)) \leqslant (f(t), v - u(t)) \; \forall \, v \in K$$

avec $u(0) = u_0$ élément donné de $D(A) \cap K$ et $u'(T) = 0$.

## BIBLIOGRAPHIE


[1] F. E. BROWDER, *Nonlinear maximal monotone operators in Banach spaces*, Math. Annalen, (1958), 175, 89-113.

[2] M. CRANDALL et A. PAZY, *Semi groups of nonlinear contractions and dissipative sets*, Journal of functional analysis (1969), 3, 376-418.

[3] M. GAULTIER, *Résolution d'une équation non linéaire*, C.R.A.S., janvier 1972, tome 274, p. 332-334.

[4] J. J. MOREAU, *Fonctionnelles convexes.* Cours du collège de France (1966-1967).

** M. Viorel BARBU a résolu (voir C.R.A.S. tome 274, p. 459-462, février 1972) l'équation $\frac{d^2u}{dt^2} \in A\,u$ avec les conditions $u(0) = a$, $u(T) = b$ où $A$ est un opérateur maximal monotone dans l'espace de Hilbert $H$.