

VALERIU PREPILITA

**Applications entrée-sortie sur un corps fini**

*Revue française d'automatique informatique recherche opérationnelle. Mathématiques*, tome 6, n° R3 (1972), p. 3-21

[http://www.numdam.org/item?id=M2AN\\_1972\\_\\_6\\_3\\_3\\_0](http://www.numdam.org/item?id=M2AN_1972__6_3_3_0)

© AFCET, 1972, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Revue française d'automatique informatique recherche opérationnelle. Mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

## APPLICATIONS ENTREE-SORTIE SUR UN CORPS FINI

par Valeriu PREPELITA (1)

Résumé. — On étudie les systèmes linéaires discrets décrits par une application entrée-sortie, par une fonction de transfert ou par des équations d'état et de sortie, sur un corps fini. Cette étude est justifiée par ses applications dans la théorie des codes.

On obtient la caractérisation de toutes les applications entrée-sortie  $f$ , à l'aide de certains invariants  $q$ ,  $T$  et  $\alpha_s$ .

On donne une relation directe entre la forme de l'application entrée-sortie, sa fonction de transfert et une réalisation. Dans le cas où l'espace des entrées ou des sorties est unidimensionnel, une réalisation minimale est obtenue directement à l'aide des invariants de  $f$ .

Quand les espaces des entrées et des sorties sont multidimensionnels, la réalisation obtenue avec les invariants de l'application n'est pas minimale ; on donne un algorithme pour la détermination d'une réalisation minimale. Avec une modification non importante, cet algorithme peut être utilisé même dans le cas des corps commutatifs quelconques.

### 1. Introduction

Nous allons utiliser certaines notions introduites par R. Kalman dans [3], [4], [5].

#### a) Description externe des systèmes linéaires.

Soient  $K$  un corps commutatif,  $U = K^m$  l'espace des entrées,  $Y = K^p$  l'espace des sorties,  $\Omega = K^m[z]$  l'ensemble des séquences d'entrée.

On appelle *application entrée-sortie* un  $K$ -homomorphisme  $f : \Omega \rightarrow Y$ . Donc, la sortie au moment  $t = 1$ ,  $y(1) = f(u)$  correspond par  $f$  à la séquence des entrées terminée au moment  $t = 0$ ,  $(u(-v), u(-v + 1), \dots, u(0))$ , écrite comme un polynôme  $u = \sum_{s=0}^{\infty} u(-s)z^s$ .

#### b) Description interne

Un système linéaire est un triplet  $\Sigma = (F, G, H)$  de matrices sur  $K$  de type  $n \times n$ ,  $n \times m$ ,  $p \times n$  respectivement.

---

(1) Institutul Politehmic Bucuresti, Facultatea Transporturi.

Les équations du système sont :

$$\begin{aligned}x(t+1) &= Fx(t) + Gu(t), \\ y(t) &= Hx(t)\end{aligned}$$

où  $x(t) \in X = K^n$  (l'espace des états),

$$u(t) \in U, \quad y(t) \in Y.$$

Si la séquence des entrées est  $u(-v), u(-v+1), \dots, u(0)$ , la sortie au moment  $t = 1$  sera  $y(1) = \sum_{s=0}^v HF^s GU(-s)$ ; donc, l'application  $f_{\Sigma}$ , définie par  $f_{\Sigma} \left( \sum_{s=0}^v u(-s)z^s \right) = \sum_{s=0}^v HF^s Gu(-s)$  correspond naturellement au système  $\Sigma$ , associant la sortie à une entrée donnée.

Le système  $\Sigma$  est une réalisation de l'application  $f$  si  $f = f_{\Sigma}$ .

c) *Fonction de transfert*

$\Omega$  est un  $K[z]$  — module libre pour la loi de composition externe

$$\pi(z) \cdot \begin{bmatrix} u_1(z) \\ \vdots \\ u_m(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \pi(z)u_1(z) \\ \vdots \\ \pi(z)u_m(z) \end{bmatrix};$$

un système de générateurs est

$$e_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \leftarrow i$$

$\Gamma = K^p[[z^{-1}]]$  est un  $K(z)$  — module, avec la loi de composition externe

$$\left( \sum_{s=0}^v a_s z^s \right) \left( \sum_{i \geq 0} b_i \frac{1}{z^{i+1}} \right) = \sum_{i \geq 0} c_i \frac{1}{z^{i+1}}, \text{ avec } c_i = \sum_{j=0}^v a_j b_{i+j}$$

(donc le produit d'un polynôme avec une série formelle, suivi par l'écart des puissances non-négatives de  $z$ ).

L'application  $f$  détermine un  $K[z]$  — homomorphisme

$$\begin{aligned} \bar{f}: \Omega &\longrightarrow \Gamma \\ u &\longrightarrow \sum_{s \geq 0} f(z^s u) \frac{1}{z^{s+1}}, \end{aligned}$$

Considérons le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \Omega & \xrightarrow{\bar{f}} & \Gamma \\ & \searrow_{\varphi} \Omega / \text{Ker} \bar{f} \nearrow_{\gamma} & \end{array}$$

Le module quotient  $X_f = \Omega / \text{Ker} \bar{f}$  est l'ensemble des états de l'application  $f$ .  
Donc  $f$  a une réalisation de dimension finie  $\Leftrightarrow \dim_K X_f$  est finie  $\Leftrightarrow \text{Ker} \bar{f} = (0)$ .

Dans ce cas,  $X_f$  est un module de torsion; soit  $(\pi(z))$  son annulateur.

Alors

$$\pi(z) \cdot \bar{f}(e_i) = \bar{f}(\pi(z) \cdot e_i) = \psi[\pi(z)\varphi(e_i)] = 0 \in \Gamma.$$

donc

$$\pi(z)\bar{f}(e_i) = \theta_i(z) \in K^p[z], \text{ degré } \theta_i < \text{ degré } \pi.$$

La fonction de transfert du système est la matrice

$$Z = [\theta_1(z)/\pi(z) \dots \theta_m(z)/\pi(z)],$$

où  $\bar{f}(e_i) = \theta_i(z)/\pi(z)$ , développée en série formelle en  $z^{-1}$ .

On vérifie aisément que  $Z = H(zI - F)^{-1}G$ , si  $\Sigma = (F, G, H)$  est une réalisation de l'application  $f$ .

Dans ce qui suit, nous considérons  $K$  un corps fini et les applications  $f$  avec la propriété :  $\text{Ker} \bar{f} \neq (0), \text{Ker} \bar{f} \neq \Omega$ .

## 2. Applications entrée-sortie $f : K[z] \rightarrow K$

### Théorème 1

Soit  $f : K[z] \rightarrow K$  une application entrée-sortie linéaire.

a) Alors  $\exists q \geq 0, T \geq 0; \alpha_s \in K, s = 0, 1, \dots, T + q - 1$  telles que

$$f \left( \sum_{s \geq 0} a_s z^s \right) = \sum_{s=0}^{q-1} a_s \alpha_s + \sum_{i \geq 0} \sum_{s=0}^{T-1} a_{iT+s+q} \alpha_{s+q}, \forall \sum_{s \geq 0} a_s z^s \in K[z]. \quad (1)$$

b) La fonction de transfert correspondante est la fraction irréductible définie par

$$Z = \sum_{s=0}^{q-1} \alpha_s \frac{1}{z^{s+1}} + \frac{\sum_{s=0}^{T-1} \alpha_{T+q-s-1} z^s}{z^q(z^T - 1)} = \sum_{s=0}^{q-1} \alpha_s \frac{1}{z^{s+1}} + \frac{\sum_{s=0}^{n-1} \gamma_s z^s}{z^q \left( z^n + \sum_{s=0}^{n-1} \beta_s z^s \right)} \quad (2)$$

c) Une réalisation minimale de l'application  $f$  est

$\Sigma = (F, G, H)$ , avec

$$(3) F = \begin{bmatrix} F_{11} & 0_1 \\ F_{21} & F_{22} \end{bmatrix} \quad G = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{bmatrix} (n+q) \times 1, \quad H = [\alpha_0 \alpha_1 \dots \alpha_{n+q-1}],$$

où

$$F_{11} = \begin{bmatrix} 00 & \dots & 00 \\ 10 & \dots & 00 \\ 01 & \dots & 00 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ 00 & \dots & 10 \end{bmatrix} q \times q, \quad F_{22} = \begin{bmatrix} 00 & \dots & 0 & -\beta_0 \\ 10 & \dots & 0 & -\beta_1 \\ 01 & \dots & 0 & -\beta_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 00 & \dots & 1 & -\beta_{n-1} \end{bmatrix} n \times n$$

$$F_{21} = \begin{bmatrix} 00 & \dots & 01 \\ 00 & \dots & 00 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ 00 & \dots & 00 \end{bmatrix} n \times q, \quad 0_1 \text{ matrice nulle } q \times n,$$

$\beta_i \in K$  étant définis dans (2).

**Observation.** Dans le cas  $q = 0 (T = 0)$ , nous prenons  $\sum_{s=0}^{q-1} = 0 \left( \sum_{s=0}^{T-1} = 0 \right)$  et nous considérons absentes (vides) les matrices ayant une dimension  $q (T)$ .

*Démonstration*

Pour  $u = \sum_{s=0}^v a_s z^s \in K[z]$ , nous allons écrire  $u = \sum_{s=0}^q a_s z^s$  où  $a_s = 0 \forall s > v$ .

(1)  $\text{Ker} \bar{f}$  est un idéal de  $K[z]$ , donc est engendré par un polynôme unitaire  $\pi(z)$ .

Soit  $\pi(z) = z^q \sigma(z)$ ,  $(\sigma(z), z) = 1$ .

Si  $\sigma(z) = 1$ , alors  $\text{Ker} \bar{f} = (z^q)$  donc  $f(z^{q+s}) = 0 \forall s \geq 0$ ,

donc  $f \left( \sum_{s \geq 0} a_s z^s \right) = \sum_{s=0}^{q-1} a_s \alpha_s$  et  $T = 0$ .

$K$  est un corps fini, donc il existe  $T \geq 1$ , tel que  $\sigma(z) \mid z^T - 1$  ( $T$  est l'exposant du  $\sigma(z)$ , [1], [6]).

Si

$$\sigma(z) \neq 1, z^q \sigma(z) \mid z^q (z^T - 1),$$

donc

$$z^{T+q} - z^q \in \text{Ker} \bar{f}$$

donc

$$\bar{f}(z^{T+q}) = \bar{f}(z^q),$$

donc

$$f(z^{lT+q+s}) = f(z^{lq+s}), s = 0, 1, \dots, T-1; l \geq 0.$$

Alors

$$\begin{aligned} f\left(\sum_{s \geq 0} a_s z^s\right) &= \sum_{s \geq 0} a_s f(z) = \\ &= \sum_{s=0}^{q-1} a f(z^s) + \sum_{l \geq 0} \sum_{s=0}^{T-1} a_{lT+q+s} f(z^{q+s}) = \\ &= \sum_{s=0}^{q-1} a_s \alpha_s + \sum_{l \geq 0} \sum_{s=0}^{T-1} a_{lT+q+s} \alpha_{q+s}, \end{aligned}$$

où

$$\alpha_s = f(z^s), s = 0, 1, \dots, T+q-1.$$

Si  $q = 0, f(z^{lT+s}) = f(z^s), s = 0, 1, \dots, T-1, l \geq 0$

donc

$$f\left(\sum_{s \geq 0} a_s z^s\right) = \sum_{s \geq 0} \sum_{s=0}^{T-1} a_{lT+s} \alpha_s.$$

(2) La fonction de transfert est

$$Z = \bar{f}(1) = \theta(z)/\pi(z) \text{ fraction irréductible, degré } \theta < \text{ degré } \pi.$$

Si  $\pi(z) = z^q$ , alors  $f(z^{q-1}) \neq 0$  et  $f(z^{q+s}) = 0, \forall s \geq 0$  donc

$$Z = \bar{f}(1) = \alpha_0 \frac{1}{z} + \dots + \alpha_{q-1} \cdot \frac{1}{z^q}$$

Si  $\sigma(z) \neq 1$

$$\begin{aligned} \bar{f}(1) &= \sum_{s \geq 0} f(z^s) \cdot \frac{1}{z^{s+1}} = \alpha_0 \frac{1}{z} + \alpha_1 \frac{1}{z^q} + \dots + \alpha_{q-1} \frac{1}{z^q} + \\ &+ \left( \alpha_q \frac{1}{z^q} + \alpha_{q+1} \frac{1}{z^{q+1}} + \dots + \alpha_{T+q-1} \frac{1}{z^{T+q-1}} \right) \\ &\left( \frac{1}{z} + \frac{1}{z^{T+1}} + \dots + \frac{1}{z^{lT+1}} + \dots \right) \end{aligned}$$

Mais  $\frac{1}{z} + \frac{1}{z^{T+1}} + \dots + \frac{1}{z^{T+1}} + \dots$  est le développement en série formelle

de la fraction  $\frac{z^{T-1}}{z^T - 1}$ .

Donc, la fonction de transfert est la fraction irréductible obtenue dans (2) par la simplification de

$$Z = \alpha_0 \frac{1}{z} + \dots + \alpha_{q-1} \frac{1}{z^q} + \frac{\alpha_q z^{T-1} + \dots + \alpha_{T+q-1}}{z^q(z^T - 1)}$$

(3) Les applications  $f$  et  $f_z$  étant des  $K$ -homomorphismes, on a  $f = f_z$  si et seulement si  $f(z^s) = f_z(z^s) = HF^s G, \forall s \geq 0$ .

I) Dans le cas  $\pi(z) = z^q$  ( $T = 0$ , donc  $n = 0$ ), la réalisation est

$$F = \begin{bmatrix} 00 & \dots & 00 \\ 10 & \dots & 00 \\ 01 & \dots & 00 \\ \dots & \dots & \dots \\ 00 & \dots & 10 \end{bmatrix} \quad G = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix} \quad H = [\alpha_0 \alpha_1 \dots \alpha_{q-1}].$$

En effet si  $s < q$ ,

$$F^s = \begin{bmatrix} 00 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 00 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 10 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 01 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 00 & \dots & 1 & \dots & 0 \end{bmatrix} \leftarrow s + 1, \quad \text{et} \quad F^q = 0$$

donc

$$HF^s G = [\alpha_0 \alpha_1 \dots \alpha_{q-1}] \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \alpha_s = f(z^s), \quad s < q$$

$$HFG = 0 = f(z^s), \quad s \geq q.$$

II) Supposons maintenant  $q = 0$ ; soit

$$\pi(z) = z^n + \beta_{n-1} z^{n-1} + \dots + \beta_1 z + \beta_0, \quad \beta_0 \neq 0.$$

Alors

$$F = \begin{pmatrix} 00 & \dots & 0 & -\beta_0 \\ 10 & \dots & 0 & -\beta_1 \\ 01 & \dots & 0 & -\beta_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 00 & \dots & 1 & -\beta_{n-1} \end{pmatrix} \quad G = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{pmatrix} \quad H = [\alpha_0 \dots \alpha_{n-1}].$$

$\pi(z)$  est le polynôme caractéristique de la matrice  $F$ , donc (théorème de Hamilton-Cayley)

$$F^n + \beta_{n-1}F^{n-1} + \dots + \beta_1F + \beta_0I = 0.$$

Nous devons considérer deux cas :

i)  $n = T$ , donc  $\pi(z) = z^T - 1$ ,

$$F = \begin{pmatrix} 00 & \dots & 01 \\ 10 & \dots & 00 \\ 01 & \dots & 00 \\ \dots & \dots & \dots \\ 00 & \dots & 10 \end{pmatrix}, \quad F^T = I.$$

Alors

$$f(z^{lT+s}) = HF^{lT+s}G = HF^sG = [\alpha_0 \dots \alpha_{T-1}] \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow s + 1 = \alpha_s = f(z^s)$$

$$\forall l \geq 0, \quad s = 0, 1, \dots, T-1.$$

ii)  $n < T$ .

La relation (2) devient ( $q = 0$ ) :

$$Z = \frac{\alpha_0 z^{T-1} + \dots + \alpha_{T-2}z + \alpha_{T-1}}{z^T - 1} = \frac{\gamma_{n-1}z^{n-1} + \dots + \gamma_1z + \gamma_0}{z^n + \beta_{n-1}z^{n-1} + \dots + \beta_1z + \beta_0}$$

De l'égalité

$$\begin{aligned} (\alpha_0 z^{T-1} + \dots + \alpha_{T-1})(z^n + \beta_{n-1}z^{n-1} + \dots + \beta_0) &= \\ &= (z^T - 1)(\gamma_{n-1}z^{n-1} + \dots + \gamma_0) \end{aligned}$$

nous obtenons :

$$\begin{aligned} \alpha_0 \beta_{n-k} + \alpha_1 \beta_{n-k+1} + \dots + \alpha_{k-1} \beta_{n-1} + \alpha_k &= \gamma_{n-k-1}, & 0 \leq k \leq n-1 \\ \alpha_k \beta_0 + \alpha_{k+1} \beta_1 + \dots + \alpha_{n+k-1} \beta_{n-1} + \alpha_{n+k} &= 0, & 0 \leq k \leq T-n-1 \\ \alpha_{T-n+k} \beta_0 + \dots + \alpha_{T-2} \beta_{n-k-2} + \alpha_{T-1} \beta_{n-k-1} &= -\gamma_{n-k-1} \\ &= \alpha_0 \beta_{n-k} - \alpha_1 \beta_{n-k+1} - \dots - \alpha_{k-1} \beta_{n-1} - \alpha_k & 0 \leq k \leq n-1. \end{aligned}$$

De (4) et (5) il en résulte que :

$$\begin{aligned} f_Z(1) &= HG = \alpha_0 \\ f_Z(z^k) &= HF^k C = \alpha_k & 0 \leq k \leq n-1 \\ f_Z(z^n) &= HF^n G = -\beta_{n-1} HF^{n-1} G - \dots - \beta_1 HFG - \beta_0 HG \\ &= -\beta_{n-1} \alpha_{n-1} - \dots - \beta_1 \alpha_1 - \beta_0 \alpha_0 = \alpha_n \\ f_Z(z^{n+k}) &= HF^{n+k} G = -\beta_{n-1} HF^{n+k-1} G - \dots - \beta_1 HF^{k+1} G - \beta_0 HF^k G \\ &= -\beta_{n-1} \alpha_{n+k-1} - \dots - \beta_1 \alpha_{k+1} - \beta_0 \alpha_k = \alpha_{n+k}, & 0 \leq k \leq T-n-1 \\ f_Z(z^{T+k}) &= HF^n F^{T-n+k} G = -\beta_{n-1} \alpha_{k-1} - \dots - \beta_1 \alpha_{T-n+k+1} \\ &\quad - \beta_0 \alpha_{T-n+k} = \alpha_k, & 0 \leq k \leq n \\ f_Z(z^{T+n+k}) &= -\beta_{n-1} \alpha_{n+k-1} - \dots - \beta_1 \alpha_{k+1} - \beta_0 \alpha_k = \alpha_{n+k} \\ & & 0 \leq k \leq T-n-1. \end{aligned}$$

Nous avons donc montré que

$$f_Z(z^{T+s}) = f_Z(z^s) = \alpha_s, \quad s = 0, 1, \dots, T-1.$$

Supposons que  $f_Z(z^{(l-1)T+s}) = f_Z(z^s) = \alpha_s, \quad s = 0, 1, \dots, T-1.$

$$\begin{aligned} \text{Alors } f_Z(z^{lT}) &= HF^{lT} G = HF^{(l-1)T+T-n} \cdot F^n G \\ &= -\beta_{n-1} HF^{(l-1)T+T-1} G - \dots - \beta_1 HF^{(l-1)T+T-n+1} G \\ &\quad - \beta_0 HF^{(l-1)T+T-n} G \\ &= -\beta_{n-1} \alpha_{T-1} - \dots - \beta_1 \alpha_{T-n+1} - \beta_0 \alpha_{T-n} = \alpha_0. \end{aligned}$$

On obtient successivement

$$\begin{aligned} f_Z(z^{lT+k}) &= HF^{(l-1)T+T-n+k} F^n G \\ &= -\beta_{n-1} \alpha_{k-1} - \dots - \beta_1 \alpha_{T-n+k+1} - \beta_0 \alpha_{T-n+k} = \alpha_k, \\ & & 0 \leq k \leq T-n-1 \end{aligned}$$

et

$$f_Z(z^{lT+n+k}) = -\beta_{n-1}\alpha_{n+k-1} - \dots - \beta_1\alpha_{k+1} - \beta_0\alpha_k = \alpha_{n+k},$$

$$0 \leq k \leq T-n-1.$$

Nous avons démontré par induction que

$$f_Z(z^{lT+s}) = f_Z(z^s) = \alpha_s = f(z^s), s = 0, 1, \dots, T-1; l \geq 0.$$

III) Soit maintenant  $q > 0, n > 0$ .

Considérons l'application  $f_Z\left(\sum_{s \geq 0} a_s z^s\right) = \sum_{l \geq 0} \sum_{s=0}^{T-1} a_{lT+s} \alpha_{q+s}$

Nous avons démontré qu'elle admet la fonction de transfert

$$Z = \frac{\sum_{s=0}^{T-1} \alpha_{T+q-s-1} z^s}{z^T - 1} = \frac{\sum_{s=0}^{n-1} \gamma_s z^s}{z^n + \sum_{s=0}^{n-1} \beta_s z^s}$$

et la réalisation  $\Sigma_2 = (F_{22}, G_2, H_2)$ ,

$F_{22}$  étant la matrice donnée dans l'énoncé,

$$G_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{bmatrix} n \times 1, \quad H_2 = [\alpha_q \dots \alpha_{n+q-1}], \text{ donc}$$

$$f_Z(z^{lT+s}) = H_2 F_{22}^{lT+s} G_2 = \alpha_{q+s}, s = 0, 1, \dots, T-1; l \geq 0.$$

Si  $F, G, H$  sont les matrices de (3),

$$H_1 = [\alpha_0 \alpha_1 \dots \alpha_{q-1}], \quad O_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{bmatrix} q \times 1, \text{ on a}$$

$$F^q G = \begin{bmatrix} 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{bmatrix} q+1 = \begin{bmatrix} O_2 \\ G_2 \end{bmatrix}, \quad F^s = \begin{bmatrix} F_{11}^s & 0_1 \\ ? & F_{22}^s \end{bmatrix}, s \geq 1.$$

Alors :

$$f_{\Sigma}(1) = HG = \alpha_0$$

$$f_{\Sigma}(z^k) = HF^k G = \alpha_k \quad 0 \leq k \leq q-1$$

$$f_{\Sigma}(z^q) = HF^q G = [H_1 H_2] \begin{bmatrix} 0_2 \\ G_2 \end{bmatrix} = [H_2 \ G_2] = \alpha_q$$

$$\begin{aligned} f_{\Sigma}(z^{lT+q+s}) &= HF^{lT+q+s} G = HF^{lT+s} F^q G = \\ &= [H_1 \ H_2] \begin{bmatrix} F^{lT+s} & 0_1 \\ ? & F_{22}^{lT+s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0_2 \\ G_2 \end{bmatrix} = H_{22} F_{22}^{lT+s} G_2 = \alpha_{q+s} \end{aligned}$$

$$s = 0, 1, \dots, T-1; l \geq 0$$

$X_f = \Omega/(\pi(z))$  et degré  $\pi(z) = q+n$ , donc  $\dim_K X_f = q+n$ , donc une réalisation minimale aura la dimension  $q+n$  (Kalman [4]).

Mais  $\dim \Sigma = \text{ordre } F = q+n$ , donc  $\Sigma$  est une réalisation minimale de l'application  $f$ , q.e.d.

**Conséquence.** Détermination de l'application entrée-sortie  $f_{\Sigma}$  d'un système  $\Sigma = (F, G, H)$ , où  $G$  et  $H'$  sont des matrices  $n \times 1$  :

1. On détermine le polynôme minimal

$$\pi(z) = z^q \sigma(z) \text{ de la matrice } F.$$

2. Si  $\sigma = 1$ , on pose  $T = 0$ ;

Si degré  $\sigma > 0$ , on détermine l'exposant  $T$  de  $\pi(z)$

$$T = \min \{ k : \pi(z) \mid z^k - 1 \}$$

3. On détermine  $\alpha_s = HF^s G$ ,  $s = 0, 1, \dots, T+q-1$

$$4. \text{ On écrit } f_{\Sigma} \left( \sum_{s \geq 0} a_s z^s \right) = \sum_{s=0}^{q-1} a_s \alpha_s + \sum_{l \geq 0} \sum_{s=0}^{T-1} a_{lT+q+s} \alpha_{q+s}$$

3. Applications entrée-sortie  $f : K^m[z] \rightarrow K$

### Théorème 2

Soit  $f : K^m[z] \rightarrow K$  une application entrée-sortie linéaire.

a) Alors  $\exists q_i \geq 0, T_i \geq 0, \alpha_{si} \in K, s = 0, 1, \dots, q_i + T_i - 1; i = 1, \dots, m$  telles que

$$f(u) = \sum_{i=1}^m \left( \sum_{s=0}^{q_i-1} a_{si} \alpha_{si} + \sum_{l \geq 0} \sum_{s=0}^{T_i-1} a_{lT_i+q_i+s, i} \alpha_{q_i+s, i} \right) \quad (6)$$

ou

$$u = \sum_{i=1}^m \left( \sum_{s \geq 0} a_{si} z^s \right) e_i, \quad a_{si} = 0 \quad s > v_i.$$

b) La fonction de transfert de l'application  $f$  est  $Z = [Z_1 Z_2 \dots Z_m]$ , où  $Z_i$  est la fraction irréductible définie par

$$Z_i = \sum_{s=0}^{q_i-1} \alpha_{si} \frac{1}{z^{s+1}} + \frac{\sum_{s=0}^{T_i-1} \alpha_{T_i+q_i-s-1, i} z^s}{z^{q_i}(z^{T_i} - 1)} = \sum_{s=0}^{q_i-1} \alpha_{si} \frac{1}{z^{s+1}} + \frac{\sum_{s=0}^{n_i-1} \gamma_{si} z^s}{z^{q_i} \left( z^{n_i} + \sum_{s=0}^{n_i-1} \beta_{si} z^s \right)} \tag{7}$$

c) Une réalisation est  $\Sigma = (F, G, H)$ ,

$$F = \begin{bmatrix} F_1 0 \dots 0 \\ 0 F_2 \dots 0 \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ 0 \quad 0 \quad F_m \end{bmatrix} \quad G = \begin{bmatrix} G_1 0 \dots 0 \\ 0 G_2 \dots 0 \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ 0 0 \quad G_m \end{bmatrix} \quad H = [H_1 H_2 \dots H_m], \tag{8}$$

où  $(F_i, G_i, H_i)$  est la réalisation donnée dans (3) pour l'application  $f_i : K[z] \rightarrow K$  définie par

$$f_i \left( \sum_{s \geq 0} a_{si} z^s \right) = \sum_{s \geq 0}^{q_i-1} a_{si} \alpha_{si} + \sum_{i \geq 0} \sum_{s=0}^{T_i-1} a_{iT_i+q_i+s, i} \alpha_{q_i+s, i} \tag{9}$$

*Démonstration*

Nous considérons les  $K[z]$  — homomorphismes

$$g_i : K[z] \rightarrow \prod_{k=1}^m M_k^i \text{ où } M_k^i = \{0\} \text{ si } k \neq i \text{ et } M_i^i = K[z],$$

définie par :  $g_i(\tau(z)) = \tau(z) \cdot e_i \forall \tau(z) \in K[z]$ .

Alors l'application  $f_i = f \circ g_i : K[z] \rightarrow K$  est  $K$ -linéaire. En vertu du Th 1,  $\exists q_i, T_i, \alpha_{si}, s = 0, 1, \dots, T_i + q_i - 1$ , telles que  $f_i(z^s) = \alpha_{si}$  et  $f$  a la forme (9).

La relation (6) est une conséquence de

$$f(u) = f \left( \sum_{i=1}^m \left( \sum_{s \geq 0} a_{si} z^s \right) e_i \right) = \sum_{i=1}^m f_i \left( \sum_{s \geq 0} a_{si} z^s \right).$$

La fonction de transfert sera  $Z = [Z_1 Z_2 \dots Z_m]$  où  $Z_i$ , la fonction de transfert de l'application  $f_i = f \circ g_i$ , donnée par (2), est celle de (7).

Soit  $(F_i, G_i, H_i)$ , la réalisation donnée dans (3) pour l'application  $f_i$ , donc:

$$f(z^s e_i) = f \cdot g_i(z^s) = \alpha_{si} = H_i F_i^s G_i.$$

Mais

$$f_Z(z^s e_i) = H F^s G e_i = [H_1 H_2 \dots H_m] \begin{pmatrix} F_1^s & 0 & \dots & 0 \\ 0 & F_2^s & & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & F_m^s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ G_i \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = H_i F_i^s G_i,$$

donc  $f_Z = f$  q.e.d.

$$\text{Soit } A_s = \begin{pmatrix} a_{s1} \\ \vdots \\ \vdots \\ a_{sm} \end{pmatrix}, \text{ donc } u = \sum_{s \geq 0} A_s z^s, \text{ avec } A_s = 0 \forall s > \max v_i.$$

### Corollaire

Soit  $f: K^m[z] \rightarrow K$  une application  $K$ -linéaire.

Alors  $\exists q \geq 0, T \geq 0, M_s$  des matrices  $1 \times m, s = 0, 1, \dots, T + q - 1$ , telles que

$$f(u) = \sum_{s=0}^{q-1} M_s A_s + \sum_{i \geq 0} \sum_{s=0}^{T-1} M_{s+q} A_{iT+s+q}. \quad (10)$$

Le corollaire résulte de (6), en prenant

$$q = \max_{1 \leq i \leq m} q_i, T = \text{p.p.c.m.}(T_1, \dots, T_m),$$

$$M_s = [\alpha_{s1} \alpha_{s2} \dots \alpha_{sm}].$$

La réalisation du théorème 2 n'est pas généralement minimale (complètement contrôlable et complètement observable).

Nous pouvons obtenir :

### Théorème 3

Si l'application  $f$  est donnée par (6) une réalisation minimale est

$$\Sigma = (F, G, H),$$

$$F = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -\beta_0 & -\beta_1 & -\beta_2 & \dots & -\beta_{n-1} \end{pmatrix} \quad G = \begin{pmatrix} \alpha_{01} & \alpha_{02} & \dots & \alpha_{0m} \\ \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n-1,1} & \alpha_{n-1,2} & \dots & \alpha_{n-1,m} \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nm} \end{pmatrix}$$

$H = [1 \ 0 \ \dots \ 0] \ 1 \times n,$

où  $\pi(z) = z^n + \beta_{n-1}z^{n-1} + \dots + \beta_1z + \beta_0$  est le plus petit commun multiple des polynômes

$$\pi_i(z) = z^{2i} \left( z^{n_i} + \sum_{s=0}^{n_i-1} \beta_{si}z^s \right)$$

*Démonstration*

Soit  $\pi(z) = \pi_i(z)\tau_i(z).$

Alors  $Z_i = \frac{\theta_i(z)}{\pi_i(z)} = \frac{\theta_i(z)\tau_i(z)}{\pi(z)}.$

De la démonstration du théorème 1 il résulte que  $F', H', (Ge_i)' = [\alpha_{0i}\alpha_{1i} \dots \alpha_{ni}]$  est une réalisation de l'application  $f \circ g_i$ , c'est-à-dire

$$f(z^s e_i) = f \circ g_i(z^s) = (Ge_i)'F'H' = HFGe_i$$

(la dernière égalité est une conséquence du fait que  $f(z^s e_i)$  est un scalaire).

Le polynôme caractéristique de  $F$  est  $\pi(z)$ , qui est le plus petit dénominateur commun de  $Z_i$ , donc  $\Sigma = (F, G, H)$  est une réalisation minimale de  $f$ , q.e.d.

**4. Application entrée-sortie  $f : K[z] \rightarrow K^p$**

Considérons les projections

$$h_j = pr_j : K^p \rightarrow K$$

$$h_j : \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \vdots \\ \gamma_p \end{pmatrix} \rightarrow \gamma_j$$

Alors  $f = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_p \end{pmatrix}$ , où  $f_j = h_j \circ f : \rightarrow K$ , donc

$$f_j \left( \sum_{s \geq 0} a_s z^s \right) = \sum_{s=0}^{q_i-1} a_s \alpha_{js} + \sum_{i \geq 0} \sum_{s=0}^{T_i-1} a_{iT_i+q_j+s} \alpha_{j,q+s}$$

On peut formuler aisément un théorème analogue au théorème 2. Nous nous bornons à donner une réalisation minimale pour l'application  $f$  :

$$F = \begin{pmatrix} 00 & \dots & 0 & -\beta_0 \\ 10 & \dots & 0 & -\beta_1 \\ 01 & \dots & 0 & -\beta_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 00 & \dots & 1 & -\beta_{n-1} \end{pmatrix} \quad G = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{pmatrix} \quad H = \begin{pmatrix} \alpha_{01} & \dots & \alpha_{0n} \\ \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{p1} & \dots & \alpha_{pn} \end{pmatrix}$$

où  $\text{Ker } f_j = (\pi_j(z))$  et  $\pi(z) = z^n + \beta_{n-1}z^{n-1} + \dots + \beta_1z + \beta_0$  est le plus petit commun multiple de  $\pi_1(z), \dots, \pi_p(z)$ .

**5. Le cas général**

**Théorème**

Soit  $f : K^m[z] \rightarrow K^p$  une application entrée-sortie linéaire.

1) Alors  $\exists q_{ij} \geq 0, T_{ij} \geq 0, \alpha_{sij} \in K, s = 0, 1, \dots, q_{ij} + T_{ij} - 1;$

$$i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, p$$

telles que

$$f(u) = \begin{pmatrix} h_1 \circ f(u) \\ \vdots \\ h_p \circ f(u) \end{pmatrix}, \quad h_j \circ f(u) = \sum_{i=1}^m \left( \sum_{s=0}^{q_{ij}-1} a_{si} \alpha_{sij} + \sum_{l=0}^{T_{ij}-1} \sum_{s=0}^{q_{ij}+q_{lj}+s, i} a_{lT_{ij}+q_{lj}+s, i} \alpha_{q_{lj}+s, i, j} \right) \tag{11}$$

où  $u = \sum_{i=1}^m \left( \sum_{s \geq 0} a_s z^s \right) e_i \in K^m[z]$ .

ii) La fonction de transfert de l'application  $f$  est

$$Z = \begin{pmatrix} Z_{11} & \dots & Z_{1m} \\ \dots & \dots & \dots \\ Z_{p1} & \dots & Z_{pm} \end{pmatrix} \text{ où } Z_{ji} \text{ est la fonction de transfert donnée par (2) pour}$$

l'application  $h_j \circ f \circ g_i$ .

c) Une réalisation est  $\Sigma = (F, G, H)$ ,

$$F = \begin{pmatrix} F_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & F_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & F_p \end{pmatrix} \quad G = \begin{pmatrix} G_1 \\ G_2 \\ \vdots \\ G_p \end{pmatrix} \quad H = \begin{pmatrix} H_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & H_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & H_p \end{pmatrix}$$





8. On écrit la matrice  $S$  ayant les colonnes  $i_j$  égale à la colonnes  $j$  de la matrice  $R^{-1}$  et les autres colonnes nulles.

La matrice  $S$  sera l'inverse à gauche de la matrice  $T : ST = I_m$ .

9. On détermine la réalisation minimale

$$\tilde{F} = SFT, \quad \tilde{G} = SG, \quad \tilde{H} = HT.$$

*Démonstration*

Évidemment,  $HF^s = [0_p \dots 0_p I_p 0_p \dots 0_p]$   $s = 0, 1, \dots, T + q - 1$

et  $F^{q+T} = F^q$ .

Alors  $HF^sG = M_s \quad s = 0, 1, \dots, q - 1$

$$HF^{lT+q+s}G = HF^{q+s}G = M_{q+s}, \quad l \geq 0, s = 0, 1, \dots, T - 1.$$

Il en résulte :

$$f_{\Sigma}(z^s e_i) = HF^s G e_i = M_s e_i = f(z^s e_i) \quad s = 0, 1, \dots, q - 1; i = 1, 2, \dots, m.$$

$$f_{\Sigma}(z^{lT+q+s} e_i) = HF^{lT+q+s} G e_i = M_{q+s} e_i = f(z^{lT+q+s} e_i)$$

$$l \geq 0; s = 0, 1, \dots, T - 1; i = 1, 2, \dots, m.$$

Donc  $f = f_{\Sigma}$  et  $\Sigma = (F, G, H)$  est une réalisation de  $f$ .

Soit  $x \in K^{T+q}$  arbitraire et vecteur  $\bar{x}$  défini par  $\bar{x}' = x'(I - TS)$ . I matrice unité d'ordre  $q + T$ .

Alors  $\bar{x}'T = x'(T - TST) = x'(T - T) = 0$ , donc  $\bar{x}'M = 0$  parce que les colonnes de la matrice  $M$  sont linéairement dépendantes de celles de la matrice  $T$ .

En particulier  $\bar{x}'G = 0, x'F^sG = 0 \quad s = 0, 1, \dots, T + q - 1$  et avec  $F^{T+q} = F^q$  il en résulte  $\bar{x}'F^sG = 0 \quad \forall s \geq 0$ .

Le vecteur  $x$  étant arbitraire, de  $\bar{x}'G = 0$  il s'ensuit que  $x'(I - TS)G = 0$  donc  $G = TSG$  (13).

D'une manière analogue

$$\bar{x}'F^sG = 0 \text{ implique } F^sG = TSF^sG, \forall s \geq 0 \tag{14}$$

Par (13) on a  $HG = HTSG = \tilde{H}\tilde{G}$  et par (14)

$$HFG = HTSFG = HTSFTSG = \tilde{H}\tilde{F}\tilde{G}$$

Démontrons par induction la relation

$$\tilde{F}^s\tilde{G} = SF^sG \tag{15}$$

Pour  $s = 1 \quad \tilde{F}\tilde{G} = SFTSG = SFG$  [par (13)].

Soit (15) vraie pour  $s - 1$ .

Alors par (14)

$$\tilde{F}^s \tilde{G} = \tilde{F} \tilde{F}^{s-1} \tilde{G} = \tilde{F} S F^{s-1} G = S F (T S F^{s-1} G) = S F \cdot F^{s-1} G = S F^s G$$

Il en résulte que

$$\tilde{H} \tilde{F}^s \tilde{G} = (H T) S F^s G = H (T S F^s G) = H F^s G \quad \forall s \geq 0$$

Donc  $\tilde{\Sigma}$  est une réalisation de l'application  $f$ , parce que

$$f_{\tilde{\Sigma}} = f_{\Sigma} = f.$$

Considérons les matrices

$$\tau = [\tilde{G}, \tilde{F} \tilde{G} \dots \tilde{F}^{T+q-1} \tilde{G}]$$

$$O = [\tilde{H}', \tilde{F}' \tilde{H}' \dots \tilde{F}'^{T+q-1} \tilde{H}'].$$

Évidemment,  $\text{rang } \tau \leq n$  et  $\text{rang } O \leq n$ .

Mais

$$O' \tau = \begin{bmatrix} \tilde{H} \tilde{G} & \tilde{H} \tilde{F} \tilde{G} & \dots & \tilde{H} \tilde{F}^{T+q-1} \tilde{G} & \tilde{G} \\ \tilde{H} \tilde{F} \tilde{G} & \tilde{H} \tilde{F}^2 \tilde{G} & \dots & \tilde{H} \tilde{F}^{T+q} \tilde{G} & \tilde{G} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \tilde{H} \tilde{F}^{T+q-1} \tilde{G} & \tilde{H} \tilde{F}^{T+q} \tilde{G} & \dots & \tilde{H} \tilde{F}^{2(T+q-1)} \tilde{G} & \tilde{G} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_0 & M_1 & \dots & M_{T+q-1} \\ M_1 & M_2 & \dots & M_0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ M_{T+q-1} M_0 & \dots & M_{T+q-2} \end{bmatrix} = M$$

Alors  $n = \text{rang } M = \text{rang } O' \tau \leq \min(\text{rang } \tau, \text{rang } O)$  et  $\text{rang } \tau = \text{rang } O = n$ ; le système  $\tilde{\Sigma}$  est complètement contrôlable et complètement observable, donc minimal.

### Observation

L'algorithme peut être utilisé pour la détermination d'une réalisation minimale même si  $K$  est un corps commutatif quelconque. Dans ce cas, les instructions 1, 2, 3 sont remplacées par 1', 2'.

1' On détermine  $r$  tel que

$$M_{r+s} = \sum_{i=0}^{r-1} \beta_i M_{s+i} \quad s = 0, 1, \dots$$

2. On considère la réalisation : (voir [5])

$$F = \begin{bmatrix} 0_p & 1_p & 0_p & \dots & 0_p \\ 0_p & 0_p & 1_p & \dots & 0_p \\ 0_p & 0_p & 0_p & \dots & 1_p \\ \beta_0 1_p & \beta_1 1_p & \beta_2 1_p & \dots & B_{r-1} 1_p \end{bmatrix} \quad G = \begin{bmatrix} M_0 \\ M_1 \\ \vdots \\ M_{r-1} \end{bmatrix} \quad H = \underbrace{[1_p 0_p \dots 0_p]}_r$$

BIBLIOGRAPHIE

- [1] Gh. GALBURA, *Corpuri de functii algebrice si varietati algebrice.*
- [2] Arthur GILL, *Linear Sequential Circuits*, Mc Graw-Hill, 1966.
- [3] R. E. KALMAN, *Algebraic Aspects of the Theory of Dynamical Systems. Differential Equations and Dynamical Systems*, 1967.
- [4] R. E. KALMAN, *Lectures on controllability and observability.* C.I.M.E., 1968.
- [5] R. E. KALMAN, P. L. FALB et M. A. ARBIB. *Topics in Mathematical System Theory*, Mc. Graw. Hill., 1969.
- [6] Serge LANG, *Algebra*, Addison-Wesley, 1965.