

MICHÈLE CHAMBAT

MICHEL CHARNAY

**Brève communication. Résolution d'équations
non linéaires de point fixe dans \mathbf{R}^n**

Revue française d'automatique informatique recherche opérationnelle. Mathématiques, tome 6, n° R3 (1972), p. 105-109

http://www.numdam.org/item?id=M2AN_1972__6_3_105_0

© AFCET, 1972, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Revue française d'automatique informatique recherche opérationnelle. Mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

RESOLUTION D'EQUATIONS NON LINEAIRES DE POINT FIXE DANS R^n

par Michèle CHAMBAT et Michel CHARNAY (1)

Résumé. — *Cet article a pour but, sous certaines conditions, d'affirmer les deux points suivants :*

— *existence et unicité de la solution x^* de l'équation de point fixe $x = F(x)$, où F est un opérateur sur R^n ;*

— *convergence vers x^* de l'itération de Gauss Seidel par point ou par bloc, appliquée à la fonction F .*

Considérons l'équation de point fixe :

$$(1.1) \quad x = F(x)$$

où F est un opérateur quelconque sur R^n .

Ce papier a pour but, sous certaines conditions, d'affirmer les deux points suivants :

a) existence et unicité de la solution x^* de (1.1);

b) convergence vers cette solution de l'itération de Gauss-Seidel, par point ou par bloc, appliquée à la fonction F .

I. DEFINITIONS ET RAPPELS

L'outil de base qui permet de montrer ces résultats est la contraction d'un opérateur sur R^n en norme vectorielle, notion qui apparaît souvent plus ou moins explicitement dans la littérature actuelle, par exemple [2].

Soit une décomposition des vecteurs de R^n en k blocs ($0 < k \leq n$) de tailles respectives v_i ($\sum v_i = n$). Notons X_i le $i^{\text{ème}}$ bloc du vecteur x .

(1) Analyse numérique, Département de Mathématiques, Université de Lyon 1.

Soit Φ_i une norme sur R^{v_i} . L'application $x \rightarrow p(x) = (\Phi_i(X_i))_i$, vecteur non négatif de R^k , est une *norme vectorielle régulière de taille k* sur R^n [4]. Nous n'utiliserons que celles-ci dans la suite. Si $k = n$ et si toutes les normes Φ_i sont identiques à la valeur absolue sur R , on définit :

la *norme vectorielle type* sur R^n qui, au vecteur x , fait correspondre le vecteur de R^n , noté $|x|$, formé des valeurs absolues de ses composantes.

Soit M_k l'algèbre des matrices réelles (k, k) , et soit p une telle norme vectorielle régulière de taille k sur R^n .

On dit que l'application F est *contractante sur R^n en norme vectorielle p* s'il existe une matrice non négative K de M_k telle que :

$$(i) \quad \rho(K) < 1 \quad \rho \text{ désigne le rayon spectral}$$

$$(ii) \quad p(F(x) - F(y)) \leq Kp(x - y) \quad \forall x, y \in R^n \quad (1)$$

On peut étendre le théorème de point fixe lié à la contraction classique. Le résultat s'énonce ainsi :

Théorème 1 : Si F est une application contractante sur R^n en norme vectorielle régulière p alors :

- 1) l'équation (1.1) possède une solution x^* et une seule dans R^n .
- 2) L'itération de point fixe $x^{r+1} = F(x^r)$ converge vers x^* quel que soit le vecteur x^0 de départ.

II. ITERATION DE GAUSS-SEIDEL PAR POINT

Nous précisons ce que nous entendons par itération de Gauss-Seidel pour résoudre l'équation de point fixe (1.1).

Soient $x = (x_i)$ un vecteur de R^n et F de composante f_i un opérateur sur R^n , nous définissons l'application G de composantes g_i :

$$(2.1) \quad \begin{aligned} g_1(x) &= f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ g_2(x) &= f_2(g_1(x), x_2, \dots, x_n) \\ &\vdots \\ g_n(x) &= f_n(g_1(x), g_2(x), \dots, g_{n-1}(x), x_n) \end{aligned}$$

(1) La notation $u < v$ désigne la relation d'ordre partiel « composante à composante ».

Il est clair que les fonctions F et G ont exactement les mêmes points fixes.

Nous appelons *itération de Gauss-Seidel par point* menée sur la fonction F , celle définie à partir d'un vecteur x^0 quelconque par :

$$(2.2) \quad \begin{aligned} x_1^{r+1} &= f_1(x_1^r, \dots, x_n^r) \\ x_2^{r+1} &= f_2(x_1^{r+1}, x_2^r, \dots, x_n^r) \\ &\vdots \\ &\vdots \\ &\vdots \\ x_n^{r+1} &= f_n(x_1^{r+1}, \dots, x_{n-1}^{r+1}, x_n^r) \end{aligned}$$

Elle n'est autre que l'itération de point fixe menée sur la fonction G .

Théorème 2

Si F est contractante sur R^n en norme vectorielle type, l'itération de Gauss-Seidel donnée par les formules (2.2) converge vers l'unique point fixe de F dans R^n , et ceci au moins aussi vite que l'itération de point fixe menée sur F .

Démonstration

Il faut montrer que l'itération de point fixe menée sur la fonction G converge et d'après le théorème 1, il suffit de montrer que G est contractante en norme vectorielle type, ce qui permettra d'affirmer :

- l'existence et l'unicité du point fixe de G , donc de F ;
- la convergence de l'itération (2.2).

Soit K la matrice de contraction de F que nous découpons en :

$$K = \begin{array}{|c|} \hline \begin{array}{c} \text{U} \\ \hline \text{L} \end{array} \\ \hline \end{array} = L + U \quad \begin{array}{l} L : \text{ triangulaire inférieure stricte} \\ U : \text{ triangulaire supérieure} \end{array}$$

Les hypothèses (ii) et les formules (2.1) permettent d'écrire

$$|G(x) - G(y)| \leq L |G(x) - G(y)| + U |x - y| \quad \forall x, y \in R^n$$

Le rayon spectral de L étant nul, $I-L$ est régulière et $(I-L)^{-1}U$ est de plus non négative. D'où

$$|G(x) - G(y)| \leq K_1 |x - y| \quad \forall x, y \in R^n$$

avec $K_1 = (I-L)^{-1}U$ matrice non négative. Le théorème de Stein Rosenberg implique qu'alors

$$\rho(K_1) \leq \rho(K) < 1$$

G est donc contractante en norme vectorielle type sur R^n , avec une matrice de contraction de rayon spectral inférieur à celui de K .

REMARQUES

1) Nous retrouvons les résultats classiques quand F est lui-même linéaire : $F(x) = Ax + b$. La contraction de F en norme vectorielle type est alors caractérisée par la condition $\rho(|A|) < 1$. La « meilleure » matrice de contraction qu'on puisse prendre est d'ailleurs $K = |A|$ à laquelle s'applique le théorème de Stein Rosenberg.

2) Le même théorème peut s'énoncer dans le cas de contraction locale sur un pavé fermé D_0 tel que $F(D_0) \subset D_0$. Le point fixe y est alors unique et l'itération (2.2) converge vers ce point fixe dès que x^0 est pris dans D_0 .

III. ITERATION DE GAUSS-SEIDEL PAR BLOC

Soit une décomposition de R^n en k blocs de taille v_i ($\sum v_i = n$). Définissons l'application G (de blocs G_i) de R^n dans lui-même, à partir de F (de blocs F_i) en tout point x (de blocs X_i) de R^n .

$$\begin{aligned}
 G_1(x) &= F_1(X_1, X_2, \dots, X_k) \\
 G_2(x) &= F_2(G_1(x), X_2, \dots, X_k) \\
 &\cdot \\
 &\cdot \\
 &\cdot \\
 G_k(x) &= F_k(G_1(x), \dots, G_{k-1}(x), X_k)
 \end{aligned}
 \tag{3.1}$$

Les fonctions F et G ont exactement les mêmes points fixes. Nous appelons *itération de Gauss-Seidel par bloc*, menée sur la fonction F , celle définie à partir d'un vecteur x^0 quelconque par :

$$\begin{aligned}
 X_1^{r+1} &= F_1(X_1^r, X_2^r, \dots, X_k^r) \\
 X_2^{r+1} &= F_2(X_1^{r+1}, X_2^r, \dots, X_k^r) \\
 &\cdot \\
 &\cdot \\
 &\cdot \\
 X_k^{r+1} &= F_k(X_1^{r+1}, \dots, X_{k-1}^{r+1}, X_k^r)
 \end{aligned}
 \tag{3.2}$$

Elle n'est autre que l'itération de point fixe menée sur la fonction G .

Théorème 3

Si F est contractant sur R^n en norme vectorielle régulière p de taille k , l'itération de Gauss-Seidel par bloc, donnée par les formules (3.2) converge vers l'unique point fixe de F dans R^n , et ceci au moins aussi vite que l'itération de point fixe menée sur F .

La démonstration est la même qu'au théorème 2 (on découpe la matrice de contraction (k, k) de la même manière).

REMARQUES

1) On peut encore énoncer ce théorème dans le cas de contraction locale sur un pavé fermé D_0 . Les conclusions demeurent pourvu que D_0 soit invariant par F et qu'on démarre l'itération dans D_0 .

2) Ces résultats peuvent être étendus à bien d'autres découpages de matrices [3] que celle de Gauss-Seidel. D'autre part, nous pouvons itérer le processus qui permet de passer de la fonction F à la fonction G et accumuler, en conséquence, les gains de convergence [1].

BIBLIOGRAPHIE

- [1] M. CHAMBAT, *Résolution formelle d'équations de point fixe dans R^n ; Algorithmes associés à une découpe de matrices*. Thèse 3^e cycle Lyon (à paraître).
- [2] J. M. ORTEGA et W. C. RHEINBOLDT, *Iterative solution of non linear equations in several variables* (Academic Press, 1970).
- [3] F. ROBERT et J. F. MAITRE, *Normes et algorithmes associés à une découpe de matrices* (à paraître dans Num. Math.).
- [4] F. ROBERT, Thèse, *Étude et utilisation de normes vectorielles en analyse numérique linéaire*. Grenoble (1968).