REVUE FRANÇAISE D'AUTOMATIQUE INFORMATIQUE RECHERCHE OPÉRATIONNELLE. MATHÉMATIQUES

G. COLLOMBAT

Brèves communications. Une classe de matrices tri-diagonales-tests

Revue française d'automatique informatique recherche opérationnelle. Mathématiques, tome 6, nº R2 (1972), p. 77-79

<http://www.numdam.org/item?id=M2AN_1972__6_2_77_0>

R.A.I.R.O.
(6e année, juillet 1972, R-2, p. 77-79)

Brèves communications

UNE CLASSE DE MATRICES TRI-DIAGONALES-TESTS

par G. COLLOMBAT [1]

Résumé. — *Par le biais d'une matrice de Van der Monde on triangularise une matrice tridiagonale dont les termes satisfont à certaines conditions polynomiales.*

I. INTRODUCTION

On se propose d'établir une formule exacte donnant les valeurs propres d'une matrice tri-diagonale L moyennant certaines hypothèses sur la génération des termes de cette matrice.

Les matrices tri-diagonales, justifiables de cette méthode, sont assez particulières.

Néanmoins, il est facile de générer automatiquement les termes de telles matrices, qui sont des fonctions polynomiales de l'indice de localisation. Comme le spectre découle aussi d'une formule simple, elles peuvent présenter un intérêt comme classes de « Matrices-tests ».

Disons, pour mémoire, que cette méthode a son origine dans la « Méthode des Moments », mise au point par M. G. Malecot, en Calcul des Probabilités. Les conditions requises pour les matrices L sont alors souvent réalisées quand L^t est la matrice de transition associée à un processus de Naissance et de Mort. On est amené à trouver le spectre de L par cette méthode pour résoudre l'équation de Kolmogorov $\vec{P}' = L\vec{P}$.

(1) Mathématiques Appliquées, Institut Scientifique de Chambéry, Centre Universitaire de Savoie.

II. NOTATIONS

Si $1_{i,j}$ est le terme générique de L, nous poserons pour simplifier :

$$S_i = 1_{i-1,i} (i = 2, \dots n).$$
$$D_i = 1_{i,i} \quad (i = 1, \dots n).$$
$$I_i = 1_{i+1,i} (i = 1, \dots n - 1).$$

Nous poserons en outre $S_1 = I_n = 0$, et nous conviendrons ainsi que toute formule ultérieure en i (ou j) vaudra pour i (ou j) $= 1, \dots n$. Nous désignerons par $Q_p(x)$ un polynôme de d° $\leqslant p$ en x.

III. THEOREME

Si les termes extra-diagonaux S_i et D_i d'une matrice tri-diagonale L sont des polynômes du second degré de l'indice de localisation i, de même coefficient capital et s'annulant aux deux places fictives extrêmes,

$$(\text{soit } S_i = \alpha i^2 + ai - (\alpha + a)\,;\, I_i = \alpha i^2 + bi - (\alpha n^2 + bn))$$

si de plus la somme des termes de L est constante par colonne (soit $S_i + D_i + I_i = K$), le spectre de L est alors donné par la famille

$$\{ K + k(b - a) + k(k - 1)\alpha \} \text{ quand } k = 0, \dots, n - 1. \text{ (F)}$$

Démonstration

Soit la matrice de Van der Monde $H = (H_{i,j}) = (j^{i-1})$.

$\{ HL \}_{i,j} = (j - 1)^{i-1} S_j + j^{i-1} D_j + (j + 1)^{i-1} I_j =$ (en utilisant la formule du binôme)

$$\sum_{k=0}^{i-1} C_{i-1}^k j^k (-1)^{i-1-k} S_j + j^{i-1} D_j + \sum_{k=0}^{i-1} C_{i-1}^k j^k I_j =$$

$$= \sum_{k=0}^{i-1} j^k C_{i-1}^k \{ I_j + (-1)^{i-1-k} S_j \} + j^{i-1} D_j = \sum_{k=0}^{i-1} C_{i-1}^k j^k P_{i,j,k}$$

On voit alors que :

1) Pour $k = 0, \dots, i - 4$: $P_{i,j,k} = I_j + (-1)^{i-1-k} S_j$ est un polynôme en j de d° $\leqslant 2$, en vertu des hypothèses faites sur L.

2) Ces mêmes hypothèses font que :

$$P_{i,j,i-3} = I_j + S_j = 2\alpha j^2 + Q_1(j).$$
$$P_{i,j,i-2} = I_j - S_j = (b - a)j + Q_0(j).$$
$$P_{i,j,i-1} = I_j + D_j + S_j = K.$$

Ainsi $\{ HL \}_{ij}$ s'avère un polynôme en j de $d^0 \leqslant i - 1$: $\sum_{l=1}^{i} \alpha_{i,l} j^{l-1}$ dont il est facile de calculer le terme capital : $\alpha_{i,i} = 2\alpha C_{i-1}^{i-3} + (b - a)C_{i-1}^{i-2} + KC_{i-1}^{i-1}$.

On reconnaît dans cette expression de $\{ HL \}_{ij}$ le terme général du produit de la matrice triangulaire $T = (T_{ij}) = (\alpha_{i,j} 1_{i \geqslant j})$ par H car

$$\{ TH \}_{ij} = \sum_{l=1}^{n} T_{i,l} H_{l,j} = \sum_{l=1}^{i} \alpha_{il} j^{l-1}.$$

Ainsi $T = HLH^{-1}$ et le spectre de L est celui de T, soit $\{ \alpha_{i,i} \}$ pour, $i = 1, \ldots, n$ ce qui, aux notations près, démontre notre affirmation.

IV. REMARQUE

La question reste ouverte d'utiliser ce théorème pour un calcul approché du spectre de L, pour une matrice tri-diagonale générale (or n'ayant que la somme de ses termes constante par colonne) :

Si on approche, d'une certaine façon, les termes S_i et I_i d'une telle matrice par S'_i et I'_i satisfaisant aux conditions précédentes, en quoi le spectre donné par la formule (F) approche-t-il le vrai spectre?

L'approximation des moindres carrés est inopérante.