REVUE FRANÇAISE D'AUTOMATIQUE INFORMATIQUE RECHERCHE OPÉRATIONNELLE. MATHÉMATIQUES

FRANÇOIS STERBOUL

Circuits et arbres de circulation d'un graphe fortement connexe

Revue française d'automatique informatique recherche opérationnelle. Mathématiques, tome 6, nº R2 (1972), p. 3-8

<http://www.numdam.org/item?id=M2AN_1972__6_2_3_0>

R.A.I.R.O.
(6e année, juillet 1972, R-2, p. 3-8)

CIRCUITS ET ARBRES DE CIRCULATION DUN GRAPHE FORTEMENT CONNEXE

par François STERBOUL (1)

Résumé. — *L'étude par G. Chaty des graphes fortement connexes possédant un nombre minimum de circuits (graphes f.c.c.m.) a permis de les identifier aux graphes fortement connexes possédant un arbre de circulation. Le présent article apporte une réponse au problème de la caractérisation et de la construction des arbres de circulation d'un graphe f.c.c.m., et une réponse négative à deux conjectures proposées par G. Chaty dans sa thèse.*

§ 1. DEFINITIONS ET PROPRIETES

Les principales notions utilisées sont dues à Chaty [2].

On appelle *graphe fortement connexe c-minimal* (f.c.c.m.) un graphe fortement connexe dont le nombre de circuits élémentaires est égal au nombre cyclomatique du graphe : $k = m - n + 1$ (m nombre d'arcs, n nombre de sommets).

On appelle *arbre de circulation* d'un graphe, un arbre maximal du graphe, tel que l'adjonction de tout arc du coarbre associé détermine avec certains arcs de l'arbre un circuit. Ce circuit est alors élémentaire et unique.

Propriétés

1) Un graphe fortement connexe est f.c.c.m. si et seulement s'il possède un arbre de circulation.

2) On peut ranger les arcs d'un graphe f.c.c.m. en trois classes A, B, C :

— Classe A : arcs supprimables, i.e. arcs dont la suppression ne détruit pas la propriété de forte connexité du graphe.

— Classe B : arcs non supprimables, appartenant au moins à deux circuits élémentaires du graphe.

(1) Université, Paris-VI.

— Classe C : arcs non supprimables, appartenant à un circuit élémentaire unique du graphe.

Chaty a démontré les résultats suivants :

1) Si un arc d'un graphe f.c.c.m. appartient à plusieurs circuits élémentaires, il est alors de type B et appartient à tout arbre de circulation du graphe.

2) Tout arc de type C appartient au moins à un arbre de circulation du graphe.

3) Les arcs de type A n'appartiennent à aucun arbre de circulation, donc appartiennent au coarbre de tout arbre de circulation.

§ 2. PROPRIETES ET CONSTRUCTION DES ARBRES DE CIRCULATION D'UN GRAPHE f.c.c.m.

Théorème. — *Pour qu'un arbre maximal d'un graphe f.c.c.m. soit de circulation, il faut et il suffit qu'il contienne tous les arcs de type B.*

La condition est nécessaire d'après la propriété 1) ci-dessus. La démonstration du fait que la condition est suffisante se fera par l'absurde en supposant qu'il existe un arbre contenant les arcs B, tel que l'adjonction d'un arc du coarbre détermine un cycle élémentaire non circuit. On montrera alors qu'il existe un chemin, non inclus dans le cycle, joignant deux sommets du cycle et formé uniquement d'arcs B, ce qui entraînerait que l'arbre considéré contient un cycle.

Lemme. — *Soit γ un chemin appartenant à un circuit élémentaire Γ_1, et à un circuit Γ_2, alors si $\Gamma_1 \not\subset \Gamma_2$ tout arc de γ appartient à deux circuits élémentaires.*

Démonstration

Tout arc de γ appartient à Γ_1, et à un sous-circuit élémentaire de Γ_2 différent de Γ_1, puisque $\Gamma_1 \not\subset \Gamma_2$.

Démonstration du théorème

Orientons le cycle C non circuit considéré dans le sens de l'arc a du coarbre. En progressant dans ce sens sur le cycle soit A_1 le premier sommet du cycle où l'orientation des arcs du cycle s'inverse, B_1 le sommet où les arcs du cycle reprennent le sens de a, A_2 le sommet suivant où les arcs du cycle changent à nouveau de sens, etc... On notera $C[B_i, A_i]$ le chemin, inclus dans le cycle C, de B_i à A_i qui est donc constitué d'arcs de sens opposé à a, et $C[B_i, A_{i+1}]$ chemin inclus dans C, ayant ses arcs de même sens que a. Comme le graphe est fortement connexe, pour tout i il existe un chemin élémentaire de A_i à B_i, noté $\mu_i[A_i, B_i]$ (fig. 3). Considérons le circuit $\mu_1[A_1, B_1]. C[B_1, A_1]$.

Il peut ne pas être élémentaire, on considère alors le sous-circuit élémentaire

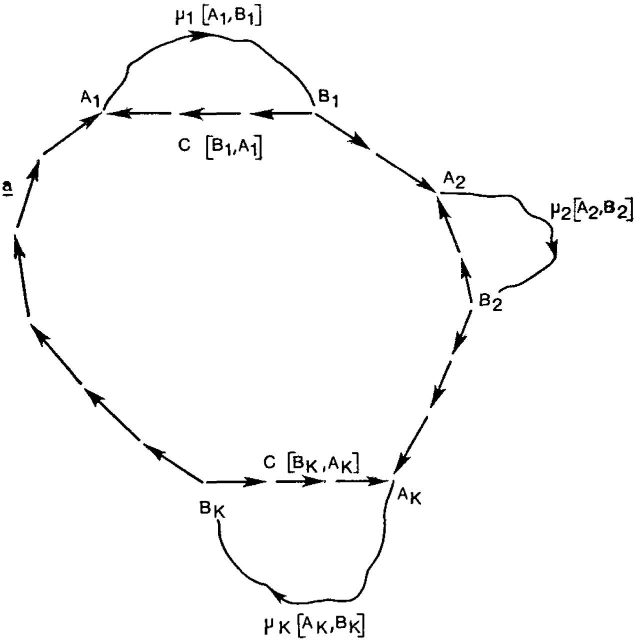

Figure 3

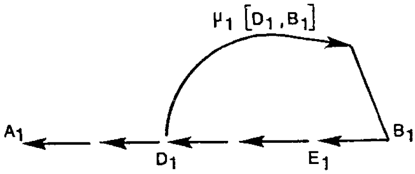

Figure 4

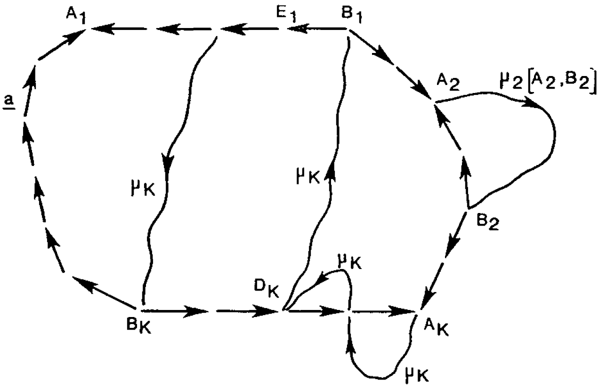

Figure 5

$\mu_1[D_1, B_1]$. $C[B_1, D_1]$ de ce circuit, contenant l'arc B_1E_1 de C (fig. 4). On a alors deux cas :

1) L'arc B_1E_1 n'appartient pas au circuit $\Gamma_2 = \mu_1[A_1, B_1] \cdot C[B_1, A_2] \dots \mu_i[A_i, B_i] \cdot C[B_i, A_{i+1}] \dots C[B_n, A_1]$. Alors, le chemin $\mu_1[D_1, B_1]$ est inclus dans le circuit Γ_2 et dans le circuit élémentaire $\Gamma_1 = \mu_1[D_1, B_1] \cdot C[B_1, D_1]$ et $\Gamma_1 \not\subset \Gamma_2$. En appliquant le lemme, le chemin $\mu_1[D_1, B_1]$ est formé d'arcs de type B, le circuit Γ_1 serait alors inclus dans l'arbre.

2) B_1E_1 appartient à Γ_2, donc à un des chemins $\mu_i[A_i, B_i]$. Soit k l'indice du premier chemin μ_i qui contienne B_1E_1 (fig. 5).

2.1. Si le circuit $\mu_k[A_k, B_k] \cdot C[B_k, A_k]$ est élémentaire, le chemin $\mu_k[A_k, B_1]$ est inclus dans ce circuit et dans le circuit

$$\Gamma_3 = \mu_k[A_k, B_1] \cdot C[B_1, A_2] \cdot \mu_2[A_2, B_2] \dots \mu_{k-1}[A_{k-1}, B_{k-1}] \cdot C[B_{k-1}, A_k]$$

Γ_3 ne contient pas B_1E_1 donc ne contient pas $\mu_k[A_k, B_k] \cdot C[B_k, A_k]$ et d'après le lemme le chemin $\mu_k[A_k, B_1]$ est formé d'arcs de type B, et le cycle $\mu_k[A_k, B_1] \cdot C[B_1, A_k]$, ($C[B_1, A_k]$ étant la chaîne de B_1 à A_k contenue dans le cycle C et ne passant pas par l'arc a du coarbre) serait alors inclus dans l'arbre.

2.2. Si le circuit $\mu_k[A_k, B_k] \cdot C[B_k, A_k]$ n'est pas élémentaire (fig. 5), soit Γ un sous-circuit élémentaire, contenant l'arc B_1E_1, de ce circuit. Γ contient au moins un sommet appartenant au chemin $C[B_k, A_k]$ sinon Γ serait inclus dans $\mu_k[A_k, B_k]$ qui ne serait pas élémentaire. En parcourant alors Γ à partir de B_1 dans le sens opposé à celui de Γ soit D_k le premier sommet appartenant à $C_k[B_k, A_k]$. Le chemin $\mu_k[D_k, B_1]$ est alors inclus dans le circuit élémentaire Γ et dans le circuit Γ_3 défini ci-dessus et $\Gamma \not\subset \Gamma_3$ puisque Γ contient B_1E_1. D'après le lemme le chemin $\mu_k[D_k, B_1]$ est formé d'arés de type B, et le cycle

$$\mu_k[D_k, B_1] \cdot C[B_1, D_k]$$

serait alors inclus dans l'arbre. ($C[B_1, D_k]$ désigne la chaîne de B_1 à D_k incluse dans C et ne contenant pas l'arc a du coarbre.)

Algorithme de construction d'un arbre de circulation : l'algorithme se déduit de l'algorithme classique de construction d'un arbre maximal d'un graphe (Berge [1]) :

1) On choisit tous les arcs de type B.

2) On ajoute un par un à l'ensemble des arcs obtenus, des arcs quelconques du graphe à condition qu'à chaque pas l'arc choisi ne forme pas de cycle avec les arcs déjà choisis. Quand on ne peut plus ajouter d'arcs sans former un cycle, l'algorithme est terminé.

Il est clair que l'on obtient ainsi un arbre maximal qui est de circulation d'après le théorème précédent.

Corollaire. — *Dans un graphe f.c.c.m. tout arc de type A appartient à un cycle dont tous les autres arcs sont de type B.*

S'il n'en était pas ainsi, l'algorithme précédent permettrait en effet de construire un arbre de circulation contenant un arc de type A, ce qui est impossible.

§ 3. SUR DES CONJECTURES DE CHATY [1]

1. *La conjecture suivante a été proposée ;* tout graphe f.c.c.m. μ-minimal (c'est-à-dire ne contenant pas d'arcs de type A) possède une arborescence de circulation (c'est-à-dire un arbre de circulation possédant une racine unique).

On construit un contre-exemple de cette conjecture en exhibant un graphe f.c.c.m. μ-minimal, contenant deux arcs de type B incidents intérieurement à un même sommet. Tout arbre de circulation contient alors ces deux arcs, et ne peut être une arborescence où l'on sait que le demi-degré intérieur de chaque sommet est inférieur ou égal à 1. Sur la figure 1, ces deux arcs sont BA et CA.

On remarque que le graphe, de la figure 1, ne possède pas non plus d'arborescence de circulation inversée [arbre qui, après inversion du sens de tous ses arcs, est une arborescence].

2. *Sur une autre conjecture :* considérons un graphe fortement connexe, on appelle Δ tout ensemble d'arcs dont la suppression entraîne la disparition des circuits du graphe : si X est l'ensemble des sommets et U l'ensemble des arcs, le graphe $(X, U - \Delta)$ est sans circuit. On note Δ_m tout ensemble Δ de cardinal minimal.

On appelle *coupe du graphe* et on note $\omega^+(A)$ l'ensemble des arcs dont l'origine appartient au sous-ensemble A de X, et l'extrémité au complémentaire $\bar{A}$. Une coupe minimale est une coupe contenant le minimum d'arcs du graphe.

Un algorithme de construction d'ensembles Δ_m repose (Chaty [1]) sur la conjecture suivante :

Dans tout graphe fortement connexe, il existe un ensemble Δ_m, et il existe un arc U appartenant à Δ_m tel que U appartienne à une coupe minimale.

Le graphe de la figure 2 apporte un contre-exemple :

Le cardinal d'un ensemble Δ_m est au moins 4, car les circuits $CDIC$, $BEDB$, $ACEA$, $ABHA$ n'ont deux à deux aucun arc commun. On vérifie que l'ensemble $\{DB, CE, AB, CD\}$ est un Δ_m. Donc le cardinal de tout Δ_m est 4.

Seuls les arcs DI, IC, BM, MA appartiennent à une coupe minimale (ici de cardinal 1). Pour montrer que les autres arcs n'appartiennent pas à une coupe minimale, on utilise la méthode suivante : si BA par exemple appartenait à une coupe $\omega^+(\mathcal{F})$ de cardinal 1, on aurait $B \in \mathcal{F}$, $A \in \overline{\mathcal{F}}$ (complémentaire de $\mathcal{F}$). Or, $B \in \mathcal{F} \Rightarrow E \in \mathcal{F}$ (sinon $BE \in \omega^+(\mathcal{F})$ et cardinal $(\omega^+(\mathcal{F}))$ est supérieur à 1), de même $E \in \mathcal{F}$ entraîne $A \in \mathcal{F}$, ce qui est impossible. On opère de même pour les autres arcs.

Les arcs *DI*, *IC*, *BH*, *HA* ne peuvent appartenir à un Δ_m : après suppression de *DI* ou *IC* ou *BH* ou *HA*, il reste en effet quatre circuits n'ayant deux à deux aucun arc commun : *CDC*, *DBED*, *ACEA*, *ABA*.

Donc aucun arc d'aucun ensemble Δ_m n'appartient à une coupe minimale.

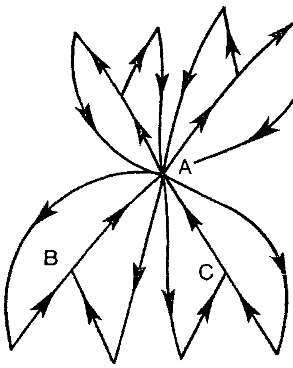

Figure 1

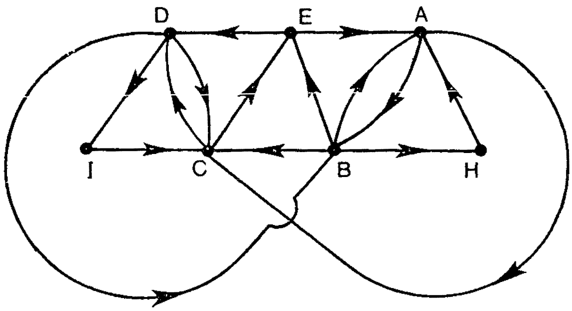

Figure 2

BIBLIOGRAPHIE

[1] C. BERGE, *Graphes et Hypergraphes*, Dunod, 1970, p. 22-39.

[2] G. CHATY, « Cheminements remarquables dans les Graphes », Thèse de Doctorat d'État, Paris, 1971.

[3] G. CHATY, *Graphes fortement connexes C-minimaux*, C.R.A.S., 266, *1968*, 907-909.

[4] G. CHATY, Graphes fortement connexes C-minimaux et graphes sans circuits co-minimaux, *J. Combinatorial Theory*. Vol. 10, n° 3, Juin 1971.