J. M. Thomas

Discrétisation des conditions aux limites dans les schémas saute-mouton

Revue française d'automatique informatique recherche opérationnelle. Mathématiques, tome 6, nº R2 (1972), p. 31-44

<http://www.numdam.org/item?id=M2AN_1972__6_2_31_0>

R.A.I.R.O.
(6e année, juillet 1972, R-2, p. 31-44)

DISCRETISATION DES CONDITIONS AUX LIMITES DANS LES SCHEMAS SAUTE-MOUTON

par J. M. THOMAS [1]

Résumé. — *En vue de la résolution numérique des systèmes d'évolution de la forme* $\frac{\partial u}{\partial t} + A\frac{\partial u}{\partial x} + Ku = f$, $0 < t < T$, $0 < x < 1$, *avec conditions aux limites mixtes, nous considérons des schémas de type saute-mouton. Des choix de discrétisation des conditions aux limites sont donnés; ils conduisent à des schémas explicites et conditionnellement stables; l'ordre de précision est étudié.*

Soit le problème modèle :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + \dfrac{\partial u}{\partial x} = f & 0 < x < 1, 0 < t < T \\ u(0, x) = u_0(x) & 0 < x < 1 \\ u(t, 0) = 0 & 0 < t < T \end{cases}$$

et cherchons à approcher sa solution par le schéma saute-mouton

$$\frac{1}{2\,\Delta t}(u_i^{n+1} - u_i^{n-1}) + \frac{1}{2\,\Delta x}(u_{i+1}^n - u_{i-1}^n) = f_i^n \quad 1 \leqslant i \leqslant I, \quad 1 \leqslant n \leqslant N$$

Les u_i^n étant donnés pour $n = 0$ et $n = 1$ il faut, pour pouvoir résoudre ce schéma des relations supplémentaires permettant l'élimination des termes u_0^n et u_{I+1}^n. Or si en $x = 0$ la discrétisation de $u = 0$ permet d'éliminer u_0^n, le problème exact ne fournit pas de conditions aux limites en $x = 1$. Il faut donc *se donner* en $x = 1$ une condition aux limites discrètes qui assure tout à la fois

(1) E.R.A. 215-Université Paris-VI.

la consistance et la stabilité du schéma. Richtmyer et Morton [5] montrent que le choix

$$u_{I+1}^n = u_I^n$$

conduit à un schéma instable, tandis que le choix

$$2u_{I+1}^n = u_I^{n+1} + u_I^{n-1}$$

donne un schéma conditionnellement stable.

On se propose de généraliser ce résultat à un système de la forme

$$\frac{\partial u}{\partial t} + A(x)\frac{\partial u}{\partial x} + K(x)u = f$$

Le schéma sera *explicite*, conditionnellement *stable*; pour une solution régulière l'erreur en norme L^2-discrète est démontrée être en $0(h^{1/2})$ au moins et les essais numériques semblent donner une erreur en $0(h)$.

Moyennant quelques hypothèses supplémentaires sur les coefficients du problème — hypothèses qui sont satisfaites dès que la matrice A est soit définie positive soit définie négative — on donnera un deuxième schéma *explicite*, conditionnellement *stable*. L'erreur en norme L^2-discrète sera démontrée être en $0(h^{3/2})$ au moins et les essais numériques semblent donner une erreur en $0(h^2)$.

1. POSITION DU PROBLEME

On cherche à résoudre le problème suivant : étant donné f et u_0 trouver $u = u(t, x)$ à valeurs dans R^p solution de

$$\frac{\partial u}{\partial t} + A(x)\frac{\partial u}{\partial x} + K(x)u = f \qquad 0 < x < 1,\ 0 < t < T \tag{1}$$

$$u(0, x) = u_0(x) \qquad 0 < x < 1 \tag{2}$$

$$u(t, x) \in \operatorname{Ker}[B(x) - M(x)] \qquad x = 0 \text{ et } x = 1,\ 0 < t < T \tag{3}$$

Les paramètres du problème A, K et M sont des matrices $p \times p$ et on a posé :

$$B(1) = +A(1) \qquad \text{et} \qquad B(0) = -A(0) \tag{4}$$

Nous supposerons toujours (i) et (ii)

(i) — la matrice $A(x)$ est symétrique pour $0 \leqslant x \leqslant 1$;
— les coefficients de $A(x)$ sont de classe $C^1(0, 1)$;
— les coefficients de $K(x)$ sont de classe $C^0(0, 1)$.

(ii) — la matrice $(M + M^*)(x)$ est semi-définie positive, $x = 0$ et $x = 1$;
— $\operatorname{Ker}(B - M)(x) + \operatorname{Ker}(B + M)(x) = R^p$, $\quad x = 0$ et $x = 1$.

Par notations, L^* désigne la matrice transposée de la matrice réelle L; et $\operatorname{Ker} L = \{X \mid LX = 0\}$.

Définition : Une fonction u de $L^2(Q)$ avec $Q =]0, T[\times]0, 1[$ est dite solution faible du problème (1) (2) (3), si pour toute fonction v de classe C^1 dans $\bar{Q}$, vérifiant la condition finale $v(T, x) = 0$ et les conditions aux limites adjointes $v(t, x) \in \operatorname{Ker}(B + M^*)(x)$ en $x = 0$ et $x = 1$, on a

$$\left(u, -\frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}(Av) + K^* v\right)_{L^2(Q)} = (f, v)_{L^2(Q)} + (u_0, v(0))_{L^2(0,1)} \tag{5}$$

Théorème 1 : Pour f donné dans $L^2(Q)$ et u_0 donné dans $L^2(0, 1)$ on a existence et unicité de la solution faible. De plus

$$u \in L\ (0, T; L^2(0, 1)).$$

Pour la démonstration, cf. Friedrichs (1) et Lax-Phillips (4).

Le problème approché :

A l'entier I, destiné à tendre vers $+\infty$, on associe le maillage de pas $h = \frac{1}{I}$ défini par :

$$x_i = ih \qquad i = -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \ldots, I - \frac{1}{2}, I + \frac{1}{2}$$

Les points $x_{-1/2}$ et $x_{I+1/2}$ sont donc extérieurs à (0, 1).

On désigne par V_h (respectivement $\hat{V}_h$) l'espace des suites finies à valeurs dans R^p :

$$v_h = (v_i)_{i=+1/2}^{i=I-1/2} \text{ (respectivement } v_h = (v_i)_{i=-1/2}^{i=I+1/2}).$$

L'espace V_h est muni du produit scalaire

$$(v_h, w_h)_h = \sum_{i=+1/2}^{I-1/2} h v_i \cdot w_i$$

où $v_i \cdot w_i$ désigne le produit scalaire de R^p; la norme associée à ce produit scalaire est notée $|v_h|_h$.

On définit l'approximation centrée $A_h \in \mathcal{L}(\hat{V}_h, V_h)$ de $A(.)\frac{\partial}{\partial x}$ par

$$\forall u_h \in \hat{V}_h \quad (A_h u_h)_i = \frac{1}{2h}\left[A_{i+1/2}(u_{i+1} - u_i) + A_{i-1/2}(u_i - u_{i-1})\right] \tag{6}$$

avec $A_j = A(jh)$.

On définit l'approximation $K_h \in \mathcal{L}(\hat{V}_h, V_h)$ de $K(.)$ par

$$\forall u_h \in \hat{V}_h \quad (K_h u_h)_i = K_i u_i \tag{7}$$

avec $K_j = K(jh)$.

Pour la discrétisation en temps, on associe à l'entier N le pas de temps $k = \frac{T}{N}\cdot$ On considère alors le schéma saute-mouton :

Étant donné u_h^0 et u_h^1 dans $\hat{V}_h$, étant donné les f_h^n dans V_h pour $n = 1, ..., N - 1$, trouver les u_h^n dans $\hat{V}_h$, $n = 2, ..., N$ solutions du schéma :

$$\frac{1}{2k}(u_h^{n+1} - u_h^{n-1}) + A_h u_h^n + K_h u_h^n = f_h^n \qquad n = 1, ..., N - 1. \tag{8}$$

Le problème est ainsi mal posé et il faut se donner des conditions aux limites discrètes. Le terme en $u_{-1/2}^n$ n'intervenant dans (8) que par $A(0)u_{-1/2}^n$, le choix le plus simple de conditions aux limites discrètes consistant à

$$[A(0) + M(0)]\, u(t, 0) = 0$$

et permettant d'éliminer $A(0)u_{-1/2}^n$ semble être

$$A(0)u_{-1/2}^n + M(0)u_{1/2}^n = 0$$

C'est le choix qui est fait par Lascaux (3) pour résoudre le problème par un schéma implicite du type Crank-Nicolson. Mais pour le schéma saute-mouton ce choix conduit à un schéma généralement instable.

Les majorations d'énergie vont nous suggérer quels choix faire.

2. UN LEMME

Les corollaires du résultat préliminaire suivant seront essentiels dans la suite.

A l'opérateur $A_h \in \mathcal{L}(\hat{V}_h, V_h)$ on associe $A_h^0 \in \mathcal{L}(V_h, V_h)$ défini par

$$2(A_h^0 u_h, v_h)_h = 2(A_h u_h, v_h) + A(0)u_{-1/2} \cdot v_{1/2} - A(1)u_{I+1/2} \cdot v_{I+1/2} \tag{9}$$

Lemme 1. Il existe une constante C indépendante de h et de k telle que si

$$\frac{1}{2k}(u_h^{n+1} - u_h^{n-1}) + A_h u_h^n + K_h u_h^n = f_h^n \tag{8}$$

on ait la majoration :

$$\begin{aligned}(10)\quad & \frac{1}{k}(|u_h^{n+1}|_h^2 - |u_h^{n-1}|_h^2) + 2(A_h^0 u_h^n, u_h^{n+1})_h - 2(A_h^0 u_h^{n-1}, u_h^n)_h + \\ & + A(1)u_{I+1/2}^n \cdot (u_{I-1/2}^{n+1} + u_{I-1/2}^{n-1}) - A(0)u_{-1/2}^n \cdot (u_{1/2}^{n+1} + u_{1/2}^{n-1}) \\ & \leqslant |f_h^n|_h^2 + C(|u_h^{n+1}|_h^2 + |u_h^n|_h^2 + |u_h^{n-1}|_h^2)\end{aligned}$$

* C désignera diverses constantes indépendantes de h et de k.

Démonstration. Multiplions scalairement dans V_h l'équation (8) par $u_h^{n+1} + u_h^{n-1}$:

$$\frac{1}{k}\left(|u_h^{n+1}|_h^2 - |u_h^{n-1}|_h^2\right) + 2(A_h u_h^n, u_h^{n+1} + u_h^{n-1})_h = 2(f_h^n - K_h u_h^n, u_h^{n+1} + u_h^{n-1})_h.$$

A l'aide d'une intégration par parties discrète on vérifie :

$$\begin{aligned}2(A_h u_h^n, u_h^{n-1})_h + 2(u_h^n, A_h u_h^{n-1})_h &= 2(u_h^n, \nabla A_h u_h^{n-1})_h + \\ &+ u_{I+1/2}^n \cdot A(1) u_{I-1/2}^{n-1} + u_{I-1/2}^n \cdot A(1) u_{I+1/2}^{n-1} \\ &- u_{1/2}^n \cdot A(0) u_{-1/2}^n - u_{-1/2}^n \cdot A(0) u_{1/2}^{n-1}\end{aligned}$$

où l'opérateur ∇A_h est défini par

$$(\nabla A_h v_h)_i = \frac{1}{h}(A_{i+1/2} - A_{i-1/2}) v_i \qquad i = 1/2, \ldots, I - 1/2.$$

Les hypothèses de régularité faites en (i) conduisent ainsi à la majoration :

$$\begin{aligned}&\frac{1}{k}\left(|u_h^{n+1}|_h^2 - |u_h^{n-1}|_h^2\right) + 2(A_h u_h^n, u_h^{n+1})_h - 2(A_h u_h^{n-1}, u_h^n)_h + \\ &+ u_{I+1/2}^n \cdot A(1) u_{I-1/2}^{n-1} + u_{I-1/2}^n \cdot A(1) u_{I+1/2}^{n-1} - u_{1/2}^n \cdot A(0) u_{-1/2}^n \\ &- u_{-1/2}^n \cdot A(0) u_{1/2}^{n-1} \leqslant |f_h^n|_h^2 + C\left(|u_h^{n+1}|_h^2 + |u_h^n|_h^2 + |u_h^{n-1}|_h^2\right).\end{aligned}$$

Majoration qui n'est autre que celle donnée dans (10) lorsque l'on fait intervenir l'opérateur A_h^0 défini par (9).

Corollaire 1. Soient $(u_h^{n-1}, u_h^n, u_h^{n+1})$ vérifiant

$$(11) \qquad \begin{cases} \dfrac{1}{2k}(u_h^{n+1} - u_h^{n-1}) + A_h u_h^n + K_h u_h^n = f_h^n \\ 2A(1) u_{I+1/2}^n = M(1)(u_{I-1/2}^{n+1} + u_{I-1/2}^{n-1}) \\ -2A(0) u_{-1/2}^n = M(0)(u_{1/2}^{n+1} + u_{1/2}^{n-1}) \end{cases}$$

On a alors la majoration

$$(12) \quad \begin{aligned}&\frac{1}{k}\left(|u_h^{n+1}|_h^2 - |u_h^{n-1}|_h^2\right) + 2(A_h^0 u_h^n, u_h^{n+1})_h - 2(A_h^0 u_h^{n-1}, u_h^n)_h \leqslant \\ &\leqslant |f_h^n|_h^2 + C\left(|u_h^{n+1}|_h^2 + |u_h^n|_h^2 + |u_h^{n-1}|_h^2\right).\end{aligned}$$

Démonstration : $M \dotplus M^*$ est semi-défini positif par hypothèse.

Plus généralement, on a le

Corollaire 2. Soient $(u_h^{n-1}, u_h^n, u_h^{n+1})$ vérifiant

$$(13)\quad \begin{cases} \frac{1}{2k}(u_h^{n+1} - u_h^{n-1}) + A_h u_h^n + K_h u_h^n = f_h^n \\ 2A(1)u_{I+1/2}^n = M(1)(u_{I-1/2}^{n+1} + u_{I-1/2}^{n-1}) + h\Big(P_1 f_{I-1/2}^n \\ \qquad\qquad + Q_1 u_{I-1/2}^n - \frac{2}{k} R_1(u_{I-1/2}^{n+1} - u_{I-1/2}^{n-1})\Big) \\ -2A(0)u_{-1/2}^n = M(0)(u_{1/2}^{n+1} + u_{1/2}^{n-1}) \\ \qquad\qquad + h\Big(P_0 f_{1/2}^n + Q_0 u_{1/2}^n - \frac{2}{k} R_0(u_{1/2}^{n+1} - u_{1/2}^{n-1})\Big) \end{cases}$$

où les matrices P_1, P_0, Q_1 et Q_0 sont quelconques et les matrices R_1 et R_0 sont symétriques; on a la majoration suivante avec C_1 dépendant de P_1 et P_0 et C_2 dépendant de Q_1 et Q_0 :

$$(14)\quad \begin{aligned} &\frac{1}{k}(|u_h^{n+1}|_h^2 - hR_1 u_{I-1/2}^{n+1} \cdot u_{I-1/2}^{n+1} - hR_0 u_{1/2}^{n+1} \cdot u_{1/2}^{n+1}) \\ &\quad - \frac{1}{k}(|u_h^{n-1}|_h^2 - hR_1 u_{I-1/2}^{n-1} \cdot u_{I-1/2}^{n-1} - hR_0 u_{1/2}^{n-1} \cdot u_{1/2}^{n-1}) \\ &\quad + 2(A_h^0 u_h^n, u_h^{n+1})_h - 2(A_h^0 u_h^{n-1}, u_h^n)_h \\ &\quad \leqslant C_1 |f_h^n|_h^2 + C_2(|u_h^{n+1}|_h^2 + |u_h^n|_h^2 + |u_h^{n-1}|_h^2) \end{aligned}$$

Dans le paragraphe suivant nous étudierons le schéma saute-mouton relatif à (11). De la majoration (12) nous obtiendrons une condition suffisante de stabilité du schéma. Le schéma ainsi obtenu sera peu précis; nous améliorerons la précision avec un schéma du type (13).

REMARQUE. A l'opérateur $A_h \in \mathcal{L}(\hat{V}_h, V_h)$ on associe $A_h^M \in \mathcal{L}(V_h, V_h)$ défini par

$$(9\ bis)\quad \begin{aligned} 2(A_h^M u_h, v_h) = 2(A_h u_h, v_h) &+ (M(1)u_{I-1/2} - A(1)u_{I+1/2}) \cdot v_{I-1/2} \\ &+ (M(0)u_{1/2} + A(0)u_{-1/2}) \cdot v_{1/2} \end{aligned}$$

La majoration analogue à (10) faisant intervenir l'opérateur A_h^M est :

$$(10\ bis)\quad \begin{aligned} &\frac{1}{k}(|u_h^{n+1}|_h^2 - |u_h^{n-1}|_h^2) + 2(A_h^M u_h^n, u_h^{n+1})_h - 2(A_h^M u_h^{n-1}, u_h^n)_h \\ &\quad + (A(1)u_{I+1/2}^n - M(1)u_{I-1/2}^n) \cdot u_{I-1/2}^{n+1} \\ &\quad + (A(1)u_{I+1/2}^n + M^*(1)u_{I-1/2}^n) \cdot u_{I-1/2}^{n-1} \\ &\quad + (-A(0)u_{-1/2}^n - M(0)u_{1/2}^n) \cdot u_{1/2}^{n+1} \\ &\quad + (-A(0)u_{-1/2}^n + M^*(0)u_{1/2}^n) \cdot u_{1/2}^{n-1} \\ &\quad \leqslant |f_h^n|_h^2 + C(|u_h^n|_h^2 + |u_h^{n+1}|_h^2 + |u_h^{n-1}|_h^2) \end{aligned}$$

Le choix

$$(11\ bis)\quad A(1)u^n_{I+1/2} = M(1)u^n_{I-1/2} \quad \text{et} \quad -A(0)u^n_{-1/2} = M(0)u^n_{1/2}$$

conduit *si* les matrices $M(1)$ et $M(0)$ sont antisymétriques à

$$(12\ bis)\quad \frac{1}{k}(\,|u_h^{n+1}|_h^2 - |u_h^{n-1}|_h^2) + 2(A_h^M u_h^n, u_h^{n+1})_h - 2(A_h^M u_h^{n-1}, u_h^n)_h \leqslant |f_h^n|_h^2 + C(\,|u_h^{n+1}|_h^2 + |u_h^n|_h^2 + |u_h^{n-1}|_h^2)$$

On peut *alors* démontrer que le schéma saute-mouton avec les conditions aux limites discrètes (11 *bis*) est conditionnellement stable.

3. SCHEMA SAUTE-MOUTON 1

On désigne par SM1 le schéma défini par :

$$(11)\quad \begin{cases} \dfrac{1}{2k}(u_h^{n+1} - u_h^{n-1}) + A_h u_h^n + K_h u_h^n = f_h^n \qquad n = 1, \ldots, N-1 \\ 2A(1)u^n_{I+1/2} = M(1)(u^{n+1}_{I-1/2} + u^{n-1}_{I-1/2}) \\ -2A(0)u^n_{-1/2} = M(0)(u^{n+1}_{1/2} + u^{n-1}_{1/2}) \end{cases}$$

REMARQUE : Le schéma SM1 est explicite.

L'élimination des points extérieurs conduit en effet aux équations :

$$\frac{1}{2k}\left(I + \frac{k}{2h}M(0)\right)u^{n+1}_{1/2} - \frac{1}{2k}\left(I - \frac{k}{2h}M(0)\right)u^{n-1}_{1/2} + \frac{1}{2h}A(h)(u^n_{3/2} - u^n_{1/2}) + \frac{1}{2h}A(0)u^n_{1/2} + K\left(\frac{h}{2}\right)u^n_{1/2} = f^n_{1/2}.$$

$$\frac{1}{2k}(u_i^{n+1} - u_i^{n-1}) + \frac{1}{2h}A_{i+1/2}(u^n_{i+1} - u^n_i) + \frac{1}{2h}A_{i-1/2}(u^n_i - u^n_{i-1}) + K_i u^n_i = f^n_i$$

pour $i = \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \ldots, I - \frac{3}{2}$

$$\frac{1}{2k}\left(I + \frac{k}{2h}M(1)\right)u^{n+1}_{I-1/2} - \frac{1}{2k}\left(I - \frac{k}{2h}M(1)\right)u^{n-1}_{I-1/2} + \frac{1}{2h}A(1-h)(u^n_{I-1/2} - u^n_{I-3/2}) - \frac{1}{2h}A(1)u^n_{I-1/2} + K\left(1 - \frac{h}{2}\right)u^n_{I-1/2} = f^n_{I-1/2}$$

Il n'y a que les deux matrices $\left(I + \frac{k}{2h} M\right)$ à inverser, ce qui est possible puisque $(M + M^*)$ est semi-définie positive.

Théorème 2

Sous la condition de stabilité

(15) $$k \, \|A_h^0\|_{\mathcal{L}(V_h)} \leqslant \sqrt{1 - \eta}, \qquad \eta > 0$$

le schéma SM1 est stable dans L_2, c'est-à-dire qu'il existe une constante C indépendante de h et de k telle que

(16) $$|u_h^n|_h^2 \leqslant C\{ |u_h^0|_h^2 + |u_h^1|_h^2 + \sum_{s=1}^{n-1} k \, |f_h^s|_h^2 \}, \quad n = 2, \ldots, N$$

Cette condition (15) sera supposée satisfaite dans toute la suite.

Démonstration. Posant

$$\Phi^n = |u_h^n|_h^2 + |u_h^{n-1}|_h^2 + 2k(A_h^0 u_h^{n-1}, u_h^n)_h$$

la majoration (12) du Corollaire 1 s'écrit :

$$\frac{1}{k}(\Phi^{n+1} - \Phi^n) \leqslant |f_h^n|_h^2 + C(|u_h^{n+1}|_h^2 + |u_h^n|_h^2 + |u_h^{n-1}|_h^2)$$

d'où par sommation sur l'indice n (... et C désignant toute constante)

(17) $$\Phi^{n+1} \leqslant \Phi^1 + \sum_{s=1}^{n} k \, |f_h^s|_h^2 + Ck \sum_{s=0}^{n+1} |u_h^s|_h^2$$

Grâce à la condition de stabilité (15) on a :

$$\Phi^n \geqslant \eta \, |u_h^n|_h^2$$
$$\Phi^1 \leqslant 2 \, |u_h^0|_h^2 + 2 \, |u_h^1|_h^2$$

donc la majoration (17) implique

(18) $$\eta \, |u_h^{n+1}|_h^2 \leqslant 2 \, |u_h^0|_h^2 + 2 \, |u_h^1|_h^2 + \sum_{s=1}^{n} k \, |f_h^s|_h^2 + Ck \sum_{s=0}^{n+1} |u_h^s|_h^2$$

Il reste à appliquer le lemme de Gronwall discret pour obtenir la stabilité (16).

Désignant par $q_h u_h^n$ la fonction étagée dans (0,1) valant u_i^n dans $\left]\left(i-\frac{1}{2}\right)h,\right.$ $\left.\left(i+\frac{1}{2}\right)h\right[$ et par $q_{hk}(u_h^n)$ la fonction étagée dans Q valant $q_h u_h^n$ dans

$$]nk, (n+1)k\,[\mathrm{x}]0, 1[$$

on a [cf. Lascaux (3) ou Katsanis (2)] le :

Théorème 3 : Si $q_{hk}(f_h^n)$ converge vers f dans $L^2(Q)$ faible et si $q_h u_h^0$ et $q_h u_h^1$ convergent vers u_0 dans $L^2(0, 1)$ faible, alors $q_{hk}(u_h^n)$ converge dans $L^2(Q)$ faible vers u, la solution faible du problème exact.

Passons à l'étude de l'ordre de convergence. La solution u du problème exact est supposée de classe C^3 ; on cherche à évaluer l'erreur e_h^n.

$$e_h^n = u_h^n - \tilde{u}_h^n, \qquad \text{avec} \qquad \tilde{u}_i^n = u(nk, ih) \text{ et } u_h^n \text{ solution de SM1}$$

Le second membre étant continu, nous supposons pour alléger l'écriture

$$f_i^n = f(nk, ih)$$

Proposition 1 : Sous les hypothèses précédentes, on a

$$|e_h^n|_h^2 \leqslant C(|e_h^0|_h^2 + |e_h^1|_h^2 + h) \tag{19}$$

Démonstration. Par linéarité, e_h^n est solution du schéma

$$\frac{1}{2k}\left(I + \frac{k}{2h}M(0)\right)e_{1/2}^{n+1} - \frac{1}{2k}\left(I - \frac{k}{2h}M(0)\right)e_{1/2}^{n-1}$$
$$+ \frac{1}{2h}A(h)(e_{3/2}^n - e_{1/2}^n) + \frac{1}{2h}A(0)e_{1/2}^n + K\left(\frac{h}{2}\right)e_{1/2}^n = g_{1/2}^n$$

avec

$$g_{1/2}^n \doteq f_{1/2}^n - \frac{1}{2k}\left(I + \frac{k}{2h}M(0)\right)\tilde{u}_{1/2}^{n+1} + \frac{1}{2k}\left(I - \frac{k}{2h}M(0)\right)\tilde{u}_{1/2}^{n-1}$$
$$- \frac{1}{2h}A(h)(\tilde{u}_{3/2}^n - \tilde{u}_{1/2}^n) - \frac{1}{2h}A(0)\tilde{u}_{1/2}^n - K\left(\frac{h}{2}\right)\tilde{u}_{1/2}^n$$

une équation analogue pour $e_{I-1/2}^{n+1}$ et pour $i = \frac{3}{2}, \ldots, I - \frac{3}{2}$

$$\frac{1}{2k}(e_i^{n+1} - e_i^{n-1}) + \frac{1}{2h}A_{i+1/2}(e_{i+1}^n - e_i^n) + \frac{1}{2h}A_{i-1/2}(e_i^n - e_{i-1}^n) + K_i e_i^n = g_i^n$$

avec

$$g_i^n = f_i^n - \frac{1}{2k}(\tilde{u}_i^{n+1} - \tilde{u}_i^{n-1}) - \frac{1}{2h}A_{i+1/2}(\tilde{u}_{i+1}^n - \tilde{u}_i^n)$$
$$- \frac{1}{2h}A_{i-1/2}(\tilde{u}_i^n - \tilde{u}_{i-1}^n) - K_i\tilde{u}^n$$

La majoration de stabilité (16) s'écrit :

$$|e_h^n|_h^2 \leqslant C\{|e_h^0|_h^2 + |e_h^1|_h^2 + \sum_{s=1}^{n-1} k\,|g_h^s|_h^2\} \tag{20}$$

Par développement de Taylor, on vérifie

$$\left\{\begin{array}{ll} g_{1/2}^n = \frac{1}{4}(A(0) - M(0))\frac{\partial u}{\partial x}(nk, 0) + 0(h) & \\ |g_i^n| \leqslant Ch^2 & i = \frac{3}{2}, \dots, I - \frac{3}{2} \\ g_{I-1/2}^n = \frac{1}{4}(A(1) + M(1))\frac{\partial u}{\partial x}(nk, 1) + 0(h) & \end{array}\right. \tag{21}$$

d'où

$$|g_h^n|_h^2 \leqslant Ch \qquad n = 1, \dots, N-1$$

et en reportant cette estimation dans (20) on obtient le résultat annoncé.

Remarque. On peut interpréter le choix des conditions aux limites discrètes du SM1 comme une discrétisation de la condition aux limites

$$(B - M)u + \frac{h}{2}(B + M)\frac{\partial u}{\partial n} = 0$$

La solution exacte vérifiant l'équation $A\frac{\partial u}{\partial x} = f - \frac{\partial u}{\partial t} + Ku$, on peut chercher un schéma plus précis correspondant à une discrétisation de la condition aux limites

$$(B - M)u + \frac{h}{2}(B + M)\frac{\partial u}{\partial n} - \frac{h}{2}(I + MB^{-1})\left(f - \frac{\partial u}{\partial t} - Ku\right) = 0.$$

La discrétisation sera faite de sorte que l'on puisse appliquer le corollaire 2 du lemme 1.

4. SCHEMA SAUTE-MOUTON 2

Les hypothèses i) et ii) sont complétées par

Hypothèses iii)

- la matrice $B(x)$ est inversible, $x = 0$ et $x = 1$.
- la matrice $B(x)M(x)$ est symétrique, $x = 0$ et $x = 1$.

Remarque. Ces hypothèses sont satisfaites dans le cas où $A(x)$ est définie pour $x = 0$ et $x = 1$ puisqu'alors $M = |A|$ et $BM = \pm A^2$ est symétrique.

On désigne par SM2 le schéma défini par :

$$(22)\quad \begin{cases} \dfrac{1}{2k}(u_h^{n+1} - u_h^{n-1}) + A_h u_h^n + K_h u_h^n = f_h^n \qquad n = 1, \dots, N-1 \\ 2A(1)u_{I+1/2}^n = M(1)(u_{I-1/2}^{n+1} + u_{I-1/2}^{n-1}) \\ \qquad + h(I + M(1)A^{-1}(1))\left(f_{I-1/2}^n - K_{I-1/2}u_{I-1/2}^n - \dfrac{u_{I-1/2}^{n+1} - u_{I-1/2}^{n-1}}{2k}\right) \\ -2A(0)u_{-1/2}^n = M(0)(u_{1/2}^{n+1} + u_{1/2}^{n-1}) \\ \qquad + h(I - M(0)A^{-1}(0))\left(f_{1/2}^n - K_{1/2}u_{1/2}^n - \dfrac{u_{1/2}^{n+1} - u_{1/2}^{n-1}}{2k}\right) \end{cases}$$

REMARQUE : Le schéma SM2 est explicite :

Posant pour $x = 0$ et $x = 1$

$$(23)\qquad F(x) = \frac{1}{4}(3I - M(x)B^{-1}(x))$$

les équations aux points intérieurs sont

$$\frac{1}{2k}\left(F(0) + \frac{k}{2h}M(0)\right)u_{1/2}^{n+1} - \frac{1}{2k}\left(F(0) - \frac{k}{2h}M(0)\right)u_{1/2}^{n-1}$$
$$+ \frac{1}{2h}A(h)(u_{3/2}^n - u_{1/2}^n) + \frac{1}{2h}A(0)u_{1/2}^n + F(0)K\left(\frac{h}{2}\right)u_{1/2}^n = F(0)f_{1/2}^n$$

$$\frac{1}{2k}(u_i^{n+1} - u_i^{n-1}) + \frac{1}{2h}A_{i+1/2}(u_{i+1}^n - u_i^n) + \frac{1}{2h}A_{i-1/2}(u_i^n - u_{i-1}^n) + K_i u_i^n = f_i^n$$

pour $i = \dfrac{3}{2}, \dots, I - \dfrac{3}{2}$

$$\frac{1}{2k}\left(F(1) + \frac{k}{2h}M(1)\right)u_{I-1/2}^{n+1} - \frac{1}{2k}\left(F(1) - \frac{k}{2h}M(1)\right)u_{I-1/2}^{n-1}$$
$$+ \frac{1}{2h}A(1-h)(u_{I-1/2}^n - u_{I-3/2}^n)$$
$$- \frac{1}{2h}A(1)u_{I-1/2}^n + F(1)K\left(1 - \frac{h}{2}\right)u_{I-1/2}^n = F(1)f_{I-1/2}^n$$

Il n'y a que 2 matrices à inverser, comme pour le SM1; le lemme suivant assure la non-singularité des $F + \dfrac{k}{2h}M$.

Lemme 2. La matrice F définie par (23) est symétrique et $(2F - I)$ est une matrice semi-définie positive.

Démonstration : La matrice B étant symétrique, la symétrie de F équivaut à celle de la matrice BM. La démonstration de $(2F—I)$ semi-définie positive se ramène à montrer :

$$\forall v \in R^p \qquad B(M - B)v \cdot v \leqslant 0$$

Soit donc v quelconque dans R^p. Grâce à ii) on peut écrire

$$v = v_1 + v_2 \quad , \quad \text{avec} \quad v_1 \in \operatorname{Ker}(B - M) \quad \text{et} \quad v_2 \in \operatorname{Ker}(B + M)$$

d'où

$$\begin{aligned} B(M - B)v \cdot v &= (M - B)v_2 \cdot (Bv_1 + Bv_2) \\ &= 2Mv_2 \cdot (Mv_1 - Mv_2) \\ &\leqslant 2Mv_2 \cdot Mv_1 \end{aligned}$$

Puisque v_2 est dans Ker $(B + M)$ on a

$$Mv_2 \cdot Mv_1 = -Bv_2 \cdot Mv_1 = -v_2 \cdot BMv_1$$

Puisque v_1 est dans Ker $(B - M)$ on a

$$Mv_2 \cdot Mv_1 = Mv_2 \cdot Bv_1 = +BMv_2 \cdot v_1$$

Avec la symétrie de la matrice (BM) on déduit de ces 2 égalités

$$Mv_2 \cdot Mv_1 = 0$$

ce qui démontre $B(M - B)v \cdot v \leqslant 0$

On ne peut espérer plus car si B est défini négatif, alors $M = +B$ soit $2F = I$.

On désigne par $\mathcal{F}_h$ l'endomorphisme de V_h défini par

$$(24) \qquad (\mathcal{F}_h v_h)_i = F_i v_i \quad \text{avec} \quad \left| \begin{array}{ll} F_{1/2} = F(0) & \\ F_i = I & i = \frac{3}{2}, \ldots, I - \frac{3}{2} \\ F_{I-1/2} = F(1) & \end{array} \right.$$

D'après le lemme 2, $\mathcal{F}_h$ est inversible et

$$(25) \qquad |v_h|_{*h} = (\mathcal{F}_h v_h, v_h)_h^{1/2}$$

définit sur V_h une norme uniformément en h équivalente à la norme $|v_h|_h$.

Si $L \in \mathcal{L}(V_h, V_h)$, $\|L\|_{\mathcal{L}(V_h,*)}$ désignera la norme subordonnée :

$$(26) \qquad \|L\|_{\mathcal{L}(V_h,*)} = \operatorname*{Sup}_{\substack{v_h \in V_h \\ v_h \neq 0}} \frac{|Lv_h|_{*h}}{|v_h|_{*h}}$$

Théorème 4 :

Sous la condition de stabilité

$$k \, \|\mathcal{F}_h^{-1} A_h^0\|_{\mathcal{L}(V_h,*)} \leqslant \sqrt{1-\eta} \qquad \eta > 0 \tag{27}$$

le schéma SM2 est stable dans L_2, c'est-à-dire qu'il existe une constante C indépendante de h et de k telle que

$$|u_h^n|_h^2 \leqslant C \left\{ |u_h^0|_h^2 + |u_h^1|_h^2 + \sum_{s=1}^{n-1} k \, |f_h^s|_h^2 \right\} \qquad n = 2, \dots, N \tag{28}$$

Démonstration : Posant

$$\psi^n = |u_h^n|_{*h}^2 + |u_h^{n-1}|_{*h}^2 + 2k(A_h^0 u_h^{n-1}, u_h^n)_h$$

la majoration (14) du corollaire 2 s'écrit :

$$\frac{1}{k}(\psi^{n+1} - \psi^n) \leqslant C(|f_h^n|_h^2 + |u_h^{n+1}|_h^2 + |u_h^n|_h^2 + |u_h^{n-1}|_h^2)$$

Sous la condition de stabilité (27), on a :

$$\psi^n \geqslant \eta \, |u_h^n|_{*h}^2$$

$$\psi^1 \leqslant 2 \, |u_h^0|_{*h}^2 + 2 \, |u_h^1|_{*h}^2$$

d'où

$$\eta \, |u_h^{n+1}|_{*h}^2 \leqslant 2 \, |u_h^0|_{*h}^2 + 2 \, |u_h^1|_{*h}^2 + C \sum_{s=1}^{n} k \, |f_h^s|_h^2 + Ck \sum_{s=0}^{n+1} |u_h^s|_h^2.$$

Grâce à l'équivalence uniforme en h des deux normes $|\cdot|_h$ et $|\cdot|_{*h}$, on en déduit :

$$|u_h^{n+1}|_h^2 \leqslant C \left\{ |u_h^0|_h^2 + |u_h^1|_h^2 + \sum_{s=1}^{n} k \, |f_h^s|_h^2 + k \sum_{s=0}^{+1} |u_h^s|_h^2 \right\}$$

L'application du lemme de Gronwall discret permet de conclure comme pour le théorème 1.

L'intérêt de ce schéma va résulter de la proposition suivante. Comme pour l'étude faite pour le SM1 nous supposons la solution u de classe C^3. le second membre discrétisé exactement : $f_i^n = f(nk, ih)$ et on pose

$$e_h^n = u_h^n - \tilde{u}_h^n \quad \text{avec} \quad \tilde{u}_i^n = u(nk, ih), \quad u_h^n \text{ solution du SM2}$$

La condition de stabilité (27) est supposée satisfaite.

Proposition 2 : Sous les hypothèses précédentes, on a

$$|e_h^n|_h^2 \leqslant C(|e_h^0|_h^2 + |e_h^1|_h^2 + h^3) \tag{29}$$

Démonstration analogue à celle de la proposition 1.

BIBLIOGRAPHIE

[1] K. O. Friedrichs, « Symmetric Positive Linear Differential Equations », *Commun. of Pure and Applied Mathematics*, vol. XI, 1958, pp. 333-418.

[2] T. Katsanis, « Numerical Solutions of symmetric positive differential Equations », *Math. Comp.*, vol. 22, 1968, pp. 763-783.

[3] P. Lascaux, Thèse de Doctorat d'État, Paris, 1971.

[4] P. D. Lax et R. S. Phillips, « Local Boundary Conditions for Dissipative Symmetric Linear Differential Operators », *Commun. of Pure and Applied Mathematics*, vol. XIII, 1960, pp. 427-455.

[5] Richtmyer et Morton, Difference Methods for Initial Value Problems. Interscience Publishers, 2nd Edition, New-York, 1968.