

J. F. DURAND

**L'algorithme de Gauss-Seidel appliqué à un
problème unilatéral non symétrique**

Revue française d'automatique informatique recherche opérationnelle. Mathématiques, tome 6, n° R2 (1972), p. 23-30

http://www.numdam.org/item?id=M2AN_1972__6_2_23_0

© AFCET, 1972, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Revue française d'automatique informatique recherche opérationnelle. Mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

L'ALGORITHME DE GAUSS-SEIDEL APPLIQUE A UN PROBLEME UNILATERAL NON SYMETRIQUE

par J. F. DURAND (1)

Résumé. — Il s'agit ici de montrer que la méthode de Gauss-Seidel permet de déterminer l'élément u de \mathbb{R}^n tel que

$$\begin{aligned} Au - b &\leq 0 \\ u - a &\leq 0 \\ (Au - b, u - a)_{\mathbb{R}^n} &= 0, \end{aligned}$$

lorsque la matrice A est une M -matrice pas forcément symétrique.

Les méthodes de relaxation, plus particulièrement la méthode de Gauss-Seidel permettent de déterminer la solution u d'un problème numérique de minimisation d'une fonctionnelle quadratique $J(v)$ sur un cône convexe fermé K (J. Céa [1], [2]),

$$\begin{aligned} J(v) &= (Av, v)_{\mathbb{R}^N} - 2(b, v)_{\mathbb{R}^N} \\ K &= \{ v \in \mathbb{R}^N \mid v - a \leq 0 \}. \end{aligned}$$

où a et b sont deux vecteurs de \mathbb{R}^N et A une matrice de type $N \times N$, symétrique et coercive. Ce problème est équivalent à déterminer u tel que

$$\begin{aligned} Au - b &\leq 0 \\ u - a &\leq 0 \\ (Au - b, u - a)_{\mathbb{R}^N} &= 0. \end{aligned}$$

Le présent travail montre que la méthode de Gauss-Seidel permet de résoudre un problème de ce dernier type dans lequel l'hypothèse de symétrie de la matrice A

(1) Maître-Assistant à l'I.U.T. de Nîmes-Montpellier.

est abandonnée. La convergence de cette méthode et l'unicité de la solution sont montrées en prenant pour ensemble des solutions possibles

$$\Omega = \{ v \in \mathbb{R}^N / Av - b \leq 0 \quad \text{et} \quad v - a \leq 0 \},$$

et en supposant que la matrice A est une M matrice.

L'algorithme étudié ici généralise en fait la version discrète (J. F. Durand [5]) de l'algorithme de l'harmonisation conditionnelle (J. J. Moreau [6]) pour la résolution de problèmes aux limites unilatéraux.

D'autre part, je tiens à remercier M. B. Lemaire pour ses conseils et son aide précieuse.

1. PROBLEME

Étant donné deux éléments a et b de \mathbb{R}^N , a pouvant cependant être $+\infty$, et une matrice A réelle de type $N \times N$, trouver x de \mathbb{R}^N tel que :

$$Ax - b \leq 0 \quad (1.1)$$

$$x - a \leq 0 \quad (1.2)$$

$$(Ax - b, x - a) = 0. \quad (1.3)$$

Les conditions (1.1) et (1.2) signifient que les composantes des vecteurs $Ax - b$ et $x - a$ sont négatives ou nulles. La nullité du produit scalaire dans (1.3) associée à (1.1) et (1.2) signifie que pour toute composante de $x - a$ non nulle, la composante correspondante de $Ax - b$ est nulle.

$$\{ Ax - b \}_i \{ x - a \}_i = 0 \quad \text{pour tout} \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (1.4)$$

On supposera que A est une M matrice (R. S. Varga [3]), c'est-à-dire satisfait aux conditions suivantes :

- A est une Z matrice, i.e., A est une matrice à coefficients diagonaux positifs et coefficients hors diagonaux négatifs ou nuls.

$$a_{ii} > 0 \quad \text{et} \quad a_{ij} \leq 0 \quad \text{si} \quad i \neq j. \quad (1.5)$$

- A est régulière et $A^{-1} \geq 0$. (1.6)

REMARQUE : Si a est suffisamment grand, c'est-à-dire,

$$a \geq A^{-1}b$$

la solution x sera celle d'un problème linéaire classique :

$$Ax = b.$$

2. ENSEMBLE Ω DES SOLUTIONS POSSIBLES

Soit Ω l'ensemble suivant :

$$\Omega = \{ y \in \mathbf{R}^N / Ay - b \leq 0 \quad \text{et} \quad y - a \leq 0 \}.$$

On vérifie aisément que Ω est convexe, fermé et que :

$$\forall y \in \Omega \quad (Ay - b, y - a) \geq 0. \quad (2.1)$$

Le vecteur b étant fini, la condition (1.6) implique que Ω est borné supérieurement

$$\forall y \in \Omega \quad y_i \leq \inf (a_i, \{ A^{-1} b \}_i) \quad i = 1, 2, \dots, N.$$

Montrons que Ω est non vide. La matrice A étant carrée $N \times N$ et régulière, l'ensemble $P = \{ y \in \mathbf{R}^N / Ay - b \leq 0 \}$ est un cône convexe polyédrique de sommet $A^{-1}b$ et d'intérieur non vide. D'autre part d'après (1.6)

$$\forall y \in P \quad y \leq A^{-1} b. \quad (2.2)$$

Soit z un point intérieur à P (tel que $Az < b$, p.e., $z = A^{-1}(b - \varepsilon)$ où ε est un vecteur > 0), considérons la demi droite D issue de $A^{-1} b$, passant par z .

$$D = \{ y \in \mathbf{R}^N / y = A^{-1} b + \lambda(z - A^{-1} b) \quad , \quad \lambda \in \mathbf{R}_+ \}.$$

Puisque z est intérieur à P et d'après (2.2)

$$z - A^{-1} b < 0.$$

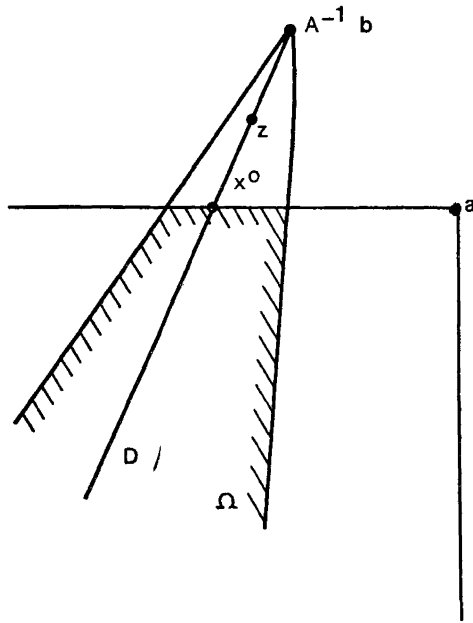
L'intersection de D avec le translaté de l'orthon négatif

$$\{ y \in \mathbf{R}^N / y \leq a \}$$

est donc non vide; on peut prendre pour cela :

$$\lambda \geq \max \left\{ 0, \max_{i=1, \dots, N} \frac{\{ a - A^{-1} b \}_i}{\{ z - A^{-1} b \}_i} \right\}. \quad (2.3)$$

Pour obtenir un point de Ω , on pourra prendre, par exemple, le point x^0 de D correspondant à l'égalité dans (2.3).



3. CARACTERISATION DE LA SOLUTION DU PROBLEME

Proposition 1 : Si x est solution du problème, c'est le plus grand élément de Ω .

Démonstration :

Montrons d'abord que si x existe :

$$x = \sup_{y \in \Omega} y. \tag{3.1}$$

Soit $I = \{ i \in \{ 1, 2, \dots, N \} / x_i < a_i \}$.

Pour tout $i \notin I$ $x_i = a_i \geq y_i$, ce qui montre (3.1) quel que soit i n'appartenant pas à I ; en particulier lorsque l'ensemble I est vide, (3.1) est vérifiée pour toutes les composantes.

Les conditions (1.4) impliquent

$$\{ Ax - b \}_i = 0 \quad \text{pour tout } i \in I,$$

ou encore en posant

$$z = y - x, \tag{3.2}$$

$$\forall y \in \Omega, \text{ pour tout } i \in I \sum_{j=1}^N a_{ij} z_j \leq 0.$$

Rappelons maintenant un résultat classique énoncé par Fiedler et Ptak [4] :
Si A est une matrice de classe Z , les propositions suivantes sont équivalentes :

— A^{-1} existe et $A^{-1} \geq 0$.

— Il existe une matrice diagonale D dont tous les éléments diagonaux sont positifs telle que $ADe > 0$ (où e est le vecteur dont toutes les composantes sont égales à 1), c'est-à-dire :

Il existe D diagonale telle que $d_{jj} > 0$ et

$$\sum_{j=1}^N a_{ij}d_{jj} > 0. \quad (3.3)$$

La condition (3.2) peut s'écrire :

$$\forall y \in \Omega, \quad \text{pour tout } i \in I \quad \sum_{j=1}^N a_{ij}d_{jj} \left(\frac{z_j}{d_{jj}} \right) \leq 0.$$

Posons :

$$M = \sup_{j \in I} \frac{z_j}{d_{jj}},$$

l'ensemble I peut s'écrire :

$$I = I' \cup I''$$

$$I' = \left\{ j \in I \mid \frac{z_j}{d_{jj}} = M \right\}, \quad I' \neq \emptyset$$

$$I'' = \left\{ j \in I \mid \frac{z_j}{d_{jj}} < M \right\}.$$

Les conditions (1.5) et (3.3) impliquent que M est négatif ou nul, en effet :

$$\forall i \in I' \quad M \underbrace{\sum_{j \in I} a_{ij}d_{jj}}_{> 0} + \sum_{j \in I''} a_{ij}d_{jj} \underbrace{\left(\frac{z_j}{d_{jj}} - M \right)}_{\geq 0} + \sum_{j \notin I} a_{ij}z_j \leq 0.$$

Finalement, M négatif ou nul et les d_{jj} positifs impliquent

$$z_j \leq 0 \quad \text{pour tout } j \in I \quad (\text{Q.E.D.})$$

L'unicité de la solution résulte de ce que la borne supérieure d'un ensemble pour la relation d'ordre \geq est unique.

Proposition 2 : Parmi tous les éléments de Ω , x , s'il existe, confère son minimum à la fonction J qui applique Ω dans \mathbf{R}_+ .

$$y \rightarrow J(y) = y^T A y - (a^T A + b^T) y + b^T a.$$

Démonstration :

On vérifie d'après (2.1) que :

$$J(y) = (A y - b, y - a) \geq 0.$$

La condition (1.3) implique :

$$J(x) = \min_{y \in \Omega} J(y).$$

4. CONSTRUCTION DE LA SOLUTION PAR L'ALGORITHME DE GAUSS-SEIDEL

Soit S l'application de \mathbf{R}^N dans lui-même qui à tout vecteur u fait correspondre $S(u)$ de composantes :

$$\{ S(u) \}_i = \frac{1}{a_{ii}} \left[b_i - \sum_{j \neq i} a_{ij} u_j \right]. \quad (4.1)$$

Étant donné un indice p appartenant à $\{ 1, 2, \dots, N \}$, l'application γ_p de \mathbf{R}^N dans lui-même est définie par :

$$u \rightarrow \gamma_p(u) \begin{cases} \{ \gamma_p(u) \}_i = u_i & \text{pour tout } i \neq p. \\ \{ \gamma_p(u) \}_p = \min (\{ S(u) \}_p, a_p). \end{cases} \quad (4.2)$$

$$(4.3)$$

Par cette opération une seule composante de u est modifiée.

Proposition : L'ensemble Ω est stable par γ_p . D'autre part,

$$\forall u \in \Omega \quad , \quad \gamma_p(u) \geq u. \quad (4.4)$$

Démonstration :

Montrons d'abord (4.4). Puisque u appartient à Ω :

$$A u - b \leq 0 \quad (4.5)$$

$$u - a \leq 0. \quad (4.6)$$

D'après (4.2) il suffit de vérifier (4.4) pour la $p_i^{\text{ième}}$ composante.

La condition (1.5) permet d'écrire (4.5) sous la forme :

$$\{ S(u) \}_i \geq u_i \quad \text{pour tout} \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (4.7)$$

Si $\{ S(u) \}_p < a_p$, (4.3) et (4.7) impliquent :

$$\{ \gamma_p(u) \}_p = \{ S(u) \}_p \geq u_p.$$

Si $\{ S(u) \}_p \geq a_p$, (4.3) et (4.6) impliquent :

$$\{ \gamma_p(u) \}_p = a_p \geq u_p.$$

En résumé, γ_p appliquée à un vecteur u de Ω ne modifie, en l'augmentant, que la $p^{\text{ième}}$ composante de u .

L'ensemble Ω est stable par γ_p signifie :

$$\forall u \in \Omega \quad A \gamma_p(u) - b \leq 0 \quad \text{et} \quad \gamma_p(u) - a \leq 0.$$

La seconde relation est évidente d'après la construction de γ_p , vérifions la première :

Les conditions (1.5) et (4.4) donnent, pour tout $i \neq p$,

$$\sum_{j=1}^N a_{ij} \{ \gamma_p(u) \}_j = \sum_{j \neq p} a_{ij} u_j + a_{ip} \{ \gamma_p(u) \}_p \leq \sum_{j \neq p} a_{ij} u_j + a_{ip} u_p \leq b_i.$$

D'autre part, (1.5) et (4.3) donnent :

$$\sum_{j=1}^N a_{pj} \{ \gamma_p(u) \}_j = \sum_{j \neq p} a_{pj} u_j + a_{pp} \{ \gamma_p(u) \}_p \leq \sum_{j \neq p} a_{pj} u_j + a_{pp} \{ S(u) \}_p = b_p.$$

Remarquons que les démonstrations de la stabilité de Ω par γ_p et de la croissance de γ_p définie sur Ω n'utilisent que les propriétés (1.5) de A , c'est-à-dire que A est une Z matrice.

Algorithme de Gauss-Seidel

Soit Γ l'application de R^N dans lui-même définie par :

$$u \rightarrow \Gamma(u) = \gamma_N \circ \gamma_{N-1} \circ \dots \circ \gamma_2 \circ \gamma_1(u). \quad (4.8)$$

De façon évidente Ω est stable par Γ et

$$\forall u \in \Omega \quad \Gamma(u) \geq u. \quad (4.9)$$

Proposition : La suite $\{ x^n \}$ définie par

$$x^0 \in \Omega \quad (4.10)$$

$$x^{n+1} = \Gamma(x^n) \quad (4.11)$$

est croissante, majorée; elle converge vers la solution x du problème.

Démonstration :

Il est toujours possible de réaliser (4.10) puisque Ω est non vide (pour la construction de x^0 voir le § 2). D'autre part, la i ème composante de x^{n+1} est donnée par les formules classiques :

$$\begin{aligned} \tilde{x}_i^{n+1} &= \{ S[\gamma_{i-1} \circ \dots \circ \gamma_1(x^n)] \}_i = \frac{1}{a_{ii}} \left[b_i - \sum_{j < i} a_{ij} x_j^{n+1} - \sum_{j > i} a_{ij} x_j^n \right] \\ x_i^{n+1} &= \min(\tilde{x}_i^{n+1}, a_i). \end{aligned}$$

D'après (4.9) la suite est croissante et majorée puisque Ω est borné supérieurement. Soit \bar{x} sa limite : \bar{x} appartient à Ω puisque Ω est fermé et vérifie donc (1.1) et (1.2).

D'autre part Γ est continue comme composition d'applications continues γ_p ,

$$\bar{x} = \Gamma(\bar{x})$$

c'est-à-dire, pour tout $i = 1, 2, \dots, N$, $\bar{x} = \gamma_i(\bar{x})$.

Donc, d'après (4.3) :

$$\begin{aligned} \bar{x}_i &= \{ S(\bar{x}) \}_i \quad \text{si} \quad \bar{x}_i \neq a_i \\ \{ A\bar{x} - b \}_i \{ \bar{x} - a \}_i &= 0 \quad \text{pour tout} \quad i = 1, 2, \dots, N. \end{aligned} \quad (1.4)$$

La limite \bar{x} de la suite $\{ x^n \}$ satisfait à (1.1), (1.2) et (1.4) : c'est la solution x du problème.

En résumé, l'hypothèse « A est une Z matrice » permet de construire une suite croissante $\{ x^n \}$ d'éléments de Ω . L'hypothèse « $A^{-1} \geq 0$ » permet de montrer d'une part qu'on peut choisir x^0 dans Ω puisque Ω est non vide, d'autre part que $\{ x^n \}$ est majorée puisque Ω est borné supérieurement.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] J. CÉA, *Recherche numérique d'un optimum dans un espace produit* (polycopié Fac. sc. de Rennes).
- [2] J. CÉA, *Optimisation théorie et algorithmes*, Dunod, 1971, pp. 142-146.
- [3] R. S. VARGA, *Matrix iterative analysis*, Prentice-Hall, 1962.
- [4] FIEDLER PTAK, « On matrices with positive off diagonal elements and positive principal minors », *Czec. Math. J.*, 12 (87), pp. 382-400 (1962).
- [5] J. F. DURAND, *Résolution numérique de problèmes aux limites sous-harmoniques* thèse de 3^e cycle, Fac. de Sc. Montpellier, 1968.
- [6] J. J. MOREAU, *Majorantes sur-harmoniques minimales d'une fonction continue* Séminaire d'Analyse unilatérale, Fac. Sc. Montpellier, 1968.