REVUE FRANÇAISE D'AUTOMATIQUE INFORMATIQUE RECHERCHE OPÉRATIONNELLE. MATHÉMATIQUE

FLORICA KRAMER

Brève communication. Sur le nombre chromatique $K(p, G)$ des graphes

Revue française d'automatique informatique recherche opérationnelle. Mathématique, tome 6, n° R1 (1972), p. 67-70

<http://www.numdam.org/item?id=M2AN_1972__6_1_67_0>

R.A.I.R.O.
(6e année, R-1, 1972, p. 67-70)

SUR LE NOMBRE CHROMATIQUE $K(p, G)$ DES GRAPHES

par Mme Florica KRAMER (1)

Résumé. — *Dans cet article, on détermine le nombre chromatique par rapport au chemin de longueur p, K(p, G), pour un certain ensemble de graphes et on donne les théorèmes de caractèrisation des graphes au cas où les nombres chromatiques K(i, G) sont égaux pour certaines valeurs de i.*

Soit $G = (X, U)$ un graphe non orienté, fini, connexe et sans boucles, où nous avons désigné par X l'ensemble des sommets et par U l'ensemble des arêtes. Dans un travail antérieur [2] on définit le nombre chromatique par rapport au chemin de longueur p, $K(p, G)$, comme le nombre des couleurs nécessaires à la coloration des sommets du graphe G de telle manière que deux sommets quelconques $x, y \in X$, dont la distance $\mathrm{d}(x, y)$ satisfait à l'inégalité $1 \leqslant \mathrm{d}(x, y) \leqslant p$ (p-entier positif), ne soient pas de la même couleur.

Dans ce qui suit on détermine ce nombre chromatique pour un certain ensemble $\mathcal{G}$ de graphes, notamment pour l'ensemble des cycles élémentaires finis, en présentant également l'algorithme de coloration des sommets d'un cycle à l'aide d'un nombre minimal de couleurs. On détermine aussi le maximum de ce nombre relativement aux graphes de $\mathcal{G}$.

Par la distance $\mathrm{d}(x, y)$ entre le sommet x et le sommet y nous entendrons le nombre des arêtes du plus court chemin entre ces deux sommets.

Théorème 1. — Si le graphe $G = (X, U)$ est un cycle à n sommets, alors son nombre chromatique par rapport au chemin de longueur p (p-entier positif) est donné par les relations :

$$(1) \qquad K(p, G) = \begin{cases} n & \text{pour } n \leqslant 2p + 1 \\ p + s + 1 + \operatorname{sgn} r & \text{pour } n > 2p + 1, \end{cases}$$

(1) Institut de Calcul de l'Académie de la République Socialiste de Roumanie, Cluj.

où s et r sont des nombres entiers positifs donnés par les relations :

$$(2) \qquad \begin{aligned} n &= (p+1)\,q + r_0 \qquad && 0 \leqslant r_0 \leqslant p \\ r_0 &= qs + r && 0 \leqslant r < q \end{aligned}$$

Démonstration. Nous distinguerons deux cas. 1^er^ cas : $n \leqslant 2p + 1$. En effet, si le graphe $G = (X, U)$ est un cycle à nombre des sommets $n \leqslant 2p + 1$, il résulte que la distance entre deux sommets quelconques $x, y \in X$ est $\mathrm{d}(x, y) \leqslant p$ et par conséquent ces sommets doivent être coloriés de manière différente. Donc dans ce cas $K(p, G) = n$.

2^e^ cas : $n > 2p + 1$. Désignons par $a_1, a_2, \ldots, a_n$ les sommets du graphe, le sommet a_i étant adjacent aux sommets a_{i-1} et a_{i+1} pour $i = 1, 2, \ldots, n$, et $a_0 \equiv a_n$, $a_{n+1} \equiv a_1$.

Afin que dans une coloration admissible, le nombre des couleurs soit minimum, il est évidemment nécessaire que le nombre des sommets coloriés avec la même couleur soit le plus grand possible.

Nous montrerons que le nombre maximum des sommets qui peuvent être coloriés avec la même couleur, dans un cycle, est égal à q (q donné par les relations (2)). Pour cela nous attribuons au sommet a_1 une couleur désignée par c_1. Alors le sommet le plus rapproché, dans le sens du numérotage, auquel nous pouvons attribuer aussi la couleur c_1 est a_{p+1}. Le sommet suivant auquel nous pouvons attribuer la même couleur est a_{2p+3}. En continuant le procédé nous arriverons à colorier le sommet $a_{(q-1)(p+1)+1}$ également avec la même couleur c_1. En effet

$$\begin{aligned} \mathrm{d}(a_{(q-1)(p+1)+1}, a_1) &= n - (q-1)(p+1) - 1 + 1 \\ &= n - q(p+1) + p + 1 = r_0 + p + 1, \end{aligned}$$

mais du fait que $0 \leqslant r_0 \leqslant p$, il résulte

$$p + 1 \leqslant \mathrm{d}(a_{(q-1)(p+1)+1}, a_1) \leqslant 2p + 1.$$

La première inégalité montre que les sommets $a_{(q-1)(p+1)+1}$ et a_1 peuvent être de la même couleur. La deuxième inégalité montre qu'aucun sommet parmi tous ceux compris entre $a_{(q-1)(p+1)+1}$ et a_1, dans le sens du numérotage, ne peut être colorié avec la couleur c_1, parce que parmi ces sommets il n'en existe aucun pour lequel tant la distance à a_1 que la distance à $a_{(q-1)(p+1)+1}$ soient plus grandes que p. Donc nous avons attribué la couleur c_1 à q sommets et ce nombre est maximum.

Compte tenu de ce qui a été dit ci-dessus et des relations (2), il résulte que dans chaque coloration admissible au moins $p + 1$ couleurs sont nécessaires et qu'avec ces $p + 1$ couleurs nous pourrons colorier au plus $q(p + 1)$ sommets, r_0 sommets restant non coloriés.

On pose le problème au nombre de couleurs qui doivent être encore introduites pour réaliser une coloration admissible de tous les sommets.

De la relation $r_0 = qs + s$, où $r < q$ et du fait que q sommets au plus peuvent être coloriés avec la même couleur, il résulte qu'il faut avoir encore au moins $s + 1$ couleurs si $r \neq 0$ et au moins s couleurs si $r = 0$. Par suite

$$K(p, G) \geqslant p + s + 1 + \operatorname{sgn} r.$$

Nous montrerons qu'il suffit de $p + s + 1 + \operatorname{sgn}\, r$ couleurs. En effet, parce que

$$n = (p + 1)q + r_0 = (p + 1)q + qs + r = (p + 1 + s)q + r$$

nous pouvons distribuer les sommets du graphe dans q groupes de sommets consécutifs, où r d'entre eux contiennent chacune $p + s + 2$ sommets, et le reste de $q - r$ groupes contiennent chacune $p + s + 1$ sommets.

Alors au i-ème sommet de chaque groupe, dans le sens du numérotage, on attribue la couleur c_i, $i = 1, 2, \ldots, p + s + 2$ pour les groupes avec $p + s + 2$ sommets et $i = 1, 2, \ldots, p + s + 1$ pour les groupes avec $p + q + 1$ sommets. Ceci peut se faire parce que la distance entre deux sommets quelconques de couleur c_i est strictement plus grande que p.

Il est visible que de la démonstration résulte également l'algorithme de coloration des sommets d'un circuit fini.

Théorème 2. Soit $\mathcal{G}$ l'ensemble des cycles à un nombre fini de sommets, et p un entier positif, $p \geqslant 2$, alors on a la relation :

$$\max_{G \in \mathcal{G}} K(p, G) = 2p + 1$$

et ce maximum est atteint seulement pour les cycles à $2p + 1$ sommets.

Par la suite nous présenterons deux théorèmes de caractérisation des graphes au cas où les nombres chromatiques $K(i, G)$ sont égaux pour certaines valeurs de i. Pour ce faire, nous rappelerons le théorème suivant du travail [2] où on a désigné par $|X|$ le nombre de sommets du graphe.

Théorème 3. Si $G = (X, U)$ est un graphe non orienté, fini, connexe et sans boucles, et p un entier positif, $p \geqslant 2$ alors

$$K(p, G) = p + 1$$

si et seulement si l'une des conditions suivantes est remplie :

a) $|X| = p + 1$;

b) U se réduit à un seul chemin de longueur $L \geqslant p$,

c) U se réduit à un seul cycle, dont la longueur est un multiple de $p + 1$.

Théorème 4. Soit $G = (X, U)$ un graphe non orienté, fini, connexe et sans boucles et p un entier positif, $p \geqslant 2$. On a

$$K(p, G) = K(p + 1, G) = p + 2$$

si et seulement si l'une des conditions suivantes est remplie :

1° $|X| = p + 2$ et le diamètre $D(G) \leqslant p$;

2° U se réduit à un seul cycle dont la longueur L a la propriété : L divisible par $p + 2$ et non divisible par $p + 1$.

Théorème 5. Soit $G = (X, U)$ un cycle à n sommets. Les égalités

$$K(p, G) = K(p + 1, G) = \dots = K(2p, G) = 2p + 1$$

sont vraies pour $p \geqslant 2$, si et seulement si $n = 2p + 1$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] C. BERGE, *Théorie des graphes et ses applications*, Dunod, Paris, 1963.

[2] F. KRAMER et H. KRAMER, « Un problème de coloration des sommets d'un graphe », *C.R. Acad. Sc. Paris*, t. 268, p. 46-48 (6 janvier 1969).