REVUE FRANÇAISE D'AUTOMATIQUE INFORMATIQUE RECHERCHE OPÉRATIONNELLE. MATHÉMATIQUE

PHILIPPE MICHEL

Commandes généralisées à valeurs dans un espace compact théorèmes d'existence

Revue française d'automatique informatique recherche opérationnelle. Mathématique, tome 6, n° R1 (1972), p. 37-55

<http://www.numdam.org/item?id=M2AN_1972__6_1_37_0>

R.A.I.R.O.
(6e année, R-1, 1972, p. 37-55)

COMMANDES GENERALISEES A VALEURS DANS UN ESPACE COMPACT THEOREMES D'EXISTENCE.

par Philippe MICHEL

Résumé. — *On étudie les commandes généralisées dans le cas d'un espace de Banach pour les états et d'un espace compact pour les commandes : définition, mise sous forme désintégrée et condition d'identité des solutions avec celles qui correspondent aux commandes mesurables (§ 1), existence et continuité de la solution par rapport à l'état initial, l'instant initial, l'instant final et la commande (§ 2), application à l'existence de solutions de problèmes d'optimalité (§ 3).*

On fait l'hypothèse que l'équation du mouvement est lipschitzienne, mais on n'impose pas à la solution de rester bornée, ni par une restriction sur l'intervalle de temps que fait A. Ghouila-Houri, ni par une limitation du champ des vitesses accessibles comme le fait J. Warga, ni comme le font L. Cesari, E. J. McShane, L. C. Young, par une limitation de la croissance à l'infini.

Note préliminaire. Pour une équation différentielle dans un espace de Banach :

$$\frac{\mathrm{d}X(t)}{\mathrm{d}t} = g(X(t), t),$$

nous dirons que X est solution sur un intervalle $[a, b]$ si elle vérifie l'équation intégrale

$$X(t) = X(a) + \int_a^t g(X(s), s)\,\mathrm{d}s, \qquad \text{pour} \qquad a \leqslant t \leqslant b.$$

Il est équivalent de dire que X admet pour presque tout t de $[a, b]$ une dérivée égale à $g(X(t), t)$ (théorème de Bochner, Yosida [1]).

1. On considère les données suivantes :

Un intervalle I de la droite numérique $\mathbf{R}$,

un espace de Banach réel E,

un sous-ensemble ouvert 0 de E,

un espace compact U,

une application f définie et continue dans $0 \times U \times I$ et à valeurs dans E, l'équation différentielle à paramètre de commande :

$$\frac{\mathrm{d}X(t)}{\mathrm{d}t} = f(X(t), u(t), t). \tag{1}$$

NOTATION. Nous désignerons respectivement les quotients par la relation « égal presque partout par rapport à la mesure de Lebesgue sur I » de l'ensemble des applications étagées de I dans U : par Q^0 (commandes à paliers), de l'ensemble des applications continues par morceaux de I dans U : par Q^1 (commandes continues par morceaux), et de l'ensemble des applications mesurables de I dans U : par Q^2 (commandes mesurables).

Définition (A. Ghouila-Houri [2]). On appelle *commande généralisée* ou *commande* toute mesure de Radon positive μ sur $I \times U$ qui se projette sur I suivant la mesure de Lebesgue. On désignera par Q l'ensemble des commandes généralisées. On peut plonger Q^2 dans Q en associant à toute commande mesurable $t \to v(t)$ la mesure μ_v définie en posant pour toute fonction numérique g à support compact dans $I \times U$ et continue

$$\int_{I \times U} g(t, u)\mu_v(\mathrm{d}t, \mathrm{d}u) = \int_I g(t, v(t))\, \mathrm{d}t.$$

Équation généralisée. Pour $[a, b] \subset I$ et $\mu \in Q$, on considèrera l'équation suivante :

$$X(t) = X(a) + \int_{[a,t] \times U} f(X(s), u, s)\mu(\mathrm{d}s, \mathrm{d}u) \tag{2}$$

pour $a \leqslant t \leqslant b$, où X est continue de $[a, b]$ dans 0.

Si μ est une commande de Q^2, les solutions des équations (1) et (2) correspondantes coïncident.

Forme désintégrée des commandes.

Théorème 1.1. *On suppose que U est métrisable. Pour toute commande μ de Q, il existe une application vaguement mesurable $t \to \mu_t$ de I dans l'ensemble des mesures positives sur U de norme 1 telle que l'on ait, pour toute fonction μ — intégrable g à valeurs dans un espace de Banach*

$$\int_{I \times U} g(t, u)\mu(\mathrm{d}t, du) = \int_I \mathrm{d}t \int_U g(t, u)\mu_t(\mathrm{d}u) ;$$

et cette application est unique à l'égalité presque partout près.

Ce théorème résulte immédiatement de la désintégration des mesures (Bourbaki [7], § 3, théorème 1) et du théorème d'intégrations superposées (Bourbaki [6], § 3, théorème 1).

Corollaire. *L'équation généralisée* (2) *est équivalente à la suivante :*

$$\frac{\mathrm{d}X(t)}{\mathrm{d}t} = \int_U f(X(t), u, t)\mu_t(\mathrm{d}u) \tag{2'}$$

presque partout dans $[a, b]$ *pour l'application* $t \to \mu_t$ *définie par la commande* μ *dans le théorème 1.1.*

Théorème 1.2. *Si* U *est métrisable et si, pour tout élément* (t, x) *de* $I \times 0$, $f(x, U, t)$ *est convexe, alors les ensembles de solutions associées aux commandes généralisées et aux commandes mesurables sont identiques.*

Soit X une solution de (2) sur $[a, b]$ associée à une commande μ de Q. D'après le corollaire précédent, X est une primitive de la fonction mesurable

$$\frac{\mathrm{d}X(t)}{\mathrm{d}t} = \int_U f(X(t), u, t)\mu_t(\mathrm{d}u)\ ;$$

et en raison de l'hypothèse de convexité, $\dfrac{\mathrm{d}X(t)}{\mathrm{d}t}$ appartient à $f(X(t), U, t)$.

Ainsi, la multi-application

$$t \in [a, b] \to \left\{ u \in U\ ;\ f(X(t), u, t) = \frac{\mathrm{d}X(t)}{\mathrm{d}t} \right\}$$

est à valeurs dans les compacts non vides de U ; elle est mesurable (Castaing [1], théorème 4.7); elle admet donc une section mesurable $t \to u(t)$ (Castaing [1], théorème 5.1) et X est solution de (1) sur $[a, b]$ associée à la commande $u(t)$ de Q^2.

Nous allons à présent introduire des hypothèses sur f de type lipschitzien pour obtenir l'existence et l'unicité de la solution mais sans imposer à l'ensemble des états accessibles de rester borné. Donnons un exemple :

Exemple 1.1. On considère l'équation suivante :

$$\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} = u(t)(1 + x(t)^2),$$

où $x(t)$ est à valeurs dans R et $u(t)$ à valeurs dans $[-1, 1]$; la solution $x(t) = \operatorname{tg} \int_{t_0}^{t} u(s)\,\mathrm{d}s$, qui s'annule pour $t = t_0$, ne reste pas bornée. Il est aisé de vérifier que cette équation satisfait aux hypothèses qui vont suivre.

Topologie de l'espace des commandes : on munit l'espace Q de la topologie vague des mesures de Radon sur $I \times U$. Pour cette topologie, Q est un espace compact.

Nous ferons pour la totalité de cette étude, l'hypothèse suivante : *pour tout intervalle compact* $\mathfrak{J}$ *contenu dans* I *et tout sous-ensemble compact* K *de* E *contenu dans* 0, *il existe une constante* k *et un nombre* $\alpha > 0$ *tels que l'on ait :*

(*a*) *pour tout* $t \in \mathfrak{J}$, $u \in U$, $x \in K_\alpha$ *et* $y \in K_\alpha$,

$$\|f(x, u, t) - f(y, u, t)\| \leqslant k \|x - y\| \tag{1.1}$$

(*b*) $f(x, u, t)$ *est uniformément continue dans* $K_\alpha \times U \times \mathfrak{J}$, où K_α est l'ensemble des éléments de E dont la distance à K est inférieure ou égale à α.

Remarque 1.1. Dans le cas $E = \mathbf{R}^n$, K_α est compact, et l'hypothèse (*b*) résulte de la continuité de f ; si en outre, 0 est convexe, l'hypothèse (*a*) équivaut à l'existence, pour tout point (t_0, u_0, x_0) de $I \times U \times 0$, d'un voisinage où l'inégalité (1.1) est vérifiée (f localement lipschitzienne par rapport à la première variable). Dans le cas général (E est un espace de Banach), on exige ces propriétés dans un voisinage des compacts; si 0 est convexe et si f est continuement dérivable par rapport à x, l'hypothèse (*a*) est satisfaite : $f\frac{t}{x}$ qui est bornée sur tout compact convexe reste bornée dans un voisinage de ce compact.

Remarque 1.2. Le fait d'étudier le problème dans le cas où 0 est un sous-ensemble ouvert quelconque de E permet d'étendre nos résultats à un champ plus vaste d'applications; car même si f est définie dans $E \times U \times I$, il arrive souvent qu'elle ne vérifie les hypothèses (*a*) et (*b*) que pour un sous-ensemble de E, ainsi que le montre l'exemple très simple suivant.

Exemple 1.2. On considère l'équation suivante :

$$\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} = u(t)\,|x(t)|^{1/2},$$

où $x(t)$ est à valeurs dans $\mathbf{R}$ et $u(t)$ à valeurs dans un sous-ensemble compact de $\mathbf{R}$;

la fonction $f(x, u) = u\,|x|^{1/2}$ vérifie les hypothèses considérées pour les valeurs de x appartenant au complémentaire de $\{0\}$.

Notation. Pour tout intervalle compact $\mathfrak{J}$ de I, nous désignerons par $\mathcal{B}_\mathfrak{J}$ un ensemble de parties bornées fermées de E contenues dans 0 qui a les propriétés suivantes :

— tout compact de E contenu dans 0 appartient à $\mathcal{B}_\mathfrak{J}$,

— pour tout $B \in \mathcal{B}_\mathfrak{J}$, il existe un nombre $\alpha > 0$ tel que l'ensemble des points de E à distance au plus α de B appartienne à $\mathcal{B}_\mathfrak{J}$,

— pour tout $B \in \mathcal{B}_\mathfrak{J}$, $f(x, u, t)$ vérifie les hypothèses (*a*) et (*b*) dans $B \times U \times \mathfrak{J}$.

L'existence de $\mathcal{B}_{\mathfrak{J}}$ résulte des hypothèses : pour tout compact K, il existe un nombre α tel que f vérifie les hypothèses (a) et (b) dans $K_\alpha \times U \times \mathfrak{J}$; si on adjoint à K les ensembles K_β pour $\beta < \alpha$, et que l'on procède ainsi pour tout compact contenu dans 0, on obtient bien un ensemble $\mathcal{B}_{\mathfrak{J}}$ qui a les propriétés désirées.

2. Existence et continuité de la solution

Proposition 2.1. *L'ensemble Q^0 des commandes à paliers est partout dense dans l'ensemble Q des commandes généralisées.*

De cette propriété pour I compact (A. Ghouila-Houri [2]), on déduit aisément qu'elle est vraie dans le cas d'un intervalle I quelconque de la même manière que dans (P. Michel [3], § 1, théorème 1).

Proposition 2.2. *Pour tout intervalle $\mathfrak{J}$ contenu dans I, tout point a de $\mathfrak{J}$, tout point x de 0, et toute commande généralisée μ de Q, il existe au plus une solution X de l'équation généralisée* (2) *sur $\mathfrak{J}$, associée à la commande μ et telle que $X(a) = x$.*

Soient X et Y deux telles solutions, et soit b un point de $\mathfrak{J}$ supérieur à a; nous allons montrer que X et Y coïncident sur l'intervalle $[a, b]$. L'ensemble $B = X([a, b]) \cup Y([a, b])$ est compact; il existe donc une constante k telle que l'on ait, pour tout $t \in [a, b]$, tout $u \in U$, tout $y \in B$ et tout $z \in B$,

$$\|f(y, u, t) - f(z, u, t)\| \leqslant k \|y - z\| \ ;$$

on a donc

$$\|X(t) - Y(t)\| \leqslant \int_a^t k \|X(s) - Y(s)\| \, \mathrm{d}s \leqslant Mk(t-a),$$

où $M = \max \{ \|X(t) - Y(t)\| \mid t \in [a, b] \}$;
et par récurrence, on obtient, pour tout $n \geqslant 1$ et tout $t \in [a, b]$,

$$\|X(t) - Y(t)\| \leqslant M \frac{k^n (t-a)^n}{n!},$$

ce qui implique $X(t) = Y(t)$ pour tout $t \in [a, b]$. On procède de manière analogue pour un point b de $\mathfrak{J}$ inférieur à a.

Proposition 2.3. *Si $\mathfrak{J}$ est un intervalle compact contenu dans I et B est un ensemble de $\mathcal{B}_{\mathfrak{J}}$, l'ensemble des solutions de l'équation* (2) *sur des intervalles contenus dans $\mathfrak{J}$ qui prennent leurs valeurs dans B est équicontinu.*

Soit x_0 un point de B; la fonction continue $f(x_0, u, t)$ est bornée sur l'ensemble compact $\{ x_0 \} \times U \times \mathfrak{J}$; en raison de l'hypothèse (a), f est bornée sur l'ensemble $B \times U \times \mathfrak{J}$ par une constante M. On en déduit que si a et b

sont deux points de $\mathfrak{J}$ et X une solution sur $[a, b]$ à valeurs dans B, on a la relation suivante :

$$\|X(b) - X(a)\| \leqslant M\,|b - a|.$$

Théorème 2.1. *Si $\mathfrak{J}$ est un intervalle compact contenu dans I, B un ensemble de $\mathfrak{B}_{\mathfrak{J}}$, et h un nombre strictement positif, et si S désigne l'ensemble des solutions de l'équation* (2) *définies sur $\mathfrak{J}$ et à valeurs dans B, alors l'ensemble des couples* (μ, ν) *d'éléments de Q qui vérifient, pour tout $X \in S$ et tout intervalle* $[a, b]$ *contenu dans $\mathfrak{J}$, l'inégalité suivante :*

$$\left\| \int_{[a,b]\times U} f(X(s), u, s) \cdot (\mu - \nu)(\mathrm{d}s, \mathrm{d}u) \right\| \leqslant h, \tag{2.2}$$

est un entourage de la structure uniforme vague sur Q.

Si on désigne par B' la boule unité du dual de E, l'inégalité (2.2) équivaut à l'ensemble des inégalités définies par :

pour tout élément x' de B',

$$\left| \int_{[a,b]\times U} \langle x', f(X(s), u, s) \rangle (\mu - \nu)(\mathrm{d}s, \mathrm{d}u) \right| \leqslant h.$$

Montrons que l'ensemble $\mathcal{H}$ des fonctions $\langle x', f(X(t), u, t) \rangle$, pour tous les éléments (x', X) de $B' \times S$, est un sous-ensemble équicontinu de l'espace des fonctions numériques continues dans $\mathfrak{J} \times U$.

On a

$$|\langle x', f(X(t), u, t) \rangle - \langle x', f(X(s), v, s) \rangle| \leqslant \|f(X(t), u, t) - f(X(s), v, s)\|.$$

Pour tout nombre $\varepsilon > 0$, f étant uniformément continue dans $B \times U \times \mathfrak{J}$, il existe des entourages V_1 de B, V_2 de U et V_3 de $\mathfrak{J}$ tels que l'on ait, pour $(x_1, x_2) \in V_1$, $(u_1, u_2) \in V_2$ et $(t_1, t_2) \in V_3$,

$$\|f(x_1, u_1, t_1) - f(x_2, u_2, t_2)\| \leqslant \varepsilon.$$

D'après la proposition 2.3, l'ensemble S est équicontinu; il existe donc un entourage W de $\mathfrak{J}$ tel que, pour $(t_1, t_2) \in W$, on ait : quel soit $X \in S$, $(X(t_1), X(t_2)) \in V_1$. Donc, pour $(t_1, t_2) \in V_3 \cap W$ et pour $(u_1, u_2) \in V_2$, on aura, pour tout $X \in S$,

$$\|f(X(t_1), u_1, t_1) - f(X(t_2), u_2, t_2)\| \leqslant \varepsilon.$$

D'autre part, comme f reste bornée sur $B \times U \times \mathfrak{J}$, les fonctions de $\mathcal{H}$ sont à valeurs dans un sous-ensemble borné de $\mathbf{R}$. Il en résulte que l'ensemble $\mathcal{H}$ est relativement compact pour la topologie de la convergence uniforme sur le compact $\mathfrak{J} \times U$ (théorème d'Ascoli).

Le théorème 2.1 résultera alors du lemme suivant :

Lemme 2.1. *Si $\mathfrak{J}$ est un intervalle compact, h un nombre strictement positif et $\mathcal{H}$ un sous-ensemble précompact de l'espace des fonctions numériques continues sur $\mathfrak{J} \times U$ muni de la topologie de la convergence uniforme, alors l'ensemble des couples (μ, ν) d'éléments de Q qui vérifient, pour toute fonction g de $\mathcal{H}$ et tout intervalle $[a, b]$ contenu dans $\mathfrak{J}$, l'inégalité suivante :*

(L1) $$\left|\int_{[a,b]\times U} g(t, u) \cdot (\mu - \nu)(\mathrm{d}t, \mathrm{d}u)\right| \leqslant h,$$

est un entourage de la structure uniforme vague sur Q.

Soit M la borne supérieure des valeurs absolues des fonctions g de $\mathcal{H}$. On a alors, pour toute fonction g de $\mathcal{H}$, tout intervalle $[a, b] \subset \mathfrak{J}$ et tout élément μ de Q.

(L2) $$\int_{[a,b]\times U} |g(t, u)| \cdot \mu(\mathrm{d}t, \mathrm{d}u) \leqslant M\,|b - a|.$$

On choisit une suite finie croissante de points a_i de $\mathfrak{J}$, $i = 1, ..., p$, tels que l'ensemble des intervalles $[a_i, a_{i+1}]$ recouvre $\mathfrak{J}$ et que chacun d'entre eux soit de longueur inférieure ou égale à $\frac{h}{8M}\cdot$ Pour chacun des couples (i, j), l'ensemble des couples (μ, ν) qui vérifient, pour toute fonction g de $\mathcal{H}$, l'inégalité :

(L3) $$\left|\int_{[a_i,a_j]\times U} g(t, u) \cdot (\mu - \nu)(\mathrm{d}t, \mathrm{d}u)\right| \leqslant \frac{h}{2}$$

est un entourage de la structure uniforme dans les parties précompactes qui coïncide avec la structure uniforme simple sur Q. Il en est de même pour l'intersection obtenue en donnant à i et j toutes les valeurs telles que $1 \leqslant i < j \leqslant p$. Il suffit alors de montrer que cette intersection est contenue dans l'ensemble des couples (μ, ν) qui vérifient (L1) pour tout intervalle $[a, b]$ contenu dans $\mathfrak{J}$ et toute fonction g de $\mathcal{H}$.

Soient $[a, b] \subset \mathfrak{J}$ et deux points a_i et a_j tels que

$$0 \leqslant a_i - a \leqslant \frac{h}{8M} \qquad \text{et} \qquad 0 \leqslant b - a_j \leqslant \frac{h}{8M}\cdot$$

On a l'inégalité suivante :

$$\begin{aligned}
&\left|\int_{[a,b]\times U} g(t, u) \cdot (\mu - \nu)(\mathrm{d}t, \mathrm{d}u)\right| \\
&\qquad \leqslant \left|\int_{[a_i, a_j]} g(t, u) \cdot (\mu - \nu)(\mathrm{d}t, \mathrm{d}u)\right. + \int_{[a,a_i]\times U} |g(t, u)| \cdot \mu(\mathrm{d}t, \mathrm{d}u) \\
&\qquad + \int_{[a,a_i]\times U} |g(t, u)| \cdot \nu(\mathrm{d}t, \mathrm{d}u) + \int_{[a_j,b]\times U} |g(t, u)| \cdot \mu(\mathrm{d}t, \mathrm{d}u) \\
&\qquad + \int_{[a_j,b]\times U} |g(t, u)| \cdot \nu(\mathrm{d}t, \mathrm{d}u);
\end{aligned}$$

d'après (L2) chacun des quatre derniers termes est inférieur à $\frac{h}{8}$, et, à l'aide de (L3), on obtient bien l'inégalité (L1).

Notation. On désignera par $\mathcal{E}$ l'espace des fonctions continues définies sur les intervalles compacts contenus dans I et à valeurs dans 0.

On munit $\mathcal{E}$ de la distance D définie par :
pour X définie dans $[a, b]$ et Y définie dans $[a', b']$,

$$D(X, Y) = |a - a'| + |b - b'| + \max_{t \in I} \|\bar{X}(t) - \bar{Y}(t)\|,$$

où $\bar{X}$ est le prolongement de X à I obtenu en posant $\bar{X}(t) = X(a)$ pour $t \leqslant a$ et $\bar{X}(t) = X(b)$ pour $t \geqslant b$.

Si $\mathfrak{J}$ est un intervalle fermé contenu dans I et A un ensemble fermé de E contenu dans 0, le sous-ensemble de $\mathcal{E}$ composé des fonctions définies dans des intervalles contenus dans $\mathfrak{J}$ et à valeurs dans A est métrique complet pour la distance D.

En particulier, dans le cas où I est un intervalle fermé de $\mathbf{R}$ et où 0 est E tout entier, $\mathcal{E}$ est métrique complet.

Soient $\mathfrak{J}$ un intervalle compact contenu dans I, α un nombre positif et B un ensemble de $\mathcal{B}_{\mathfrak{J}}$ tels que l'ensemble B_α des éléments de E dont la distance à B est inférieure ou égale à α appartienne à $\mathcal{B}_{\mathfrak{J}}$.

On désigne par $|\mathfrak{J}|$ la longueur de l'intervalle $\mathfrak{J}$, *par* N la borne supérieure de $\|f(x, u, t)\|$ sur l'ensemble $B \times U \times \mathfrak{J}$ et *par* k une constante telle que l'on ait, pour tout $t \in \mathfrak{J}$, $u \in U$ et $(x_1, x_2) \in B_\alpha \times B_\alpha$,

$$\|f(x_1, u, t) - f(x_2, u, t)\| \leqslant k \|x_1 - x_2\| .$$

Théorème 2.2. *On considère les données ci-dessus : $\mathfrak{J}$, B, α, N, k. Et on suppose qu'un nombre $h > 0$, des intervalles $[a, b]$ et $[c, d]$ contenus dans $\mathfrak{J}$, des points x et y de 0, une commande μ de Q et une fonction continue Z de $[a, b]$ dans B vérifient les relations :*

$$(2.3) \quad \begin{cases} |a - c| \leqslant h, \ |b - d| \leqslant h, \ \|x - y\| \leqslant h \\ \text{et} \ \ \forall\, t \in [a, b], \ \|x - Z(t) + \int_{[a,t] \times U} f(Z(s), u, s)\mu(ds, du)\| \leqslant h. \end{cases}$$

Alors, 1° *si on a* $h \leqslant \frac{\alpha}{2N + 2} e^{-k|\mathfrak{J}|}$, *l'équation* (2) *admet une solution* X *sur* $[c, d]$ *associée à la commande* μ *et telle que* $X(c) = y$;

2° *si de plus, pour un nombre donné* $\varepsilon > 0$, *on a* $h \leqslant \frac{\varepsilon}{(2N + 2) e^{k|\mathfrak{J}|} + 2N + 4}$, *alors on a la relation* $D(X, Z) \leqslant \varepsilon$.

On suppose que $[a, b]$, $[c, d]$, x, y, μ et Z vérifient les hypothèses de l'énoncé pour $h > 0$. On pose, pour tout $(s, t) \in \mathfrak{I} \times \mathfrak{I}$ tel que $s \leqslant t$,

$$e(s, t) = \int_{[s,t] \times U} f(\bar{Z}(\tau), u, \tau) \cdot \mu\,(\mathrm{d}\tau, \mathrm{d}u):$$

on alors pour tout $t \in [c, d]$,

$$\|y - \bar{Z}(t) + e(c, t)\| \leqslant (2N + 2)h;$$

en effet, on a :

si $a \leqslant t \leqslant b$, $\|y - \bar{Z}(t) + e(c, t)\| \leqslant \|y - x\|$

$$+ \|x - Z(t) + e(a, t)\| + \|e(a, c)\|,$$

si $t < a$, $\|y - \bar{Z}(t) + e(c, t)\| \leqslant \|y - x\| + \|x - Z(a)\| + \|e(c, t)\|$,

si $t > b$, $\|y - \bar{Z}(t) + e(c, t)\| \leqslant \|y - Z(b) + e(c, b)\| + \|e(b, t)\|$;

et pour tout $s \leqslant t$, $\|e(s, t)\| \leqslant N(t - s)$.

On considère alors la suite de fonctions définies sur $[c, d]$ en posant, pour tout $t \in [c, d]$:

$$X_0(t) = \bar{Z}(t),$$

$$X_{n+1}(t) = y + \int_{[c,t] \times U} f(X_n(s), u, s)\mu\,(\mathrm{d}s, \mathrm{d}u);$$

nous avons vu que $\|X_1(t) - X_0(t)\| \leqslant (2N + 2)h$;

supposons que l'on ait : $h \leqslant \dfrac{\alpha}{2N + 2}\,\mathrm{e}^{-k|\mathfrak{I}|}$, et que pour $1 \leqslant p \leqslant n$, l'on ait

$$\|X_p(t) - X_{p-1}(t)\| \leqslant (2N + 2)h\frac{k^{p-1}(t - c)^{p-1}}{(p - 1)!};$$

on aura alors $\|X_n(t) - X_0(t)\| \leqslant (2N + 2)h\,\mathrm{e}^{k(t-c)} \leqslant \alpha$.

Ainsi, $X_n(t)$ est à valeurs dans B_α et on peut écrire :

$$\|X_{n+1}(t) - X_n(t)\| \leqslant \int_c^t (2N + 2)h\frac{k^n(s - c)^{n-1}}{(n - 1)!}\,\mathrm{d}s,$$

soit encore

$$\|X_{n+1}(t) - X_n(t)\| \leqslant (2N + 2)h\frac{k^n(t - c)^n}{n!}.$$

Il en résulte que X_n est une suite de Cauchy de l'espace des fonctions continues sur $[c, d]$ à valeurs dans B_α et qu'elle admet une limite X qui vérifie, pour tout $t \in [c, d]$,

$$\|X(t) - \bar{Z}(t)\| \leqslant (2N + 2)h\,\mathrm{e}^{k|\mathfrak{I}|}.$$

On aura en outre, pour tout $t \in [c, d]$,

$$\left\| \int_{[c,t]\times U} [f(X(s), u, s) - f(X_n(s), u, s)] \mu(ds, du) \right\| \leqslant \int_c^t k \left\| X(s) - X_n(s) \right\| ds.$$

On en déduit que l'intégrale sur $[c, t] \times U$ de $f(X(s), u, s)$ est la limite de celle de $f(X_n(s), u, s)$ et que X est solution de l'équation (2) associée à la commande μ et telle que $X(c) = y$;

si on a de plus $(2N+2)h \leqslant \dfrac{\varepsilon(2N+2)}{(2N+2)\,e^{k|\mathfrak{I}|} + 2N + 4}$, on aura, pour tout

$$t \in [c, d], \ \left\| X(t) - \bar{Z}(t) \right\| \leqslant \frac{\varepsilon(2N+2)\,e^{k|\mathfrak{I}|}}{(2N+2)\,e^{k|\mathfrak{I}|} + 2N + 4};$$

on démontre aisément, comme dans la première partie de la démonstration, qu'il en résulte que l'on a :

$$D(X, Z) \leqslant \max_{t\in[c,d]} \left\| X(t) - \bar{Z}(t) \right\| + (2N+2)h + 2h,$$

et donc que l'on a $D(X, Z) \leqslant \varepsilon$.

De l'ensemble des théorèmes 2.1 et 2.2 résultent de nombreuses propriétés.

Existence locale des solutions de l'équation (2).

Corollaire 2.1. *Pour tout nombre $\varepsilon > 0$, il existe un nombre $h > 0$ tel que quels que soient $a \in \mathfrak{I}$, $x \in B$, $\mu \in Q$ et $[c, d]$ contenu dans I et dans $[a - h, a + h]$ il existe une solution X de l'équation* (2) *sur $[c, d]$, associée à la commande μ telle que $X(c) = x$; et en outre, celle-ci est à valeurs dans la boule de centre x et de rayon ε.*

Il suffit d'appliquer le théorème 2.2 aux données suivantes : $b = a$ et $y = x = Z(a)$.

Continuité de la solution par rapport à l'instant initial, l'instant final, l'état initial et la commande.

Notation. On désigne par L l'ensemble des couples $(a, b) \in I \times I$ tels que $a \leqslant b$, par G l'ensemble des éléments (a, b, x, μ) de $L \times 0 \times Q$ tels qu'il existe une solution de l'équation (2) X sur $[a, b]$, associée à la commande μ et telle que $X(a) = x$; enfin, on désigne par H l'application qui fait correspondre cette solution à l'élément (a, b, x, μ) de G.

Corollaire 2.2. *L'ensemble G est un ouvert de $L \times 0 \times Q$ et la fonction H est continue de G dans $\mathcal{E}$.*

Soit (a, b, x, μ) un point de G et X son image par H, et soit $\mathfrak{J}$ un voisinage compact de $[a, b]$ dans I. L'ensemble $B = X([a, b])$ est un compact contenu dans 0; il existe donc un nombre $\alpha > 0$ tel que l'ensemble B_α des éléments de E dont la distance à B est inférieure ou égale à α appartienne à $\mathfrak{B}_{\mathfrak{J}}$. On peut alors appliquer le théorème 2.2 aux données suivantes : B, $\mathfrak{J}$, $[a, b]$, $x = X(a)$, $Z = X$;

pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un nombre $h > 0$ tel que, si on a :

$$|b - d| \leqslant h, \ |a - c| \leqslant h, \ \|x - y\| \leqslant h$$

$$\forall \ t \in [a, b], \ \left\| \int_{[a,t] \times U} f(X(s), u, s)(\nu - \mu)(\mathrm{d}s, \mathrm{d}u) \right\| \leqslant h,$$

alors (c, d, y, ν) est un point de G dont l'image Y par H vérifie la relation $D(X, Y) \leqslant \varepsilon$.

D'après le théorème 2.1, la condition sur ν équivaut à l'appartenance à un voisinage de μ, ce qui prouve que G contient un voisinage de (a, b, x, μ) et que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un tel voisinage dont l'image par H est contenue dans la boule de centre X et de rayon ε.

Densité de l'ensemble des solutions originelles dans l'ensemble des solutions de l'équation généralisée

Corollaire 2.3. *L'ensemble des solutions de l'équation* (1) *pour les commandes à paliers de Q^0 est partout dense dans l'ensemble des solutions de l'équation* (2) *pour les commandes généralisées de Q. Plus précisément, pour tout élément (a, b, x) de $L \times 0$, l'ensemble des solutions X sur $[a, b]$ telles que $X(a) = x$ correspondant aux commandes μ de Q^0 (telles que $(a, b, x, \mu) \in G$) est partout dense dans celui qui correspond aux commandes μ de Q (telles que (a, b, x, μ) $\in G$) pour la topologie de la convergence uniforme sur $[a, b]$.*

En effet, si (a, b, x, μ) est un élément de G, il existe un voisinage V de μ tel que l'ensemble $\{(a, b, x)\} \times V$ soit contenu dans G; et d'après la proposition 2.1, tout voisinage W de μ rencontre Q^0; ainsi, la trace sur G de l'ensemble $\{(a, b, x)\} \times Q^0$ est partout dense dans celle de l'ensemble $\{(a, b, x)\} \times Q$, et il en est de même de leurs images par la fonction continue H.

Nous allons encore préciser d'autres propriétés de la fonction H; pour la notion et les propriétés des applications propres, nous nous référons à N. Bourbaki ([1]).

Théorème 2.3. *L'application H de G dans $\mathcal{E}$ est une application propre, et par conséquent, l'image par H de tout fermé de G est un fermé de $\mathcal{E}$ et l'image réciproque par H de tout compact de $\mathcal{E}$ est un compact de G.*

D'après le théorème 1 de Bourbaki ([1]), il suffit de montrer que si $\mathcal{F}$ est un ultrafiltre sur G et si $X \in \mathcal{E}$ est un point limite de la base d'ultrafiltre $H(\mathcal{F})$, il existe un point limite de $\mathcal{F}$ dans G dont l'image est X.

X est une fonction continue d'un intervalle $[a, b]$ dans 0. Les projections de $\mathcal{F}$ sur L et 0 convergent respectivement vers (a, b) et $x = X(a)$ en raison de la convergence de $H(\mathcal{F})$; la projection de $\mathcal{F}$ sur Q converge vers une commande μ en raison de la compacité de Q.

Soit $\mathfrak{J}$ un voisinage compact de $[a, b]$ dans I. Le compact $K = X([a, b])$ admet un voisinage $B \in \mathcal{B}_{\mathfrak{J}}$ et B lui-même admet un voisinage $B_\alpha \in \mathcal{B}_{\mathfrak{J}}$. D'après le théorème 2.2, il existe un nombre $h > 0$ tel que, quels que soient $[c, d] \subset \mathfrak{J}$, $[a, b] \subset \mathfrak{J}$, $x \in B$, $y \in B$, μ et ν commandes de Q et Y solution sur $[c, d]$ associée à ν, à valeurs dans B, telle que $Y(c) = y$, qui vérifient :

$$(2.4) \qquad |a - c| \leqslant h \quad , \quad |b - d| \leqslant h \quad , \quad \|x - y\| \leqslant h$$

$$(2.5) \qquad \forall\, t \in [c, d], \left\|\int_{[c,t]\times U} f(Y(s), u, s)(\mu - \nu)\,(\mathrm{d}s, \mathrm{d}u)\right\| \leqslant h,$$

l'élément (a, b, x, μ) appartient à G.

Pour μ fixé, l'ensemble des commandes ν qui vérifient (2.5) contient l'ensemble des ν qui vérifient :

(2.6) pour toute fonction Z de $\mathfrak{J}$ dans B qui est solution de l'équation (2) et tout intervalle $[t, \theta] \subset \mathfrak{J}$,

$$\left\|\int_{[t,\theta]\times U} f(Z(s), u, s)(\mu - \nu)\,(\mathrm{d}s, \mathrm{d}u)\right\| \leqslant h\,;$$

d'après le théorème 2.1, pour (a, b, x, μ) fixé, l'ensemble des (c, d, y, ν) qui vérifient (2.4) et (2.6) est un voisinage de (a, b, x, μ) ; il en résulte qu'il contient un ensemble de $\mathcal{F}$ et donc un point de G dont l'image est une fonction de graphe contenu dans $\mathfrak{J} \times B$, ce qui prouve bien que (a, b, x, μ) appartient à G.

Corollaire 2.4. *L'ensemble des solutions de* (2) *est égal à l'adhérence dans* $\mathcal{E}$ *de l'ensemble des solutions de* (1) *pour les commandes à paliers.*

Corollaire 2.5. *Si I est un intervalle fermé et si 0 est égal à E tout entier, l'ensemble des solutions de l'équation* (2) *est complet pour la métrique D.*

3. Théorèmes d'existence des commandes optimales

On déduit aisément des propriétés du paragraphe précédent des conditions d'existence de commandes optimales.

Problème (P) : *minimiser $g(a, b, x, \mu, X)$ pour les éléments (a, b, x, μ, X) de A tels que (a, b, x, μ) appartienne à G et que X soit l'image de (a, b, x, μ) par H* (i.e. que X soit la solution correspondante),
où A est un sous-ensemble de $L \times 0 \times Q \times \mathcal{E}$ et g une fonction numérique définie dans A.

REMARQUE. A la différence des cas usuellement envisagés, nous considérons toutes les variables, X en tant que fonction et des relations entre toutes ces variables.

Théorème 3.1. *Si A est fermé dans $L \times \mathcal{O} \times Q \times \mathcal{E}$, si le sous-ensemble des éléments (a, b, x, μ) de G tels que $(a, b, x, \mu, H(a, b, x, \mu))$ appartienne à A est non vide, si g est une application fermée de A dans $\mathbf{R}$ et si la borne inférieure de g est finie, le problème (P) admet une solution optimale.*

L'ensemble A' des éléments (a, b, x, μ) de G tels que :

$$(a, b, x, \mu, H(a, b, x, \mu)) \in A$$

est un sous-ensemble fermé de G : c'est l'image réciproque de A par la fonction continue $(1, H)$.

L'image de A' par la fonction $g(a, b, x, \mu, H(a, b, x, \mu))$ est un sous-ensemble fermé non vide et borné inférieurement de $\mathbf{R}$, donc sa borne inférieure est atteinte.

Définition 3.1. On appelle *suite minimisante* du problème (P) toute suite d'éléments $(a_n, b_n, x_n, \mu_n, X_n)$ de A qui vérifie les deux conditions suivantes :

- pour tout n, (a_n, b_n, x_n, μ_n) appartient à G et son image par H est X_n,
- la suite $g(a_n, b_n, x_n, \mu_n, X_n)$ tend vers la borne inférieure (finie ou non) de g définie par le problème (P).

Nous dirons que les X_n sont les trajectoires de la suite minimisante. Nous allons nous placer dans le cas important où g est continue.

$\mathfrak{I}$ est un intervalle compact contenu dans I et K un sous-ensemble compact de $\mathcal{O}$; *$\mathcal{C}(\mathfrak{I}, K)$ désigne l'ensemble des fonctions continues définies sur des intervalles compacts contenus dans $\mathfrak{I}$ et à valeurs dans K.*

Théorème 3.2. *Si A est fermé, si g est continue et s'il existe une suite minimisante dont les trajectoires appartiennent toutes à $\mathcal{C}(\mathfrak{I}, K)$ le problème (P) admet une solution optimale.*

L'ensemble $\mathcal{H}$ composé des trajectoires de la suite minimisante est un sous-ensemble équicontinu de $\mathcal{C}(\mathfrak{I}, K)$ (proposition 2.3) : c'est donc un ensemble relativement compact dont l'adhérence est contenue dans $\mathcal{C}(\mathfrak{I}, K)$ et à fortiori dans $\mathcal{E}$. D'après le théorème 2.3, l'image réciproque de $\bar{\mathcal{H}}$ par H est un compact de G qui contient les points (a_n, b_n, x_n, μ_n). Ces derniers ont un point adhérent qui appartient à G et définit, avec la trajectoire correspondante, un point de A (car A est fermé) qui minimise g : c'est une solution optimale de (P), comme on le vérifie aisément.

Essayons de voir des formes que peuvent prendre le critère g et l'ensemble permis A.

Proposition 3.3. *Si h est une fonction continue dans $\mathcal{O} \times U \times I$ à valeurs dans un espace de Banach F, la fonction g définie par :*

$$g(a, b, X, \mu) = \int_{[a,b] \times U} h(X(t), u, t)\mu\,(\mathrm{d}t, \mathrm{d}u),$$

est continue dans $L \times \mathcal{E} \times Q$.

Soit (a, b, X, μ) un point de $L \times \mathcal{E} \times Q$. On notera $gr(X)$ l'ensemble des points $(t, X(t))$ pour $t \in [a, b]$.

La fonction h est bornée sur le compact $gr(X) \times U$; il existe donc un voisinage V de $gr(X)$ tel que l'on ait, pour tout $(t, y, u) \in V \times U$,

$$\|h(y, u, t)\| \leqslant M,$$

pour une constante M. Il en résulte que, pour toute fonction continue Y définie sur $[c, d]$ de graphe contenu dans V et pour toute commande ν de Q, on a :

$$\|g(c, d, Y, \nu) - g(a, b, Y, \nu)\| \leqslant M(|a - c| + |b - d|);$$

on peut toujours supposer Y définie sur $[a, b]$ quitte à la prolonger par $\bar{Y}$. D'autre part, $gr(X) \times U$ étant compact, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un voisinage W de $gr(X)$ dont tous les points (t, y) vérifient, pour tout $u \in U$,

$$\|h(y, u, t) - h(X(t), u, t)\| \leqslant \varepsilon.$$

Alors, pour toute fonction continue Y sur $[a, b]$ de graphe contenu dans W et pour toute commande ν de Q, on a :

$$\|g(a, b, Y, \nu) - g(a, b, X, \nu)\| \leqslant \varepsilon(b - a).$$

Enfin, la relation suivante, pour (a, b, X) fixé et μ fixé,

$$\|g(a, b, X, \nu) - g(a, b, X, \mu)\| \leqslant \varepsilon,$$

définit un voisinage de μ dans Q : elle équivaut à l'ensemble des inégalités suivantes :

pour tout élément x' de la boule unité B' du dual de F,

$$\left|\int_{[a,b] \times U} \langle x', h(X(t), u, t) \rangle (\mu - \nu)(\mathrm{d}t, \mathrm{d}u)\right| \leqslant \varepsilon$$

Or, pour X fixé, quand x' varie dans B', l'ensemble des fonctions

$$(t, u) \rightarrow \langle x', h(X(t), u, t) \rangle$$

est équicontinu et à valeurs dans un sous-ensemble borné de $\mathbf{R}$; donc ces inégalités définissent un entourage de la structure uniforme vague de Q, (lemme 2.1).

Conséquence. D'une part, le *critère* g du problème (P) peut être de la forme suivante :

$$g(a, b, X, \mu) = \int_{[a,b] \times U} h(X(t), u, t)\mu(\mathrm{d}t, \mathrm{d}u)$$

où h est une fonction numérique continue dans $0 \times U \times I$;

d'autre part, *l'ensemble permis* A peut être défini comme l'intersection d'un fermé A_1 de $L \times O \times Q \times \mathcal{E}$ avec l'ensemble des éléments (a, b, x, μ, X) qui vérifient les relations suivantes :

$$\int_{[a,b] \times U} h_1(X(t), u, t)\mu\,(\mathrm{d}t, \mathrm{d}u) = 0$$

et

$$\int_{[a,b] \times U} h_2(X(t), u, t)\mu\,(\mathrm{d}t, \mathrm{d}u) \geqslant 0,$$

où h_1 et h_2 sont des fonctions continues dans $O \times U \times I$ et à valeurs respectivement dans un espace de Banach F_1 et dans un espace de Banach ordonné F_2. Plus généralement, on peut imposer l'appartenance à un fermé quelconque d'un espace de Banach. Notons que la forme de g obtenue est *plus générale* que celle que permet d'obtenir le changement de variable d'état qui nous ramène à un critère portant sur l'état final et l'état initial, car il n'est pas nécessaire de supposer que h satisfasse aux hypothèses (a) et (b) faites sur la fonction f.

REMARQUE. Chaque type de fonction continue de (a, b, x, μ, X) permet de définir un critère et des conditions de définition de l'ensemble permis; on peut prendre comme critère toute somme, enveloppe inférieure ou supérieure d'un nombre fini de fonctions numériques continues de (a, b, x, μ, X); quant à l'ensemble permis, on peut le définir par une intersection quelconque de fermés.

Citons quelques types classiques : les fonctions associant à l'élément (a, b, x, μ, X) l'élément $(a, b, X(a), X(b))$ de $L \times O \times O$ (type de Bolza), le graphe de la fonction X, l'intégrale définie dans la proposition 2.4, ... sont des fonctions continues; et en composant entre elles ces fonctions par une fonction continue, on obtient encore une fonction continue de (a, b, x, μ, X).

D'autres types peuvent être envisagés; par exemple, si t_0 est un point fixé de I, la fonction $X \to \bar{X}(t_0)$ qui vaut selon les cas $X(t_0)$, $X(a)$ ou $X(b)$, est continue dans $\mathcal{E}$.

Les cas d'application du théorème 3.1 (critère fermé) sont plus rares : il y a cependant le problème classique en temps minimal : si a reste dans un intervalle compact, la fonction $g(a, b) = b - a$ est fermée.

Cas de liaisons entre l'état et la commande

Toute condition, portant sur les commandes mesurables, du type :

$$h(X(t), u(t), t) \in B \qquad \text{presque partout dans } [a, b],$$

où B est un sous-ensemble fermé d'un espace métrique, équivaut à la condition suivante :

$$d(h(X(t), u(t), t), B) = 0 \qquad \text{presque partout dans } [a, b].$$

Nous pouvons donc nous limiter, dans le cadre des commandes généralisées, aux conditions du type suivant :

$$\textstyle\int_U h(X(t), u, t)\mu_t(\mathrm{d}u) = 0 \qquad \text{presque partout dans } [a, b],$$

où h est une fonction numérique positive continue dans $O \times U \times I$;
comme les mesures μ_t sont positives, il est équivalent de poser comme condition :

$$\int_a^b \mathrm{d}t \int_U h(X(t), u, t)\mu_t(\mathrm{d}u) = 0,$$

ce qui définit bien une condition de fermeture sur l'ensemble permis A, d'après la proposition 3.3.

Notons enfin, dans le cas $E = \mathrm{R}^n$, que la condition d'appartenance à $\mathcal{C}(\mathfrak{J}, K)$ (théorème 3.2) résulte, sans autre hypothèse, des conditions usuellement imposées dans les théorèmes d'existence : que ce soit que l'on suppose que l'état initial et le champ des vitesses accessibles restent bornés ou que l'on impose une condition du type suivant :

$$\langle X(t), f(X(t), u(t), t) \rangle \leqslant M(\|X(t)\|^2 + 1).$$

BIBLIOGRAPHIE

N. Bourbaki, Éditions Hermann.

[1] *Topologie générale*, chapitre I, troisième édition.

[2] *Topologie générale*, chapitre IX, deuxième édition.

[3] *Fonctions d'une variable réelle*, chapitre IV, deuxième édition.

[4] *Espaces vectoriels topologiques*, chapitres I et II, deuxième édition.

[5] *Intégration*, chapitres I, II, III et IV, deuxième édition.

[6] *Intégration*, chapitre V, première édition.

[7] *Intégration*, chapitre VI, première édition.

[8] *Intégration*, chapitre IX, première édition.

C. Castaing

[1] « Sur les multi-applications mesurables », *Revue d'Informatique et de Recherche Opérationnelle*, 1re année, n° 1, 1967, p. 91-126, Dunod.

[2] *Sur les multi-applications mesurables*, Thèse, Caen, 1967.

C. Castaing et M. Valadier

[1] « Équations différentielles multivoques dans les espaces localement convexes », *Revue d'Informatique et de Recherche Opérationnelle*, 3e année, n° 16, 1969, p. 3-16, Dunod.

L. Cesari

[1] « Existence theorems for weak and usual optimal solutions in Lagrange problems with unilateral constraints I », *Transactions A.M.S.*, vol. 124, n° 3, 1966, p. 369-412.

[2] « Existence theorems for weak and usual optimal solutions in Lagrange problems with unilateral constraints II », *Transactions A.M.S.*, vol. 124, n° 3, 1966, p. 413-430.

[3] « Existence theroems of optimal solutions in Lagrange and Pontrjagin problems », *J. Siam Control*, vol. 3, n° 3, 1965, p. 475-498.

[4] « Existence theorems for multidimensional Lagrange problems », *Journal of optimization theory and applications*, 1, 1967, p. 87-112.

I. EKELAND

[1] « Sur certains problèmes de contrôle optimal », *C.R. Acad. Sc. Paris*, 269, 1969, p. 1585-1588.

[2] « Relaxation de problèmes de contrôle optimal pour des systèmes gouvernés par des équations aux dérivées partielles », *C.R. Acad. Sc. Paris*, 270, 1970, p. 1283-1286.

[3] «Formes équivalentes d'un problème relaxé », *C.R. Acad. Sc. Paris*, 271, 1970, p. 289-292.

[4] *Relaxation de problèmes de contrôle optimal pour des systèmes gouvernés par des équations aux dérivées partielles de type elliptique*, Thèse, Fac. Sciences Paris, 1970.

A. F. FILIPPOV

[1] « On certain questions in the theory of optimal control », *J. Siam Control*, vol. 1, n° 1, 1962, p. 76-84.

[2] « Classical solutions of differential equations with multivalued right-hand side », *J. Siam Control*, vol. 5, n° 4, 1967, p. 609-621.

R. A. GAMBILL

[1] « Generalized curves and the existence of optimal controls », *J. Siam Control*, vol. 1, n° 3, 1963, p. 246-260.

R. GAMKRELIDZE

[1] « Régimes optimaux glissants », *DAN SSSR 143*, 1962, p. 1243-1245, *Soviet Math. Dokl.* 3, 1962, p. 559-562.

A. GHOUILA-HOURI

[1] *Problèmes d'existence en théorie de la commande*, Congrès d'Automatique théorique, Paris, 1965, Dunod.

[2] « Sur la généralisation de la notion de Commande d'un système guidable », *Revue d'Informatique et de Recherche Opérationnelle*, 1re année, n° 4, 1967. p. 7-32.

E. J. MC SHANE

[1] « Generalized curves », *Duke Math. J.*, 6, 1940, p. 513-536.

[2] « Necessary conditions in generalized curve problems of the calculus of variations », *Duke Math. J.*, 7, 1940, p. 1-27.

[3] « Existence theorems for Bolza problems in the calculus of variations », *Duke Math. J.*, 7, 1940, p. 28-61.

[4] « A metric in the space of generalized curves », *Ann. of Math.*, vol. 52, n° 2, 1950, p. 328-349.

[5] « Relaxed controls and variational problems », *J. Siam Control*, vol. 5, n° 3, p. 438-485.

P. MICHEL

[1] « Complétion des systèmes dynamiques et des systèmes dynamiques locaux », *C.R. Acad. Sc. Paris*, 271, 1970, p. 573-576.

[2] « Complétion de l'ensemble des trajectoires d'un système dynamique », *Cahier de l'I.R.I.A.*, n° 4, mars 1971, p. 99-143.

[3] « Complétion de l'ensemble des trajectoires d'un système à commande », *Cahier de l'I.R.I.A.*, n° 4, mars 1971, p. 79-98.

[4] « Théorèmes d'existence pour des commandes généralisées à valeurs dans un espace topologique séparé », *C.R. Acad. Sc. Paris*, 272, série A, 1971, p. 1346-1349.

[5] « Condition nécessaire d'optimalité pour des commandes généralisées à valeurs dans un espace topologique séparé », *C.R. Acad. Sc. Paris*, 273, série A, 1971, p. 50-53.

L. W. NEUSTADT

[1] « The existence of optimal controls in the absence of convexity conditions », *J. Math. Anal. Appl.*, 7, 1963, p. 110-117.

R. PALLU DE LA BARRIERE

[1] *Cours d'automatique théorique*, Dunod, 1966.

E. ROXIN

[1] « The existence of optimal controls », *Michigan Math. J.* ,vol. 9, 1962, p. 109-119.

[2] « On generalized dynamical systems defined by contingent equations », *J. of Differential Equations*, vol. 1, n° 2, 1965, p. 188-205.

M. VALADIER

[1] *Contribution à l'analyse convexe*, Thèse, Fac. Sciences Paris, 1970.

J. WARGA

[1] « Relaxed variational problems », *J. Math. Anal. Appl.*, 4, 1962, p. 111-128.

[2] « Necessary conditions for minimum in relaxed variational problems », *J. Math. Anal. Appl.*, 4, 1962, p. 129-145.

[3] « Variational problems with unbounded controls », *J. Siam Control*, vol. 3, n° 3, 1965, p. 424-438.

[4] « Functions of relaxed control », *J. Siam Control*, vol. 5, n° 4, 1967, p. 628-641.

[5] « Restricted minima of functions of controls », *J. Siam Control*, vol. 5, n° 4, 1967, p. 642-656.

[6] « Control problems with functional restrictions », *J. Siam Control*, vol. 8, n° 3, 1970, p. 360-371.

T. WAZEWSKI

[1] « Sur une généralisation des solutions d'une équation au contingent », *Bull. Acad. Polon. Sc.*, Sér. Math. Astr. Phys., vol. 10, 1962, p. 11-15.

[2] « Sur les systèmes de commande non linéaires dont le contre-domaine de commande n'est pas forcément convexe », *Bull. Acad. Polon. Sc.*, Sér. Math. Astr. Phys., vol. 10, 1962, p. 17-21.

L. C. YOUNG

[1] « Generalized curves and the existence of an atteined absolute minimum in the calculus of variations », *C.R. Soc. Sc. Lettres Varsovie*, Classe III, vol. 30, 1937, p. 212-234.

[2] « Necessary conditions in the calculus of variations », *Acta Math.*, vol. 69, 1938, p. 239-258.

[3] « Generalized surfaces in the calculus of variations I », *Ann. of Math.*, vol. 43, 1942, p. 84-103.

[4] « Generalized surfaces in the calculus of variations II », *Ann. of Math.*, vol. 43, 1942, p. 530-544.

[5] *Lectures on the calculus of variations and optimal control theory*, W. B. Saunders, 1969.

K. YOSIDA

[1] *Functional Analysis*, Springer, second édition, 1968.