Revue française d'automatique informatique recherche opérationnelle. Mathématique

Guy Chaty

Sur certains tournois

Revue française d'automatique informatique recherche opérationnelle. Mathématique, tome 6, nº R1 (1972), p. 27-36

<http://www.numdam.org/item?id=M2AN_1972__6_1_27_0>

R A I R O
(6e année, R-1, 1972, p 27-36)

SUR CERTAINS TOURNOIS

par Guy Chaty [1]

Résumé — *On examine les proprietes des tournois fortement connexes c-minimaux d'une part celles qui decoulent immediatement de la forte connexite c-minimale (nombre de circuits elementaires, existence d'un arbre de circulation, unicite de certains chemins elémentaires), d'autre part celles qui sont liees plus etroitement a leur qualite de tournois (existence d'un circuit hamiltonien unique, nombre de circuits elementaires de longueur donnee, nombre minimal d'arcs dont la suppression entraîne celle de tous les circuits, nombre de chemins hamiltoniens) On replace certaines de ces proprietes dans le cadre de resultats generaux obtenus sur les tournois (nombre de circuits de longueur 3, caracterisation des tournois qui ont un circuit hamiltonien unique, bornes du nombre minimal d'arcs dont la suppression entraîne celle de tous les circuits, nombre maximal de chemins hamiltoniens) Ce rapprochement et cette synthèse suscitent des remarques et des problemes ouverts*

1. INTRODUCTION

1.1. Terminologie et Notations

Étant donné un p-graphe $G = (X, U)$ de n sommets et m arcs, on utilise es notations qui suivent [4]

$\nu(G)$. nombre cyclomatique de G. Si G est connexe, $\nu(G) = m - n + 1$. On posera $m - n + 1 = k$

$\xi(G)$: nombre de circuits élémentaires de G.

$\eta(G)$ nombre maximal de circuits élémentaires de G disjoints 2 à 2 au sens des arcs.

$\delta(G)$: nombre minimal d'arcs qu'il faut supprimer dans G pour obtenir un graphe sans circuit

$\Pi(G) = \{ \Delta/\Delta \subset U, G_\Delta = (X, U - \Delta)$ est sans circuit $\}$

Δ, de $\Pi(G)$, est un ensemble d'arcs de G *représentant* les circuits de G, c'est-à-dire . tout circuit de G a au moins un arc dans Δ

$\Pi_m(G)$ ensemble des Δ de $\Pi(G)$ de cardinal minimal. Les éléments de $\Pi_m(G)$ seront notés $\Delta_m(G) \cdot |\Delta_m(G)| = \delta(G)$.

(1) Structures de l'Information, Institut Henri Poincare, Paris.

1.2. Graphes fccm

Soit $\mathcal{G}(n, m)$ l'ensemble des p-graphes fortement connexes de n sommets et m arcs. Tout graphe G de $\mathcal{G}(n, m)$ a au moins $\nu(G) = k$ circuits élémentaires. Soit $\mathcal{G}_0(n, m)$ l'ensemble des graphes de $\mathcal{G}(n, m)$ qui ont k circuits élémentaires et k seulement. Tout graphe de $\mathcal{G}_0(n, m)$ sera qualifié de fortement connexe c-minimal (fccm). Autrement dit :

Définition 1. Un p-graphe fortement connexe G est fccm si et seulement si :

$$\xi(G) = \nu(G)$$

Les résultats suivants sont démontrés dans [4] :

Théorème 1. Un p-graphe fortement connexe G est fccm si et seulement si il satisfait à l'une des conditions équivalentes suivantes :

i) tous les circuits élémentaires de G sont indépendants,

ii) G possède un arbre de circulation (arbre maximal tel que tout cycle élémentaire associé à cet arbre est un circuit),

iii) pour toute paire $\{ x, y \}$ de sommets de G appartenant à un même circuit élémentaire, il existe un chemin élémentaire unique $[x, y]$ ou il existe un chemin élémentaire unique $[y, x]$.

Proposition 1. Soit G^* un p-graphe fccm, H un arbre de circulation quelconque de G^* et $\bar{H}$ le coarbre associé à H dans G^* :

a) par tout arc du coarbre $\bar{H}$, passe un circuit élémentaire et un seul de G^*;

b) tout circuit élémentaire de G^* contient un arc et un seul de $\bar{H}$;

c) tout circuit élémentaire de G^* est formé d'un chemin de H et d'un arc de $\bar{H}$.

Proposition 2. Si un p-graphe fccm G^* possède un circuit hamiltonien c, tout arbre de circulation H de G^* a tous ses $n - 1$ arcs dans c et est donc un chemin hamiltonien.

Proposition 3. Tout 1-graphe fccm ne peut avoir plus d'un circuit hamiltonien.

1.3. Tournois

Définition 2. Un tournoi est un 1-graphe complet antisymétrique.

Nous noterons T_n un tournoi de n sommets.

Pour un tournoi T_n, on a :

$$m = \frac{n(n-1)}{2}$$

$$k = \frac{(n-1)(n-2)}{2}.$$

Soit s_i le demi-degré extérieur du sommet $x_i (1 \leqslant i \leqslant n)$. Nous appellerons vecteur-score de T_n le n-uple $(s_1, s_2, ..., s_n)$ en supposant que : $s_1 \leqslant s_2 \leqslant ... \leqslant s_n$.

Proposition 4 (Camion). Tout tournoi fortement connexe possède un circuit hamiltonien [2].

2. PREMIERES PROPRIETES DES TOURNOIS FCCM

Soit $T_n^* = (X, U)$ un tournoi fccm.

D'après les propositions 2, 3 et 4, tout arbre de circulation H de T_n^* est un chemin hamiltonien, T_n^* a un circuit hamiltonien unique et H est extrait de ce circuit.

En numérotant convenablement les sommets de T_n^*, on peut noter : $H = [1, 2, ..., n]$. On a alors :

$(i, j) \in U$ si et seulement si ou bien $j = i + 1$, ou bien $i > j + 1$ $(i \in \{ 1, ..., n \}, j \in \{ 1, ..., n \})$.

Proposition 5. Un tournoi T_n^* fccm possède $n - q + 1$ circuits élémentaires de longueur $q\,(3 \leqslant q \leqslant n)$ et $n - q + 1$ seulement.

Démonstration : Soit $H = [1, 2, ..., n]$ un arbre de circulation de T_n^*, en reprenant les notations ci-dessus. Tout circuit élémentaire de T_n^* de longueur q est formé d'un chemin de H de longueur $q - 1$ et d'un arc de $\bar{H}$ (proposition 1, *c*). Soit $\mu_q = [i, i + 1, ..., i + q - 1]$, $1 \leqslant i \leqslant n - q + 1$, un tel chemin de H. Comme il y en a $n - q + 1$, la proposition est démontrée.

On peut vérifier que le nombre total de tous ces circuits élémentaires, q variant de 3 à n, est : $\dfrac{(n-1)(n-2)}{2} = k$.

Proposition 6. Soit T_n^* un tournoi fccm.

a) Pour $n = 3$, T_n^* a 3 arbres de circulation qui sont ses 3 chemins hamiltoniens.

b) Pour $n \geqslant 4$, T_n^* a un seul arbre de circulation qui est un chemin hamiltonien extrait du circuit hamiltonien unique.

Démonstration :

a) immédiat;

b) soit $H = [1, 2, ..., n]$ un arbre de circulation de T_n^*. Soit $c_1 = [1, 2, ..., n - 1, 1]$ et $c_2 = [2, 3, ..., n, 2]$ les deux circuits élémentaires de T_n^* de longueur $n - 1$ $(n - 1 \geqslant 3)$.

Tout arbre de circulation de T_n^* a $n - 2$ arcs dans c_1 et $n - 2$ arcs dans c_2 (proposition 1, *b*). Pour H, ce sont : (1, 2) (2, 3), ..., $(n - 2, n - 1)$ dans c_1, (2, 3), ..., $(n-2, n-1)$, $(n-1, n)$ dans c_2. On ne peut trouver d'autre chemin hamiltonien que H qui ait $n-2$ arcs dans c_1 et $n-2$ arcs dans c_2. CQFD.

On déduit de cette proposition que tous les tournois fccm T_n^*, $n \geqslant 4$, sont isomorphes. Il existe une *numérotation canonique* des sommets, celle qui consiste à noter $H = [1, 2, ..., n]$ l'unique arbre de circulation de T_n^*.

Vecteur-Score. En appelant s_i le demi-degré extérieur du sommet i d'un tournoi T_n^* fccm, on a :

$$s_1 = 1,\ s_n = n-2,\ s_p = p-1\ (p \neq 1 \text{ et } p \neq n).$$

Le vecteur-score de T_n^* est donc $v_n = (1, 1, 2, ..., n-3, n-2, n-2)$. Ainsi

$$v_3 = (1, 1, 1) \qquad v_4 = (1, 1, 2, 2)$$

$$v_5 = (1, 1, 2, 3, 3) \qquad v_6 = (1, 1, 2, 3, 4, 4)$$

REMARQUE. On déduit de la proposition 5 que le nombre des circuits de longueur 3 d'un tournoi T_n^* fccm est : $\xi_3(T_n^*) = n-2$. On le retrouve par la formule générale :

$$\xi_3(T_n) = \frac{n(n-1)(n-2)}{6} - \sum_{p=1}^{n} \frac{s_p(s_p-1)}{2} \quad [6],$$

en prenant $s_1 = 1$, $s_n = n-2$, $s_p = p-1$ $(p \neq 1$ et $p \neq n)$. D'où :

Proposition 7. Tout tournoi T_n de vecteur-score $(1, 1, 2, ..., n-3, n-2, n-2)$ a $n-2$ circuits de longueur 3.

3. CARACTERISATION DES TOURNOIS QUI ONT UN CIRCUIT HAMILTONIEN UNIQUE

Soit la propriété $P(n)$: tout tournoi T_n ayant un circuit hamiltonien unique est fccm.

$P(3)$ et $P(4)$ sont vraies; plus précisément, tout tournoi fortement connexe de 3 ou 4 sommets a un circuit hamiltonien et un seul et est fccm (fig. 1).

Figure 1

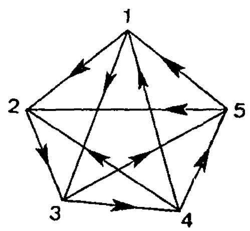

Figure 2

$P(n)$ est fausse pour $n \geqslant 5$ comme nous allons le voir. La figure 2 représente déjà un contre-exemple pour $n = 5$; le graphe de cette figure a un seul circuit hamiltonien : $[1, 2, 3, 4, 5, 1]$ mais n'est pas fccm : les sommets 1 et 3 sont sur un même circuit élémentaire et il existe 2 chemins élémentaires $[1, 3]$ et 3 chemins élémentaires $[3, 1]$.

Douglas a montré dans [5] :

Proposition 8. Pour $n \geqslant 5$, un tournoi $T_n = (X, U)$ admet un circuit hamiltonien unique c si et seulement si les trois conditions suivantes sont satisfaites :

$$\left.\begin{array}{l}
\text{il existe deux ensembles de sommets } R = \{r_1, \ldots, r_p\} \neq \varnothing \text{ et} \\
S = \{s_1, \ldots, s_q\} \text{ (qui peut être vide) et un circuit} \\
\qquad\qquad c = [x, r_1, \ldots, r_p, y, s_1, \ldots, s_q, x] \\
\text{où} \quad n = p + q + 2 \quad \text{et} \quad d^+(x) = d^-(y) = 1 \\
\text{et, pour} \quad |i - j| \geqslant 2 \;,\; (r_i, r_j) \in U \text{ si } i > j \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\;\;\, ,\; (s_i, s_j) \in U \text{ si } i < j
\end{array}\right\} \quad (1)$$

$$(s_q, r_1) \in U \quad , \quad (r_q, s_1) \in U \qquad (2)$$

$$\text{Si} \quad i < j \quad , \quad u \leqslant v \quad , \quad \text{et} \quad (r_i, s_u) \in U, \quad \text{alors}\,(r_j, s_v) \in U \qquad (3)$$

En prenant $S = \varnothing$, nous retrouvons les tournois fccm qui sont décrits par (1).

Camion [3] a donné également plusieurs caractérisations des tournois admettant un circuit hamiltonien unique, mais outre le résultat ci-dessus, Douglas donne un thérorème constructif qui permet d'obtenir ces tournois en donnant des valeurs à des paramètres (deux choix différents des paramètres donnent 2 tournois non isomorphes) et tire de ce théorème le nombre $w(n)$ de tournois T_n non isomorphes ($n \geqslant 5$) qui admettent un circuit hamiltonien unique :

$$w(n) = 1 + \sum_{k=1}^{n-3} \sum_{p=0}^{\min(k-1, n-k-3)} 2^{n-k-p-4}\left[2\binom{n-k-3}{p}\binom{k-1}{p+1} + \binom{n-k-4}{p}\binom{k-1}{p}\right]$$

Les premières valeurs de $w(n)$ sont :

n	3	4	5	6	7	8	9	10
$w(n)$	1	1	3	8	21	55	144	377

Problèmes.

1. Peut-on déduire de la formule précédente :

$$w(n) = w(n-1) + \sum_{i=3}^{n-1} w(i) \qquad \text{pour} \qquad n \geqslant 5 \;?$$

Ce qui entraînerait :

$$w(n) = 3w(n-1) - w(n-2) \qquad \text{pour} \qquad n \geqslant 6.$$

2. Pour $n = 3, 4, 5, 6$, les tournois T_n de vecteur-score $(1, 1, 2, ..., n-3, n-2, n-2)$ ont un circuit hamiltonien unique et leur groupe d'automorphisme est le groupe identité (voir appendice de [7]). Peut-on généraliser?

4. NOMBRE DE CHEMINS HAMILTONIENS DES TOURNOIS FCCM

Notons N^n le nombre de chemins hamiltoniens d'un tournoi fccm T_n^*. Utilisons la numérotation canonique des sommets de T_n^* (sauf pour T_3^*, où nous pouvons choisir entre trois numérotations possibles de telle sorte que [1, 2, 3] désigne un des trois chemins hamiltoniens). Soit N_p^n le nombre de chemins hamiltoniens de T_n^* ayant pour extrémité initiale le sommet p.

Théorème 2. N^n est donné par la relation de récurrence

$$N^n = N^{n-1} + N^{n-2} + N^{n-3}$$

en posant, par convention, $N^0 = N^1 = N^2 = 1$.

Eléments d'une démonstration

Une démonstration complète est donnée dans [4].

On utilise le lemme suivant :

Lemme

a) $N^3 = 3 \quad , \quad N_3^3 = 1$;

b) pour $n \geqslant 4 \quad , \quad$ si $p < n \quad , \quad N_p^n = N^{p-1}$;

c) pour $n \geqslant 4 \quad , \quad N_n^n = N^{n-1} - N_{n-1}^{n-1}$.

Pour démontrer le lemme, on utilise entre autres le fait que le graphe déduit de T_n^* en supprimant le sommet n et tous les arcs incidents à ce sommet est un tournoi fccm T_{n-1}^*, d'arbre de circulation $[1, 2, ..., n-1]$, isomorphe à tout tournoi fccm T_{n-1}^*.

A partir du lemme, on peut calculer N^n de proche en proche mais aussi établir la formule du théorème.

Les premières valeurs de N^n sont données dans la figure 3 (deux premières lignes).

n	3	4	5	6	7	8	9	10
N^n	3	5	9	17	31	57	105	193
$t(n)$	3	5	15	45	189			

Figure 3

On remarque que N^n est impair : c'est vrai pour le nombre de chemins hamiltoniens d'un tournoi T_n quelconque [6].

Expression générale de N^n et comportement asymptotique

A l'aide de la fonction génératrice de la suite $u(n) = N^{n+3}$, on peut trouver une expression générale de N^n. Quand n tend vers l'infini, on obtient :

$$N^n \simeq \frac{x_1 + 1}{x_1 + 3} \frac{1}{x_1^n}$$

x_1 étant la racine réelle de l'équation : $x^3 + x^2 + x - 1 = 0$.

$$x_1 \approx 0{,}545$$

On en déduit la formule approchée :

$$N^n \approx 1{,}84\, N^{n-1}$$

t(n)

Soit $t(n)$ le nombre maximal de chemins hamiltoniens qu'un tournoi T_n peut contenir.

Szele a montré que :

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{t(n)}{n!}\right)^{1/n} = \alpha \qquad \text{avec} \qquad 0{,}5 \leqslant \alpha \leqslant 2^{-3/4} < 0{,}6$$

Il a conjecturé que $\alpha = 0{,}5$ et a donné les premières valeurs de $t(n)$ (fig. 3) [6].

REMARQUE. x_1 et α sont des constantes qui apparaissent toutes les deux dans l'étude du nombre de chemins hamiltoniens de certains tournois. Sont-elles liées par une relation?

5. SUPPRESSION DES CIRCUITS

5.1. Remarques générales

Le problème de la suppression des circuits dans un p-graphe est étudié dans [4] : le point est fait sur les résultats connus, de nouveaux éléments de réponse sont apportés et des algorithmes, en particulier pour les tournois, sont présentés.

Signalons qu'on a, pour tout p-graphe G : $\delta(G) \geqslant \eta(G)$, et que l'égalité est réalisée en particulier pour les p-graphes fccm.

En ce qui concerne ces derniers graphes, remarquons qu'on peut constituer un $\Delta_m(G^*)$ à l'aide d'arcs d'un arbre de circulation de G^*. Précisons ce dernier point.

Étant donné un graphe fccm G^* et H un arbre de circulation de G^*, d'après la proposition 1, tout circuit élémentaire de G^* est formé d'un chemin élémentaire de H et d'un arc de $\bar{H}$. Appelons *H-chemin* un tel chemin de H.

Proposition 9. Soit G^* un graphe fccm et H un arbre de circulation de G^*, un ensemble E d'arcs en nombre minimal représentant les H-chemins de G^* est un $\Delta_m(G^*)$.

Démonstration : E est un ensemble d'arcs représentant les circuits de G^* puisque tout circuit élémentaire de G^* contient un H-chemin, donc un arc de E. Soit F un $\Delta_m(G^*)$ quelconque. Soit E' un ensemble d'arcs obtenu à partir de F par les substitutions suivantes : si $u \in F$ et $u \in \bar{H}$, on remplace u par un arc v de H appartenant au circuit élémentaire unique c passant par u (proposition 1, a); une telle substitution ne prive aucun circuit élémentaire de G^* de représentant puisque c est le seul circuit élémentaire passant par u. E' est donc un $\Delta_m(G^*)$. E', représentant les circuits élémentaires de G^*, représente aussi les H-chemins, puisque tout H-chemin étant dans un circuit élémentaire qui contient un arc de E' dans H, tout H-chemin contient un arc de E'. $|E'|$ est minimal donc $|E'| = |E|$. Par suite $|E| = \delta(G^*)$ et E est donc bien un $\Delta_m(G^*)$.

REMARQUE. Soit $\eta_H(G^*)$ le nombre maximal de H-chemins disjoints 2 à 2 au sens des arcs. Comme deux circuits élémentaires de G^* ne peuvent avoir en commun que des arcs de H : $\eta(G^*) = \eta_H(G^*)$.

Donc
$$\delta(G^*) = \eta_H(G^*)$$

5.2. Suppression des circuits dans un 1-graphe $G = (X, U)$

La recherche d'un ensemble $\Delta \in \Pi(G)$ revient à celle d'un ordre total $\mathcal{O}$ sur X, cet ordre devant être compatible avec l'ordre partiel défini par le rang des sommets dans le graphe sans circuit G_Δ. Δ est l'ensemble des arcs de G dont le sens d'orientation n'est pas conforme à $\mathcal{O}$.

Un ensemble $S \subset U$ est dit ensemble d'*arcs compatibles*. s'il est possible de numéroter les sommets de G de telle sorte que :

$$\text{si} \quad (i, j) \in S \quad , \quad \text{alors} \quad i > j \qquad [6]$$

Si $f(G)$ désigne le nombre maximal d'arcs compatibles de G, on a :

$$f(G) = m - \delta(G).$$

5.3. Résultats pour un tournoi T_n

Des résultats de Erdös, Moon, Reid, Remage sont rappelés ou donnés dans [6] et [7] en utilisant $f(T_n)$. Nous les traduirons ici à l'aide de $\delta(T_n)$.

a_1) $\delta(T_n) \leqslant \dfrac{n(n-2)}{4}$ pour n pair

a_2) $\delta(T_n) \leqslant \dfrac{(n-1)^2}{4}$ pour n impair

b_1) $\delta(T_n) \leqslant \dfrac{n(n-4)}{4}$ pour $n \geqslant 8$, n pair

b_2) $\delta(T_n) \leqslant \dfrac{(n-1)(n-3)}{4}$ pour $n \geqslant 9$, n impair

c) $\delta(T_n) \geqslant \dfrac{n(n-1)}{4} - \dfrac{n(n \log n)^{1/2}}{4}$

pour presque tous les tournois (c'est-à-dire que la proportion de tournois T_n qui ne vérifient pas cette propriété tend vers 0 quand n tend vers l'infini).

d) Pour tout nombre premier de la forme $p = 6k + 1$, il existe un tournoi T_p tel que $\delta(T_p) = \dfrac{p(p-1)}{6}$.

5.4. Résultats pour un tournoi T_n^* fccm

Dans un tournoi T_n^* d'arbre de circulation $H = [1, 2, ..., n]$, tous les chemins élémentaires de H exceptés ceux de longueur 1 sont des H-chemins. On déduit donc de la proposition 9 :

Proposition 10. Dans un tournoi T_n^* fccm d'arbre de circulation $H = [1, 2, ..., n]$ l'ensemble des arcs :

$(2, 3), (4, 5), ..., (n-2, n-1)$ si n est pair

$(2, 3), (4, 5), ..., (n-1, n)$ si n est impair est un $\Delta_m(T_n^*)$ et :

$$\delta(T_n^*) = \frac{n-2}{2} \quad \text{si} \quad n \text{ est pair}$$

$$\delta(T_n^*) = \frac{n-1}{2} \quad \text{si} \quad n \text{ est impair}$$

REMARQUES

1) ces deux formules se résument en $\delta(T_n^*) = \left[\frac{n-1}{2}\right]$;

2) on vérifie que $\delta(T_n^*) = \eta_H(T_n^*)$;

3) tout tournoi fortement connexe T_3 ou T_4 étant fccm, on a :

$$\delta(T_3) = 1$$
$$\delta(T_4) = 1 ;$$

3) les inégalités a_1 et a_2 peuvent se résumer en :

$$\delta(T_n) \leqslant \left[\frac{n}{2}\right]\left[\frac{n-1}{2}\right]$$

ou, en faisant intervenir $\delta(T_n^*)$:

$$\delta(T_n) \leqslant \left[\frac{n}{2}\right]\delta(T_n^*).$$

REFERENCES

[1] C. BERGE, *Graphes et Hypergraphes*, Dunod, Paris, 1970.

[2] P. CAMION, « Chemins et circuits hamiltoniens des graphes complets », *C.R.A.S.*, T. 249, 1960, 2151-2152.

[3] P. CAMION, « Quelques propriétés des chemins et circuits hamiltoniens dans la théorie des graphes », *Cahier du Centre de Recherche Opérationnelle Belge*, vol. 2, n° 1, 1960.

[4] G. CHATY, *Cheminements remarquables dans les graphes : existence, obtention, conservation*. Thèse, Paris, juin 1971.

[5] R. J. DOUGLAS, « Tournaments that admit exactly one hamiltonian circuit », *Proc. London Math. Soc.*, 1970, 21, n° 4, 716-730.

[6] J. W. MOON, *Topics on Tournaments*, Holt, Rinehart and Winston, New-York, 1968.

[7] J. W. MOON, *Four Combinatorial Problems, Combinatorial Mathematics and its Applications*, (Ed. Welsh D. J. A.), Academic Press London and New-York, 1971, 185-190.