REVUE FRANÇAISE D'INFORMATIQUE ET DE RECHERCHE OPÉRATIONNELLE. SÉRIE ROUGE

CLAUDE GASQUET

Brève communication. Une borne d'erreur dans la résolution de problèmes linéaires perturbes et régularises

Revue française d'informatique et de recherche opérationnelle. Série rouge, tome 5, n° R3 (1971), p. 96-100

<http://www.numdam.org/item?id=M2AN_1971__5_3_96_0>

R.I.R.O.
(5e année, N° R-3, 1971, p. 96-100)

UNE BORNE D'ERREUR DANS LA RESOLUTION DE PROBLEMES LINEAIRES PERTURBES ET REGULARISES

par Claude GASQUET [1]

Sommaire. — *Le problème linéaire $Ax = b$ admet x_0 comme solution normale, l'équation perturbée étant $A'x = b'$. Tikhonov a démontré que le vecteur x'_α, qui minimise*

$$\|A'x - b'\|^2 + \alpha\|x\|^2 \ (\alpha > 0)$$

était « voisin » de x_0. Nous donnons ici une majoration explicite de $\|x'_\alpha - x_0\|$ en fonction de α et de la distance de (A, b) à (A', b').

$A : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ étant un opérateur linéaire, on considère l'équation

$$(1) \qquad Ax = b$$

dont on suppose qu'elle admet des solutions ($b \in ImA$). Celles-ci forment une variété linéaire V et on appelle solution normale de (1) l'élément $x_0 \in V$ de norme minimum. Le calcul de x_0 peut être très instable, et A et b connus approximativement. Tikhonov a régularisé le problème de la manière suivante : soient A' et b' des matrices voisines de A et b ; on considère le point $x'_\alpha \in \mathbf{R}^n$ qui rend minimum $\|A'x - b'\|^2 + \alpha\|x\|^2$.

Si on a $\|A' - A\| \leqslant \delta$ et $\|b' - b\| \leqslant \delta$, le problème est d'étudier la proximité de x'_α et x_0 suivant les valeurs de α et δ. Nous prendrons sur R^n et R^m les normes euclidiennes; sur l'espace des matrices A, on utilisera soit la norme $S(A) = \text{Sup} \{ \|Ax\|, \|x\| \leqslant 1 \}$ soit la norme $\|A\| = \left[\sum_{i/j} |a_{ij}|^2\right]^{1/2}$.

Tikhonov a démontré le résultat suivant [1] :

$$\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, \delta_0 > 0, \forall\, \delta \in]0, \delta_0[, \forall\, \alpha \in \left[\frac{\delta^2}{h(\delta)}, k(\delta)\right], \|x'_\alpha - x_0\| \leqslant \varepsilon$$

(1) Institut de Mathématiques Appliquées, Grenoble.

où $h(\delta)$ et $k(\delta)$ sont deux fonctions quelconques positives croissantes, tendant vers 0 quand δ tend vers 0 et vérifiant $\delta^2 \leqslant h(\delta) \cdot k(\delta)$.

Ce résultat n'est pas constructif car la démonstration est faite par l'absurde. Nous nous proposons dans la suite de donner une majoration de $\|x'_\alpha - x_0\|$ en fonction de α et δ; on passera par l'intermédiaire du vecteur $x_\alpha \in \mathbf{R}^n$ qui minimise $\|Ax - b\|^2 + \alpha\|x\|^2$.

I. EXPRESSION DE $\|x_\alpha - x_0\|$; MAJORATION

A^* désignant l'adjointe de A, x_α est solution du système de Cramer :

$$(E) \qquad (A^*A + \alpha I)x_\alpha = A^*b.$$

Soient $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \dots \geqslant \lambda_n \geqslant 0$ les valeurs propres de A^*A, et $u_1, u_2, \dots, u_n$ les vecteurs propres normés associés. Si A est de rang r, on a

$$\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \dots \geqslant \lambda_r > 0$$

et $\lambda_{r+1} = \dots = \lambda_n = 0$. Comme $u_1, u_2, \dots, u_r$ forment une base orthonormée de $(\operatorname{Ker} A)^\perp$, on peut écrire :

$$x_0 = \sum_{i=1}^{r} \xi_i^0 u_i \qquad x_\alpha = \sum_{i=1}^{r} \xi_i^\alpha u_i$$

$$A^*b = \sum_{i=1}^{r} \beta_i u_i.$$

De $A^*Ax_0 = A^*b$ on déduit $\xi_i^0 = \dfrac{\beta_i}{\lambda_i}$ $(1 \leqslant i \leqslant r)$ et de (E) :

$$\sum_{i=1}^{r} (\lambda_i + \alpha)\xi_i^\alpha u_i = \sum_{i=1}^{r} \beta_i u_i.$$

D'où les relations :

$$x_0 = \sum_{i=1}^{r} \frac{\beta_i}{\lambda_i} u_i$$

$$x_\alpha = \sum_{i=1}^{r} \frac{\beta_i}{\lambda_i + \alpha} u_i$$

$$\|x_\alpha - x_0\|^2 = \alpha^2 \sum_{i=1}^{r} \frac{\beta_i^2}{\lambda_i^2(\lambda_i + \alpha)^2}$$

$$\|x_\alpha - x_0\| \leqslant \frac{\alpha\|A\,b\|}{\lambda_r(\lambda_r + \alpha)}$$

$$\|x_\alpha - x_0\| \leqslant \frac{\alpha\|x_0\|}{\lambda_r + \alpha}.$$

II. MAJORATION DE $\|x'_\alpha - x_\alpha\|$

Soit $A' = A + H$, $b' = b + h$, avec $\|H\| \leqslant \delta$ et $\|h\| \leqslant \delta \cdot x'_\alpha$ est solution de :

$$(E') \qquad (A'^*A' + \alpha I)x'_\alpha = A'^*b'$$

et compte tenu de (E) on obtient :

$$(A'^*A' + \alpha I)(x'_\alpha - x_\alpha) = H^*(b - Ax_\alpha) + A'^*(h - Hx_\alpha)$$

d'où :

$$\|x'_\alpha - x_\alpha\| \leqslant S[(A'^*A' + \alpha I)^{-1}] \, \|H^*(b - Ax_\alpha) + A'^*(h - Hx_\alpha)\|.$$

Soit $M = (A'^*A' + \alpha I)^{-1}$; si $\lambda'_1 \geqslant \lambda'_2 \geqslant \dots \geqslant \lambda'_n \geqslant 0$ sont les valeurs propres de A'^*A', on a :

$$S(M) = \frac{1}{\lambda'_n + \alpha} \leqslant \frac{1}{\alpha}.$$

Soit $D = H^*(b - Ax_\alpha) + A'^*(h - Hx_\alpha)$. Il en résulte :

$$\|D\| \leqslant \delta[\|Ax_\alpha - b\| + \|A'\| \, \|x_\alpha\| + \|A'\|].$$

D'après la définition de x_α on a

$$\|Ax_\alpha - b\|^2 + \alpha\|x_\alpha\|^2 \leqslant \alpha\|x_0\|^2.$$

Si on pose $U = \|Ax_\alpha - b\|$ et $V = \|x_\alpha\|$ un calcul rapide donne :

$$\max \{ U + kV, U^2 + \alpha V^2 \leqslant \alpha\|x_0\|^2 \} = U_0 + kV_0$$

avec

$$U_0 = \frac{\alpha\|x_0\|}{\sqrt{k^2 + \alpha}}, \qquad V_0 = \frac{k\|x_0\|}{\sqrt{k^2 + \alpha}} \qquad k = \|A'\|.$$

Donc :

$$\|D\| \leqslant [\delta \sqrt{\|A'\|^2 + \alpha}\|x_0\| + \|A'\|]$$

ou encore :

$$\|D\| \leqslant \delta\left[(1 + \|x_0\|)\|A'\| + \alpha \frac{\|x_0\|}{2\|A'\|}\right]$$

et on obtient :

$$\|x'_\alpha - x_\alpha\| \leqslant \frac{\delta}{\alpha} \|A'\|(1 + \|x_0\|) + \delta \frac{\|x_0\|}{2\|A'\|}.$$

La majoration cherchée est donc :

$$\boxed{\|x'_\alpha - x_0\| \leqslant \frac{\alpha\|x_0\|}{\lambda_r + \alpha} + \frac{\delta}{\alpha}\|A'\|(1 + \|x_0\|) + \delta\frac{\|x_0\|}{2\|A'\|}}$$

III. CONCLUSION

1° Il existe des nombres a, b, c, d, positifs tels que :

$$\|x'_\alpha - x_0\| \leqslant \frac{a\alpha}{b+\alpha} + c\frac{\delta}{\alpha} + d\delta.$$

Donc $x'_\alpha \to x_0$ quand α et δ tendent vers 0 de façon à ce que $\frac{\delta}{\alpha}$ tende aussi vers 0.

2° Ce résultat n'implique pas celui trouvé par M. Tikhonov, et la majoration est évidemment mauvaise lorsque α est trop petit par rapport à δ.

3° Lorsque δ est assez petit, $\left(\delta < \frac{ab}{c}\right)$ la fonction majorante présente un minimum pour $\alpha^*(\delta) = b\frac{c\delta + \sqrt{abc\delta}}{ab - c\delta}$ et on a alors $\|x'_\alpha - x_0\| \leqslant A\sqrt{\delta} + B\delta$ avec $A = 2\sqrt{\frac{ac}{b}}$ et $B = d - \frac{c}{b}\cdot$

IV. EXEMPLES NUMERIQUES

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \qquad x_0 = \begin{bmatrix} 0{,}2 \\ 0{,}4 \end{bmatrix}$$

$$A' = \begin{bmatrix} 1{,}000\,005 & 2{,}000\,004 \\ 1{,}999\,999\,65 & 3{,}999\,995\,2 \\ 3{,}000\,025 & 6{,}000\,001\,6 \end{bmatrix} \qquad b' = \begin{bmatrix} 1 \\ 1{,}999\,999\,65 \\ 3{,}000\,01 \end{bmatrix}$$

$$\delta = 2{,}63 \cdot 10^{-5} \qquad \alpha = 2{,}24 \cdot 10^{-1} \qquad x'_\alpha = \begin{bmatrix} 0{,}199\,369 \\ 0{,}398\,721 \end{bmatrix}$$

$$\|x'_\alpha - x_0\| = 0{,}001\,426$$
$$\text{borne} = 0{,}002\,849$$

b)

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \\ 8 & 0 & 4 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix} \qquad x_0 = \begin{bmatrix} 0{,}4 \\ 0 \\ 0{,}2 \end{bmatrix}$$

$$A' = \begin{bmatrix} 2{,}001 & -10^{-6} & 1{,}000\,4 \\ -1{,}999 & 10^{-8} & -0{,}999\,5 \\ 7{,}998 & -10^{-6} & 4{,}000\,04 \end{bmatrix} \quad b' = \begin{bmatrix} 0{,}999\,99 \\ -1 \\ 3{,}999\,994 \end{bmatrix} \quad x'_\alpha = \begin{bmatrix} 0{,}390\,588 \\ -5{,}4 \cdot 10^{-8} \\ 0{,}195\,338 \end{bmatrix}$$

$$\delta = 2{,}53 \cdot 10^{-3} \qquad \alpha = 2{,}18$$

$$\|x'_\alpha - x_0\| = 0{,}010\,503$$

$$\text{borne} = 0{,}026\,581$$

c)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad x_0 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$A' = \begin{bmatrix} 1{,}000\,024\,1 & 2{,}000\,014 \\ 3{,}000\,004\,2 & -0{,}999\,999\,54 \\ 1{,}000\,023 & 1{,}000\,045 \end{bmatrix} \qquad b' = \begin{bmatrix} 1 \\ -4{,}000\,002\,45 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\delta = 5{,}79 \cdot 10^{-5} \qquad \alpha = 2{,}46 \cdot 10^{-2} \qquad x'_\alpha = \begin{bmatrix} -0{,}997\,772 \\ 0{,}995\,920 \end{bmatrix}$$

$$\|x'_\alpha - x_0\| = 4{,}65 \cdot 10^{-3}$$

$$\text{borne} = 2{,}92 \cdot 10^{-2}.$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] A. N. TIKHONOV, *Incorrect problems of linear algebra and a stable method for their solution.* Doklady (1965), Tom 163, n° 3, Soviet Math. (1965), vol. 6, n° 4, pp. 988-991.

[2] V. K. IVANOV, *On linear problems which are not well posed.* Soviet math., 3, 1962, 2.