Jean-Marie Blondel

Brève communication. Phénomène de perturbation singulière pour une équation intégrale linéaire de Volterra

Revue française d'informatique et de recherche opérationnelle. Série rouge, tome 5, nº R3 (1971), p. 67-72

<http://www.numdam.org/item?id=M2AN_1971__5_3_67_0>

R.I.R.O.
(5e année, Nº R-3, 1971, p. 67-72)

PHENOMENE DE PERTUBATION SINGULIERE POUR UNE EQUATION INTEGRALE LINEAIRE DE VOLTERRA

par Jean-Marie BLONDEL (1)

Résumé. — *On considère une équation intégrale réelle linéaire, de Volterra, de seconde espèce. La fonction inconnue, hors du symbole d'intégration, est supposée multipliée par un petit facteur positif* ε. *Toutes les fonctions données sont supposées être convenablement régulières. On étudie le comportement de la solution unique quand* ε *tend vers zéro. Dans cette question, un rôle essentiel est joué par le signe (supposé strictement constant) de la fonction-noyau de l'équation intégrale, sur la diagonale.*

I. RAPPELS

Soient x et t deux variables réelles. Soient $f(x)$ une fonction donnée, réelle, continue pour $x \in [0, 1]$, et $K(x, t)$ une fonction donnée, réelle, continue en (x, t) pour $0 \leqslant t \leqslant x \leqslant 1$. [Nous ne cherchons pas à faire, sur les données, les hypothèses les plus faibles.]

L'équation intégrale de Volterra, linéaire, de seconde espèce :

$$y(x) + \int_0^x K(x, t)y(t)dt = f(x),$$

en l'inconnue $y(x)$, a une solution et une seule, dans $L^2(0, 1)$.

Cette solution unique est réelle et continue sur [0, 1]. Elle est donnée par le processus d'approximations successives $y(x) = \lim\limits_{n \to +\infty} y_n(x)$, uniformément sur [0, 1], avec :

$$y_0(x) = f(x) \quad ; \quad y_{n+1}(x) = f(x) - \int_0^x K(x, t)y_n(t)dt \ (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

(1) Faculté des Sciences de Bordeaux, 351, cours de la Libération, 33-Talence.

On peut aussi exprimer cette solution à l'aide du noyau résolvant $\Gamma(x, t)$:

$$y(x) = f(x) + \int_0^x \Gamma(x, t) f(t) dt \quad \text{avec} \quad \Gamma(x, t) = \sum_{n=1}^{+\infty} K_n(x, t)$$

$$K_1(x, t) = -K(x, t) \quad ; \quad K_{n+1}(x, t) = -\int_t^x K(x, s) K_n(s, t) ds \, (n = 1, 2, ...)$$

La série, exprimant Γ, converge uniformément en (x, t) pour $0 \leqslant t \leqslant x \leqslant 1$.

Considérons d'autre part l'équation intégrale de Volterra de première espèce :

$$\int_0^x K(x, t) z(t) dt = f(x) \quad , \quad \text{en l'inconnue } z(x).$$

Dans le cas où les conditions suivantes sont remplies simultanément : 1) $f(0) = 0$, 2) $K(x, x) \neq 0 \quad \forall\, x \in [0, 1]$, 3) $f'(x)$ existe et est continue sur $[0, 1]$, 4) $\dfrac{\partial K}{\partial x}(x, t)$ existe et est continue en (x, t) pour $0 \leqslant t \leqslant x \leqslant 1$, il est classique que, dans la classe des fonctions continues sur $[0, 1]$, notre équation intégrale de première espèce possède une solution et une seule.

On l'obtient en résolvant l'équation intégrale de seconde espèce (obtenue par dérivation à partir de l'équation de première espèce) :

$$z(x) + \int_0^x \frac{1}{K(x, x)} \frac{\partial K}{\partial x}(x, t) z(t) dt = \frac{f'(x)}{K(x, x)}$$

II. *Le problème traité ici* : Toutes les fonctions considérées, tant inconnues que données, seront supposées à valeurs réelles.

$f(x)$ sera supposée de classe $\mathcal{C}^2$ pour $x \in [0, 1]$. On supposera que $K(x, t)$ est continuement différentiable en x et t, et possède une dérivée seconde $\dfrac{\partial^2 K}{\partial x^2}$ continue, pour $0 \leqslant t \leqslant x \leqslant 1$.

ε désignant un paramètre réel positif, on considère l'équation intégrale (1), de seconde espèce, en l'inconnue $y_\varepsilon(x)$:

$$\text{(1)} \qquad \varepsilon y_\varepsilon(x) + \int_0^x K(x, t) y_\varepsilon(t) dt = f(x)$$

On se propose d'étudier le comportement de $y_\varepsilon(x)$ pour $0 < x \leqslant 1$, quand ε tend vers zéro.

On peut s'attendre à ce que, au moins dans certains cas, $y_\varepsilon(x)$ tende vers une solution $z(x)$ de (2) :

$$\text{(2)} \qquad \int_0^x K(x, t) z(t) dt = f(x)$$

Il est donc naturel d'ajouter, aux hypothèses déjà faites, au début du § II, sur K et f, les hypothèses suivantes, garantissant l'existence et l'unicité d'une solution $z(x)$, de (2), continue sur [0, 1] :

$$f(0) = 0 \quad ; \quad K(x, x) \neq 0 \quad , \quad \forall\, x \in [0, 1]$$

III. *Le cas : $K(x, x) > 0\ \forall\, x \in [0, 1]$.*

Théorème 1 : Si, $\forall\, x \in [0, 1]$, on a $K(x, x)$ strictement positif, alors, quand ε tend vers $+\,0$, la solution $y_\varepsilon(x)$ unique de (1), tend, pour $x \in\,]0, 1]$, vers la solution continue $z(x)$ unique de (2). Cette convergence est uniforme sur tout compact inclus dans $]0, 1]$.

Pour $x = 0$, il y a, en général, un phénomène de « couche-limite » puisque $y_\varepsilon(0) = 0$, $\forall\, \varepsilon > 0$ et $z(0) = \dfrac{f'(0)}{K(0, 0)}$

Dans le cas particulier où $f'(0) = 0$, on a : $\lim\limits_{\varepsilon \to +0} [y_\varepsilon(x) - z(x)] = 0$ uniformément sur [0, 1]

La démonstration se fait en plusieurs étapes : ($\exp\{u\}$ signifie e^u)

1° De (1) nous tirons la relation suivante :

$$\int_0^x y_\varepsilon(t) K(t, t) \exp\left\{-\frac{1}{\varepsilon}\int_t^x K(s, s)\,\mathrm{d}s\right\}\mathrm{d}t$$
$$+\frac{1}{\varepsilon}\int_0^x K(r, r)\exp\left\{-\frac{1}{\varepsilon}\int_r^x K(s, s)\,\mathrm{d}s\right\}\mathrm{d}r\int_0^r K(r, t)y_\varepsilon(t)\,\mathrm{d}t$$
$$= \frac{1}{\varepsilon}\int_0^x f(r)K(r, r)\exp\left\{-\frac{1}{\varepsilon}\int_r^x K(s, s)\,\mathrm{d}s\right\}\mathrm{d}r$$

Par combinaison linéaire entre (1) et cette relation, nous voyons que la solution unique $y_\varepsilon(x)$ de (1) vérifie l'équation intégrale (3) :

$$y_\varepsilon(x) = g_\varepsilon(x) - \int_0^x H_\varepsilon(x, t) y_\varepsilon(t)\,\mathrm{d}t \tag{3}$$

avec :

$$g_\varepsilon(x) = \frac{f(x)}{\varepsilon} - \frac{1}{\varepsilon^2}\int_0^x f(r)K(r, r)\exp\left\{-\frac{1}{\varepsilon}\int_r^x K(s, s)\,\mathrm{d}s\right\}\mathrm{d}r$$

et

$$H_\varepsilon(x, t) = \frac{1}{\varepsilon}K(x, t) - \frac{1}{\varepsilon}K(t, t)\exp\left\{-\frac{1}{\varepsilon}\int_t^x K(s, s)\,\mathrm{d}s\right\}$$
$$-\frac{1}{\varepsilon^2}\int_t^x K(r, t)\,K(r, r)\exp\left\{-\frac{1}{\varepsilon}\int_r^x K(s, s)\,\mathrm{d}s\right\}\mathrm{d}r$$

Du fait que (3) a une solution et une seule, les équations (1) et (3) sont équivalentes.

2° On transforme les expressions de g_ε et H_ε par des intégrations par parties :

$$(4') \qquad g_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon}\int_0^x f'(r) \exp\left\{-\frac{1}{\varepsilon}\int_r^x K(s, s)\, ds\right\} dr$$

$$(4'') \qquad g_\varepsilon(x) = \frac{f'(x)}{K(x, x)} - \frac{f'(0)}{K(0, 0)} \exp\left\{-\frac{1}{\varepsilon}\int_0^x K(s, s)\, ds\right\}$$

$$- \int_0^x \exp\left\{-\frac{1}{\varepsilon}\int_r^x K(s, s)\, ds\right\} \frac{d}{dr}\left[\frac{f'(r)}{K(r,r)}\right] dr$$

$$(5') \qquad H_\varepsilon(x, t) = \frac{1}{\varepsilon}\int_t^x \frac{\partial K}{\partial r}(r, t) \exp\left\{-\frac{1}{\varepsilon}\int_r^x K(s, s)\, ds\right\} dr$$

(5″)

$$H_\varepsilon(x, t) = \frac{1}{K(x, x)}\frac{\partial K(x, t)}{\partial x} - \frac{1}{K(t, t)}\left[\frac{\partial K}{\partial x}(x, t)\right]_{x=t} \exp\left\{-\frac{1}{\varepsilon}\int_t^x K(s, s)\, ds\right\}$$

$$- \int_t^x \exp\left\{-\frac{1}{\varepsilon}\int_r^x K(s, s)\, ds\right\} \frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{1}{K(r, r)}\frac{\partial K}{\partial r}(r, t)\right] dr$$

3° De (4′) et (5′) nous tirons les majorations suivantes :

$$|g_\varepsilon(x)| \leqslant \frac{1}{m} \sup_{[0,1]} |f'(x)| \quad , \quad \forall\, \varepsilon > 0 \quad , \quad \forall\, x \in [0, 1]$$

$$|H_\varepsilon(x, t)| \leqslant \frac{1}{m} \cdot \sup_{0 \leqslant t \leqslant x \leqslant 1} \left|\frac{\partial K}{\partial x}(x, t)\right|,$$

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad , \quad \forall\, (x, t) \text{ tel que } 0 \leqslant t \leqslant x \leqslant 1$$

où on a posé :

$$m = \inf_{[0,1]} K(x, x)$$

De ces majorations, et grâce à la résolution de (3) par approximations successives, nous tirons que $|y_\varepsilon(x)|$ est majorée par une constante finie, indépendante non seulement de $x \in [0, 1]$, mais aussi de $\varepsilon > 0$.

4° Considérons maintenant (4″) et (5″). On en tire aisément ce qui suit :

$$g_\varepsilon(0) = 0 \quad , \quad \forall\, \varepsilon > 0 \quad ; \quad \lim_{\varepsilon \to +0} g_\varepsilon(x) = \frac{f'(x)}{K(x, x)} \quad , \quad \forall\, x \in]0, 1]$$

Cette convergence a lieu uniformément en x sur $[\alpha, 1]$, $\forall\, \alpha \in]0, 1[$.

Si $f'(0) = 0$, alors, quand $\varepsilon \to +0$, $g_\varepsilon(x)$ tend vers sa limite uniformément sur $[0, 1]$

$$H_\varepsilon(x, x) = 0, \quad \forall\, \varepsilon > 0 \quad \text{et} \quad \forall\, x \in [0, 1]$$

$$\lim_{\varepsilon \to +0} H_\varepsilon(x, t) = \frac{1}{K(x, x)} \frac{\partial K}{\partial x}(x, t) \quad , \quad \forall\, (x, t) \text{ tel que } 0 \leqslant t < x \leqslant 1.$$

5° De (2) nous tirons :

$$z(x) + \int_0^x \frac{1}{K(x, x)} \frac{\partial K}{\partial x}(x, t) z(t)\, \mathrm{d}t = \frac{f'(x)}{K(x, x)}$$

Par combinaison linéaire avec (3), il vient :

$$u_\varepsilon(x) = h_\varepsilon(x) - \int_0^x \frac{1}{K(x, x)} \frac{\partial K}{\partial x}(x, t) u_\varepsilon(t)\, \mathrm{d}t \tag{6}$$

avec :

$$\begin{cases} u_\varepsilon(x) = z(x) - y_\varepsilon(x). \\ h_\varepsilon(x) = \dfrac{f'(x)}{K(x, x)} - g_\varepsilon(x) - \displaystyle\int_0^x \left[\frac{1}{K(x, x)} \frac{\partial K}{\partial x}(x, t) - H_\varepsilon(x, t) \right] y_\varepsilon(t)\, \mathrm{d}t \end{cases}$$

Grâce aux résultats obtenus en 3° et 4°, et en utilisant de nouveau (5″), on a :

$$\lim_{\varepsilon \to +0} h_\varepsilon(x) = 0 \quad , \quad \forall\, x \in]0, 1],$$

et cette convergence est uniforme en x sur $[\alpha, 1]$, $\forall\, \alpha \in]0, 1]$

Dans le cas particulier où $f'(0) = 0$, on a : $\lim\limits_{\varepsilon \to +0} h_\varepsilon(x) = 0$ uniformément sur $[0, 1]$.

6° On résout alors (6) en l'inconnue u_ε(h_ε étant considérée comme connue) en faisant apparaître le noyau résolvant. Le théorème 1 s'en suit.

IV. *Le cas : $K(x, x) < 0$* $\quad \forall\, x \in [0, 1]$

Nous élargissons l'hypothèse sur le signe de $K(x, x)$, mais nous sommes amenés à introduire une hypothèse nouvelle sur $f(x)$:

Théorème 2 : Si l'on a simultanément : *a)* $K(0, 0) < 0$ (strictement); *b)* 0 est un zéro isolé, sur $[0, 1]$, pour la fonction f(x), alors, quand $\varepsilon \to +0$, on a :

$$\int_0^1 |y_\varepsilon(x)|\, \mathrm{d}x \to +\infty.$$

En effet, il existe une constante $\beta \in]0, 1]$, telle qu'on ait :

$$\begin{cases} |f(x)| \text{ strictement positif pour } x \in]0, \beta] \\ K(x, t) \text{ strictement négatif pour } 0 \leqslant t \leqslant x \leqslant \beta \end{cases}$$

On résout (1) par approximations successives et on voit aisément qu'on a :

$$|y_\varepsilon(x)| \geqslant \frac{1}{\varepsilon}|f(x)| \quad \forall\, x \in [0, \beta].$$

Le théorème 2 s'en suit.

REMARQUE : On peut montrer aisément que, quand $\varepsilon \to +0$, $\int_0^1 |y_\varepsilon(x)|\,\mathrm{d}x$ tend vers l'∞ comme une fonction exponentielle de $1/\varepsilon$; ceci sous les hypothèses du théorème 2.

V. EXTENSIONS DE CES METHODES A D'AUTRES EQUATIONS INTEGRALES

Les méthodes qui précèdent peuvent être étendues, à des cas où, dans les équations intégrales (1) et (2), l'intégrale simple est remplacée par une intégrale double, ou encore par une combinaison linéaire d'une intégrale double et d'intégrales simples, par exemple :

$$\varepsilon y_\varepsilon(x_1, x_2) + \int_0^{x_1}\int_0^{x_2} K_1(x_1, x_2\,;\, t_1, t_2) y_\varepsilon(t_1, t_2)\,\mathrm{d}t_1,\mathrm{d}t_2$$

$$+ \int_0^{x_1} K_2(x_1, x_2\,;\, t_1) y_\varepsilon(t_1, x_2)\,\mathrm{d}t_1 + \int_0^{x_2} K_3(x_1, x_2\,;\, t_2) y_\varepsilon(x_1, t_2)\,\mathrm{d}t_2$$

$$= f(x_1, x_2)$$

Celà permet l'étude des perturbations singulières pour certains problèmes relatifs aux équations aux dérivées partielles, linéaires et hyperboliques, du second ordre, à deux variables indépendantes.

Malheureusement, quand le nombre des variables indépendantes surpasse 2, la méthode des équations intégrales devient inopérante et on doit avoir recours à des méthodes d'analyse fonctionnelle, mises au point par des mathématiciens tels que, pour la France, J. L. Lions et son équipe.