LUC TARTAR

Brève communication. Une nouvelle caractérisation des *M* matrices

Revue française d'informatique et de recherche opérationnelle. Série rouge, tome 5, nº R3 (1971), p. 127-128

<http://www.numdam.org/item?id=M2AN_1971__5_3_127_0>

R.I.R.O.
(5e année, N° R-3, 1971, p. 127-128)

UNE NOUVELLE CARACTERISATION DES M MATRICES

par Luc TARTAR (1)

Résumé. — *On donne une nouvelle caractérisation des M Matrices en relation avec les matrices définies positives.*

Théorème : Soit A une matrice carrée vérifiant : $a_{ii} \geqslant 0$; $a_{ij} \leqslant 0$ si $i \neq j$.

Alors les deux conditions suivantes sont équivalentes :

1) A^{-1} existe et a ses coefficients $\geqslant 0$.

2) Il existe une matrice diagonale D, de coefficients diagonaux > 0, telle que DA soit définie positive.

Démonstration : 1) $\Rightarrow$ 2). Soit e le vecteur ayant toutes ses composantes égales à 1. On définit x et y par $Ax = e$ et $A^*y = e$.

Alors on a $x_i > 0$ et $y_i > 0$ pour tout i.

Soit B la matrice définie par $b_{ij} = y_i a_{ij} x_j$.

Alors $b_{ii} - \sum_{j \neq i} |b_{ij}| = \sum_j b_{ij} = y_i > 0$ et $b_{ii} - \sum_{j \neq i} |b_{ji}| = \sum_j b_{ji} = x_i > 0$.

Par conséquent B et B^* sont des matrices à diagonale strictement dominante.

Donc $B + B^*$ l'est aussi; mais, étant symétrique, elle est alors définie positive.

Donc il existe $\alpha > 0 : (Bu, u) \geqslant \alpha \|u\|^2$.

Soit alors $d_i = x_i^{-1} y_i$ et D la matrice diagonale d'éléments diagonaux d_i.

$$\text{Alors } (DAu, u) = \sum_{i,j} d_i a_{ij} u_i u_j = \sum_{i,j} b_{ij}(x_i^{-1} u_i)(x_j^{-1} u_j)$$

$$\geqslant \alpha \sum_i |x_i^{-1} u_i|^2 \geqslant \beta \sum_i |u_i|^2$$

(1) Attaché de Recherches au C. N. R. S. Paris. Laboratoire d'Analyse Numérique, Université Paris-VIe, Paris.

2) $\Rightarrow$ 1) si $u \neq 0$ et $Au = v$ on a alors $\sum_i d_i u_i v_i > 0$.

Par conséquent il existe i tel que $u_i v_i > 0$ ce qui entraîne 1) d'après une propriété classique des M Matrices [1].

[1] M. FIEDLER et V. PTAK, *On matrices with positive off diagonal elements and positive principal minors.* Czec. Math. J., 12 (87), 1962, p. 382-400.