Revue française d'informatique et de recherche opérationnelle. Série rouge

J. Zidani

Structuration de l'ensemble des sous-espaces d'un espace par une relation

Revue française d'informatique et de recherche opérationnelle. Série rouge, tome 4, nº R3 (1970), p. 83-89

<http://www.numdam.org/item?id=M2AN_1970__4_3_83_0>

R.I.R.O.
(4e année, R-3, 1970, p. 83-89)

STRUCTURATION DE L'ENSEMBLE DES SOUS-ESPACES D'UN ESPACE PAR UNE RELATION

par J. ZIDANI [1]

Sommaire. — *Il arrive souvent qu'une relation R entre des variables en nombre fini soit telle que certaines variables y soient fonctions de certaines autres. Cela permet alors de définir un préordre sur l'ensemble des sous-espaces engendrés par les variables de R. L'application faisant correspondre à tout sous-espace le sous-espace de sa classe d'équivalence qui contient le plus de variables est une fermeture. Le calcul booléen peut être utilisé pour l'étude de cette structuration.*

1° DEFINITIONS ET NOTATIONS

Nous noterons $E = (A, B, C, D)$ l'espace engendré par les variables A, B, C et D, c'est à dire le produit cartésien des ensembles A, B, C et D. Nous noterons $E_1 \rightarrow E_2$ si E_2 est sous-espace de E_1 c'est-à-dire si l'ensemble des variables engendrant E_2 est une partie de l'ensemble des variables engendrant E_1; nous dirons alors que E_1 est plus grand que E_2 dans l'ordre de projection.

Étant donnés deux espaces E_1 et E_2 nous noterons $E_1 \cdot E_2$ la borne inférieure de E_1 et E_2 qui est l'espace engendré par les variables qui leur sont communes, tandis que nous noterons $E_1 + E_2$ la borne supérieure de E_1 et E_2 ou espace engendré par E_1 et E_2 qui a pour variables celles figurant dans au moins un des deux espaces.

EXEMPLE : $E_1 = (A, B, C, D)$; $E_2 = (C, D, F)$;

$$E_1 \cdot E_2 = (C, D); E_1 + E_2 = (A, B, C, D, F).$$

Pour faciliter les écritures, si E_1 et E_2 n'ont aucune variable commune, nous poserons $E_1 \cdot E_2 = O$, O étant considéré comme un espace qui n'aurait aucune variable.

---

(1) Maître Assistant à l'IUTB de Grenoble (Informatique).

Une relation $R(A, B, C, D, F, G)$ entre les variables A, B, C, D, F et G est une partie de l'espace $E = (A, B, C, D, F, G)$ formée de points (a, b, c, d, f, g) dont on dit qu'ils vérifient la relation R. La projection de R sur un sous-espace $E_1 = (A, B, C)$ de E, notée $E_1 . R$, est l'ensemble des points $(a, b, c) \in E_1$ pour lesquels il existe au moins une valeur d, f, g des autres variables D, F, G de R telles que $(a, b, c, d, f, g) \in R$.

On dit qu'une relation $R(A, B, C, D, F, G)$ définit $E_2 = (A, B, C)$ en fonction de $E_1 = (C, D, F)$ si pour tout point $(c, d, f) \in E_1 \cdot R$, il existe un seul point (a, b, c) tel que $(a, b, c, d, f) \in (E_1 + E_2) \cdot R$.

On note alors $E_1 \overset{R}{\succ\!\Rightarrow} E_2$

Exemples : *a*) L'expression $f = m\,\gamma$ indique une relation entre force, masse et accélération qui définit chaque variable en fonction des deux autres.

b) Un emploi du temps est une relation entre professeurs, classes, salles, jours et heures qui définit le couple professeur-classe en fonction des variables salle, jour et heure.

2° PREORDRE $\overset{R}{\succ\!\Rightarrow}$ DEFINI SUR L'ENSEMBLE DES SOUS-ESPACES DE L'ESPACE DE DEFINITION DE R. NIVEAUX

Les propositions $E_i \overset{R}{\succ\!\Rightarrow} E_j$ définissent sur l'ensemble des sous-espaces de l'espace de définition de R une relation binaire manifestement reflexive et transitive, donc un préordre. Ce préordre jouit des propriétés suivantes :

1) $$E_i \rightarrow E_j \quad \Rightarrow E_i \overset{R}{\succ\!\Rightarrow} E_j$$

2) $$\left.\begin{array}{l} E_i \succ\!\Rightarrow E_j \\ \\ E_i \overset{R}{\succ\!\Rightarrow} E_k \end{array}\right\} \Rightarrow E_i \succ\!\Rightarrow E_j + E_k$$

On en déduit que si $E_i \overset{R}{\succ\!\Rightarrow} E_j$, alors E_i et $E_i + E_j$ sont équivalents dans le préordre $\overset{R}{\succ\!\Rightarrow}$. En effet :

$$(E_i + E_j \rightarrow E_i) \Rightarrow (E_i + E_j \overset{R}{\succ\!\Rightarrow} E_i)$$

et $$\left.\begin{array}{l} (E_i \rightarrow E_i) \Rightarrow (E_i \overset{R}{\succ\!\Rightarrow} E_i) \\ \\ E_i \overset{R}{\succ\!\Rightarrow} E_j \end{array}\right\} \Rightarrow \qquad (E_i \overset{R}{\succ\!\Rightarrow} E_i + E_j)$$

Définitions : On appelle *niveau* une classe d'équivalence du préordre $\overset{R}{\succ\!\!\Rightarrow}$.
Nous noterons $E_i \overset{R}{\Leftrightarrow} E_j$ lorsque E_i et E_j appartiennent au même niveau.

$$\text{Si } E_i \overset{R}{\Leftrightarrow} E_j, \text{ alors } E_i \overset{R}{\succ\!\!\Rightarrow} E_j \text{ et } E_i \overset{R}{\Leftrightarrow} E_i + E_j.$$

La borne supérieure de tous les sous-espaces d'un même niveau est donc de ce niveau. Nous l'appellerons *représentation optimale* du niveau et nous noterons E_i^M la représentation optimale du niveau d'un sous-espace E_i. Il nous arrivera aussi de nommer E_i^M le niveau lui-même tolérant ainsi la confusion des notations d'un niveau et de sa représentation optimale.

EXEMPLES : *a*) Donnons graphiquement la partition en niveaux de (F, M, T) définie par la relation $f = m\,\gamma$ en renforçant les traits qui joignent les points représentatifs des sous-espaces d'un même niveau sur le graphe figurant l'ordre de projection des sous-espaces de (F, M, T); les représentations optimales de niveau sont marquées d'un rond : o.

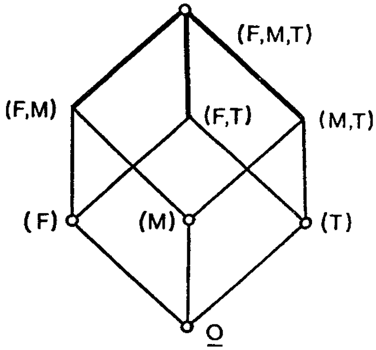

Figure 1

b) Donnons de même la partition en niveaux de (P, C, S, H) définie par la relation R d'emploi du temps où les variables sont P ensemble des professeurs, C des classes, S des salles, H des jours et heures, en supposant que

$$(P, H) \overset{R}{\succ\!\!\Rightarrow} C, \quad (P, C) \overset{R}{\succ\!\!\Rightarrow} S \text{ et } (S, H) \overset{R}{\succ\!\!\Rightarrow} P.$$

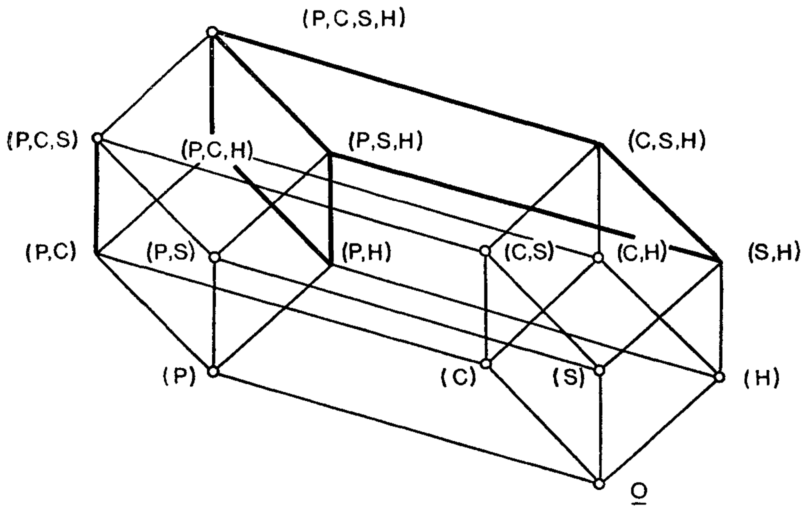

Figure 2

3° APPLICATION DES SOUS-ESPACES DANS LEUR NIVEAU

Théorème I. — L'application qui fait correspondre à tout sous-espace E_i la représentation optimale E_i^M de son niveau est une fermeture si l'on a choisi comme ordre sur l'ensemble des sous-espaces l'ordre de projection.

On rappelle qu'une fermeture est une application monotone, extensive et idempotente d'un ensemble ordonné dans lui-même.

Or l'application obtenue est bien

Monotone : Si $E_i \rightarrow E_j$, alors $E_i^M \rightarrow E_j^M$; en effet, si cela était faux, on aurait $E_k = E_i^M + E_j^M \neq E_i^M$.

Or, $E_i \overset{R}{\Leftrightarrow} E_i^M$ et $E_i \rightarrow E_j \overset{R}{\Leftrightarrow} E_j^M$, si bien que $E_i \overset{R}{\rightarrowtail\!\!\Rightarrow} E_i^M + E_j^M = E_k$.

Comme, d'autre part $E_k \rightarrow E_i^M \overset{R}{\Leftrightarrow} E_i$, on en déduit que $E_i \overset{R}{\Leftrightarrow} E_k$.

Mais E_i^M était la représentation optimale du niveau de E_i, et $E_k = E_i^M + E_j^M$ étant au même niveau ne peut être différent de E_i^M.

Extensive : $E_i^M \rightarrow E_i (E_i^M$ est plus grand que $E_i)$.

Idempotente $(E_i^M)^M = E_i^M$.

Remarque : Une démonstration semblable à celle de ce théorème conduit à dire que la condition nécessaire et suffisante pour que $E_1^M \rightarrow E_2^M$ est que $E_1^M \overset{R}{\rightarrowtail\!\!\Rightarrow} E_2^M$.

Les résultats connus à propos des fermetures définies sur un treillis complet vont nous permettre d'énoncer sans autre démonstration les théorèmes II et III.

Théorème II. — *a)* L'ensemble des niveaux d'une relation ordonné par l'ordre de projection de ses représentations optimales est un treillis. On a :

$$E_1^M \cup E_2^M = (E_1^M + E_2^M)^M$$

$$E_1^M \cap E_2^M = (E_1^M \cdot E_2^M)^M$$

b) L'application des sous-espaces dans leur niveau est un $\cup$-homomorphisme

$$(E_1 + E_2)^M = (E_1^M + E_2^M)^M$$

c) Le treillis des niveaux est un sous $\cap$ demi-treillis de l'ordre de projection des sous-espaces :

$$(E_1^M \cdot E_2^M)^M = E_1^M \cdot E_2^M$$

Théorème III. — Soit Opt l'ensemble des représentations optimales des niveaux d'une relation R; pour tout E_i, E_i^M est le plus petit majorant de E_i dans Opt.

Corollaire. — Si le même ensemble des représentations optimales de niveaux correspond à deux relations distinctes définies sur le même espace, ces deux relations engendrent les mêmes niveaux et le même préordre $\overset{R}{\succ\!\!\Rightarrow}$.

4° RECIPROQUE

Étant donné l'hypercube des sous-espaces d'un espace E et une fermeture F définie sur cet hypercube, il est possible de trouver une relation R ayant E pour espace de définition et telle que F soit l'application des sous-espaces sur la représentation optimale de leur niveau dans la structuration en niveaux définie par R, à condition toutefois que les variables de E contiennent un nombre de points qui ne soit pas trop petit.

Démonstration : Soit Opt l'ensemble des invariants de la fermeture F. Cherchons une relation R telle que Opt soit l'ensemble des représentations optimales des niveaux de T. S'il y a n sous-espaces dans Opt, supposons que chaque variable V ait au moins n valeurs distinctes notées $v_1, v_2, v_3 \ldots v_n$; nous prendrons pour relation R la relation vérifiée par les n points obtenus en faisant correspondre à tout sous-espace E_i élément de Opt le point $e_i \in E$ dont la projection sur une variable V est v_n si V est variable de E_i et v_i si V n'est pas variable de E_i.

Nous poserons $E_n = E$.

Supposons par exemple, pour simplifier l'exposé que $E = (A, B, C, D, F, G, H)$, $E_i = (A, B, F) \in$ Opt et $E_j = (A, C, D, H) \notin$ Opt. Alors $e_i = (a_n, b_n, c_i, d_i, f_n, g_i, h_i)$ et $e_n = (a_n, b_n, c_n, d_n, f_n, c_n, f_n)$. A la valeur (a_n, b_n, f_n) de (A, B, F) correspondent en e_i et e_n des valeurs toutes distinctes des autres variables. On ne peut avoir $(A, B, F) \overset{R}{\succ\!\!\Rightarrow} V$: (A, B, F) est représentation optimale d'un niveau de R.

D'autre part puisque F est une fermeture sur un hypercube, Opt est un sous-demi-treillis de l'hypercube. L'ensemble des majorants de E_j dans Opt a une borne inférieure dans Opt, par exemple $E_k = (A, C, D, F, G, H)$. Alors tout sous-espace de Opt qui comprend les variables (A, C, D, H) comprend aussi les variables (A, C, D, F, G, H). Les seuls points de R ayant même projection sur (A, C, D, H) sont ceux ayant pour projection a_n, c_n, d_n, h_n); pour ces points F prend la valeur f_n et G la valeur g_n. (A, C, D, H) n'est pas représentation optimale de niveau : la représentation optimale de son niveau est (A, C, D, F, G, H).

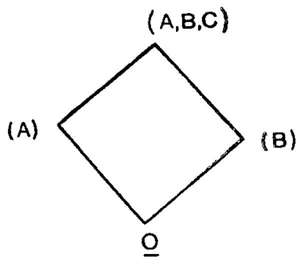

Figure 3

REMARQUE : Il n'est pas nécessaire que les variables prennent autant de valeurs qu'il y a de sous-espaces dans Opt, mais le nombre de valeurs doir pourtant être assez grand. Ainsi, entre des variables binaires, il ne peut y avoit une relation ayant le treillis de niveaux ci-dessus (fig. 3).

5° REPRESENTATION DE LA STRUCTURE D'UNE RELATION PAR UNE FONCTION BOOLEENNE

Soit une relation $R(A, B, C, D, F)$. Considérons la fonction $\varphi_R(a, b, c, d, f)$ des variables booléennes a b, c, d et f égale à la somme des monômes $f(E_i) = \tilde{a}\tilde{b}\tilde{c}\tilde{d}\tilde{f}$ dans laquelle E_i est représentation optimale de niveau de R et $\tilde{v}$ vaut v si V est variable de E_i, v' si V n'est pas variable de E_i.

EXEMPLES : *a*) relation $R_1(F, M, D)$:

$$\varphi_{R_1}(f, m, \gamma) = f'm'\gamma' + fm'\gamma' + f'm\gamma' + f'm'\gamma + fm\gamma$$

b) relation R_2 (P, C, S, H) d'emploi du temps :

$$\varphi_{R_2}(p, c, s, h) = p'c's'h' + pc's'h' + p'cs'h' + p'c'sh' + p'cs'h + \\ + p'c's'h + pc'sh' + p'csh' + pcsh' + pcsh$$

Propriété d'une fonction φ_R

(1) Si (A, B, C, D, F) est espace de définition de R, $abcdf \leqslant \varphi_R$.

(2) Si deux monômes m_1 et m_2 sont inférieurs ou égaux à φ_R, alors le monôme $m_1 \oplus m_2$ dont l'écriture s'obtient en faisant le produit des lettres primées figurant sous forme complémentée dans au moins un des deux monômes m_1 et m_2 et des lettres figurant sous forme directe dans ces deux monômes à la fois, est inférieur ou égal à φ_R.

Démonstration

(1) exprime que l'espace de définition de R est représentation optimale de son niveau. Lorsque m_1 et m_2 sont monômes canoniques de φ_k, (2) est conséquence immédiate du théorème II *c*) tandis que dans le cas général on vérifie aisément que $m_1 \oplus m_2$ est la somme de toutes les expressions $m_i \oplus m_j$ dans lesquelles m_i et m_j sont des monômes canoniques respectivement multiples de m_1 et m_2.

Propriétés du complément φ'_R de R

Définition : Si $(A, B, C) \overset{R}{\rightarrowtail} D$ et s'il n'existe pas de sous-espace E_i de (A, B, C) distinct de $(A, B, C,)$ tel que $E_i \overset{R}{\rightarrowtail} D$, on dit que R définit D comme une *fonction stricte* de (A, B, C).

Propriétés (3) $abc' \leqslant \varphi'_R$ si et seulement si $(A, B) \overset{R}{\rightarrowtail} C$

(4) abc' est monôme premier de φ'_R si et seulement si C est une fonction stricte de (A, B).

(5) Tous les monômes premiers de φ'_R contiennent exactement une lettre primée.

Démonstration : (3) Si $(A, B) \overset{R}{\succ\!\!\Rightarrow} C$ aucun monôme canonique de φ_R ne peut être multiple de abc' puisque toute représentation optimale contenant les variables A, B contient aussi C. Donc $abc' \leqslant \varphi_R'$; la réciproque est évidente.

(4) D'après la définition d'un monôme premier.

(5) Le monôme canonique $abcdf$ est $\leqslant \varphi_R$(si A, B, C, D, F est l'espace de définition de φ_R). Tout monôme de φ_R' contient donc au moins une lettre primée. Supposons que $ab'c' \leqslant \varphi_R'$. Alors

$$ab'c'd'f' + ab'c'd'f + ab'c'df' + ab'c'df \leqslant \varphi_R'.$$

Les sous-espaces A, (A, D), (A, F), (A, D, F) ne sont pas représentations optimales de niveaux. Un raisonnement simple nous en fait déduire que ou bien $A \overset{R}{\succ\!\!\Rightarrow} B$, ou bien $A \overset{R}{\succ\!\!\Rightarrow} C$. Si $A \overset{R}{\succ\!\!\Rightarrow} B$ par exemple ab' sous-multiple de $ab'c'$ est inférieur ou égal à φ_R'; $ab'c'$ n'était pas premier.

Théorème. — Pour qu'une fonction booléenne F ait les propriétés (1) et (2) il faut et il suffit que son complément φ' ait la propriété (3).

Démonstration assez facile.

Ces considérations permettent de programmer des algorithmes assez performants pour étudier la structuration en niveaux ou l'existence de fonctions strictes à partir de renseignements partiels donnés sur une relation. Citons encore quelques résultats utiles :

(6) La condition nécessaire et suffisante pour qu'un sous-espace (C, D, F) soit l'unique représentation de son niveau est que le monôme canonique $a'b'cdf$ soit multiple d'un monôme de φ_R qui ne contiennent que des lettres primées.

(7) Une condition nécessaire et suffisante pour que (A, B, C, D) soit représentation optimale du niveau de A, B est, si l'espace de définition de R est (A, B, C, D, F, G) : $abf'g' \cdot \varphi_R = abcdf'g'$.