REVUE FRANÇAISE D'INFORMATIQUE ET DE RECHERCHE OPÉRATIONNELLE. SÉRIE ROUGE

M. CHEIN

Graphes *h*-maximaux

Revue française d'informatique et de recherche opérationnelle. Série rouge, tome 4, nº R3 (1970), p. 71-81

<http://www.numdam.org/item?id=M2AN_1970__4_3_71_0>

R.I.R.O.
(4e année, R-3, 1970, p. 71-81)

GRAPHES h-MAXIMAUX

par M. CHEIN (1)

Résumé. — *On introduit dans cet article la notion de « graphe h-maximal », c'est-à-dire un graphe d'épaisseur h et qui devient d'épaisseur h+1 quand on lui ajoute une arête.*

Cette notion est une généralisation de la notion de « graphe planaire maximal », et son étude fournit certains résultats sur la structure des graphes d'épaisseur h.

I. DEFINITIONS

On considère des graphes simples finis.

Dans son article [10] Tutte introduit la notion d'*épaisseur* d'un graphe comme étant le nombre minimum de graphes partiels disjoints (au sens des arêtes), planaires et dont l'union est égale au graphe initial. Une décomposition d'un graphe G en t graphes partiels planaires et 2 à 2 disjoints au sens des arêtes s'appelle une *t-décomposition planaire* de G. Cette étude a débuté lorsque l'on a démontré que le graphe complet K_9 n'était pas biplanaire ([1], [9], [11]). Beineke et Harary ont démontré ensuite [4] que :

si $p \neq 9$ et $p \not\equiv 4 \pmod 6$ alors l'épaisseur du graphe complet K_p était :

$$e(K_p) = \left[\frac{1}{6}(p+7) \right]$$

L'étude des graphes d'épaisseur h amène Tutte à définir un graphe *h-minimal* comme étant un graphe d'épaisseur h tel que tout sous-graphe partiel est d'épaisseur $\leqslant h - 1$. Il démontre qu'il existe une infinité de graphes h-minimaux non isomorphes pour $h \geqslant 3$. Nous introduisons ici la notion de graphe *h-maximal*, (déjà définie et étudiée pour $h = 1$) ce qui donne certains résultats dans l'étude de la structure des graphes *h-planaires*. Nous démontrons une condition nécessaire et suffisante pour qu'un graphe soit h-maximal.

Si G est un graphe on note S_G et A_G les ensembles de sommets et d'arêtes de G.

On posera : $|S_G| = n_G \qquad |A_G| = m_G$

(1) Faculté des Sciences du Mans.

Un graphe G est dit *h-maximal dans un graphe G'*, G et G' ayant même ensemble de sommets et G étant un graphe partiel de G', si G est d'épaisseur h et si en lui ajoutant une arête quelconque a de $A_{G'} - A_G$ il devient d'épaisseur $h + 1$.

Un graphe G h-maximal dans K_n *est dit h-maximal*. Si G est h-maximal et d'ordre n alors G est h-maximal dans G', quel que soit G' tel que $G \subset G' \subset K_n$.

Puisqu'on ne peut pas ajouter d'arêtes aux graphes complets, il est impossible d'augmenter leur épaisseur sans ajouter de sommets. Les résultats sur l'épaisseur des graphes complets donneront des indications sur les graphes h-maximaux, notamment des intervalles pour le nombre de sommets des graphes h-maximaux.

Remarquons qu'*un graphe 1-maximal*, au sens de la définition précédente, n'est autre qu'un graphe planaire maximal au sens classique ([8], p. 5).

II. QUELQUES RESULTATS SUR L'EPAISSEUR D'UN GRAPHE

Théorème 1 ([2]) :

L'épaisseur d'un graphe ayant n sommets et m arêtes est telle que :

$$e(G) \geqslant \frac{m}{3(n-2)}$$

Théorème 2 ([10]) :

Soit k un entier positif et G un graphe d'épaisseur t, $t \geqslant k$. Il existe un sous-graphe partiel de G qui est k-minimal.

Théorème 3 ([10]) :

Si G est t-minimal, avec $t > 0$, alors le degré minimum de G est $\geqslant t$.

Les graphes t-minimaux connus sont les suivants :

(0) Le seul graphe d'épaisseur nulle est le graphe vide.

(I) Le seul graphe 1-minimal est constitué d'une arête.

(II) Tous les graphes conformes à $K_{3,3}$ ou à K_5 sont 2 minimaux et ce sont les seuls.

(III) K_9, $K_{7,7}$ et $K_{5,13}$ sont 3-minimaux.

(IV) $K_{4t-5,4t-5}$ est t-minimal $\forall\ t \geqslant 2$ [5].
$K_{2t-1,4t^2-10t+7}$ est t-minimal $\forall\ t \geqslant 2$ [6].

Théorème I

Un graphe est d'épaisseur h si et seulement si il contient un sous-graphe partiel conforme à un graphe h-minimal et aucun conforme à un graphe $(h + 1)$-minimal.

Ce théorème est évident d'après le théorème 2 et la définition de l'épaisseur d'un graphe. Pour $h = 1$ et en tenant compte de la liste ci-dessus on obtient le théorème de Kuratowski. Pour $h \geqslant 3$ on peut remplacer conforme par isomorphe en vertu du théorème 3.

III. ETUDE DES GRAPHES h-MAXIMAUX

Propriété 1

Soit G un graphe t-maximal d'ordre n et une arête $a \in A_{K_n} - A_G$ alors le graphe $G \cup \{a\}$ contient un sous-graphe $(t+1)$-minimal.

En effet $G \cup \{a\}$ est d'épaisseur $t + 1$ d'après la définition d'un graphe t-max et en utilisant le théorème 2 la propriété énoncée est démontrée.

Propriété 2

Il existe un graphe G d'ordre n t-maximal si et seulement si

$$e(K_n) \geqslant t + 1.$$

Si G est t-max l'épaisseur d'un graphe partiel de G est inférieure ou égale à l'épaisseur de G or

$$e(G \cup \{a\}) = t + 1$$

quelle que soit l'arête a de $A_{K_n} - A_G$, et $G \cup \{a\}$ est graphe partiel de K_n. Si

$$e(K_n) = t + 1,$$

en supprimant des arêtes on peut obtenir un graphe partiel d'épaisseur t.

Si l'on ajoute un ensemble maximal d'arêtes en conservant l'épaisseur, on n'obtient pas K_n puisque $e(K_n) = t + 1$.

Propriété 3

Un graphe t-maximal a au moins 6t-2 sommets (pour $t \geqslant 3$).

La propriété 2 entraîne que le nombre minimum de sommets d'un graphe t-maximal G est strictement supérieure au nombre maximum de sommets d'un graphe complet d'épaisseur t. Donc,

$$\begin{aligned} n_G &> \max\{p \mid e(K_p) = t\} \\ &\geqslant \max\{p \mid [(p+7)/6] = t; p \neq 9, p \not\equiv 4 \pmod 6\} \\ &\geqslant \max\{p \mid [(p+7)/6] < < t+1; p \neq 09, \not\equiv 4 \pmod 6\} \\ &= \max\{p \mid p \leqslant 6t - 1; p \neq 9, p \not\equiv 4 \pmod 6\} \\ &= \max\{p \mid p \leqslant 6t - 2; p \neq 9, p \not\equiv 4 \pmod 6\} \\ &= 6\,t - 3. \end{aligned}$$

C'est-à-dire, $n_G \geqslant 6t - 2$.

Tout graphe 2-maximal a au moins 9 sommets puisque $e(K_8) = 2$. Comme l'épaisseur de K_9 est 3, d'après (III) il existe des graphes 2-maximaux d'ordre 9 qui ont d'ailleurs une structure particulière (voir la propriété 4).

On voit ainsi qu'un graphe t-maximal a au moins $6t - 3$ sommets pour $t \geqslant 1$.

Propriété 4

Les graphes 2-maximaux d'ordre 9 sont isomorphes à $K_9 - \{ a \}$, $a \in A_{K_9}$.

K_9 étant 3-minimal, les graphes isomorphes à $K_9 - \{a\}$ sont bien 2-maximaux et ce sont les seuls, sinon, soit G d'ordre 9 2-maximal ayant au moins 2 arêtes de moins que K_9, alors $G \subset K_9 - \{a\} - \{b\}$, donc K_9 n'est pas 3-minimal puisque $K_9 - \{ a \}$ est 3-planaire.

Théorème II. — *Tout graphe d'ordre supérieur à 3 t-maximal est 3-connexe* ($t \geqslant 1$).

Démonstration :

Supposons G t-maximal et 2-connexe, G peut se décomposer $G = H \cup K$, avec :

$$\begin{cases} S_H \cap S_K = \{ a, b \},\ S_H \text{ et } S_K \neq \{ a, b \}, \\ A_H \cap A_K = \varnothing \end{cases}$$

Considérons une t-décomposition planaire de $G = \{ G_1 G_2 \dots G_t \}$ et les décompositions induites sur H et K, $H = \{ H_1, H_2, \dots, H_t \}$, $K = \{ K_1, K_2, \dots, K_t \}$. $S_{H_1} \cap S_{K_1} \subset \{ a, b \}$, donc $H_1 \cup K_1$ est un graphe au plus 2-connexes. On peut alors joindre un sommet de $H_1 \notin \{ a, b \}$ et un sommet de $K_1 \notin \{ a, b \}$ d'une manière planaire. En effet il existe $i \in \{ 1, 2, \dots, t \}$ avec $S_{H_i} \neq \{ a, b \}$ et $S_{K_i} \neq \{ a, b \}$ car $(\exists_j) S_{H_j} \neq \{ a, b \}$ et $(\exists k) S_{K_k} \neq \{ a, b \}$ sinon $\{a, b \}$ n'est pas un ensemble d'articulation.

Si $S_{K_j} = S_{H_k} = \varnothing$ on peut alors représenter planairement $H_j \cup K_k$ et $e(G) < t$.

Cette arête supplémentaire n'est pas élément de A_G sinon $\{ a, b \}$ ne serait pas un ensemble d'articulation de G. Donc G n'est pas t-maximal.

Théorème III. — *Soit G un graphe d'ordre n t-maximal alors G admet une décomposition disjointe au sens des arêtes* $G = (G', G'')$ *avec :*

(1) G' *est* $(t - 1)$ *maximal et* $S_{G'} = S_G$.

(2) G'' *est 1-maximal dans* $\overline{G}'$ *complément de* G' *dans* $K_n \cdot (t \geqslant 2)$

Démonstration :

Considérons une t-décomposition planaire quelconque de $G = (G_1 G_2 \dots G_t)$.

Posons $G' = (G_1 G_2 \ldots G_{t-1})$. Si $S_{G'} \neq S_G$, il existe $x \in S_G - S_{G'}$. Considérons une arête quelconque (xy) de G_t : on peut l'ajouter à G' sans augmenter son épaisseur puisque x est sommet pendant. On peut donc obtenir $G = (G', G'')$ $S_{G'} = S_G$, et G'' étant planaire. Si une arête a peut être ajoutée à G' sans augmenter son épaisseur, cela signifie que $a \in A_{G''}$ sinon G n'est pas t-maximal. On peut donc rendre $G'(t-1)$-maximal en lui ajoutant des arêtes de G''. G'' reste donc planaire. D'autre part $G'' \subset \overline{G}'$ sinon G' et G'' auraient des arêtes communes. Si G'' n'est pas 1-maximal dans $\overline{G}'$ cela signifie qu'on peut lui ajouter planairement une arête a mais alors $G \cup \{ a \}$ est d'épaisseur t ce qui est absurde.

La réciproque du théorème III est fausse. En effet considérons le graphe $G = (G_1, G_2)$ (fig. 1).

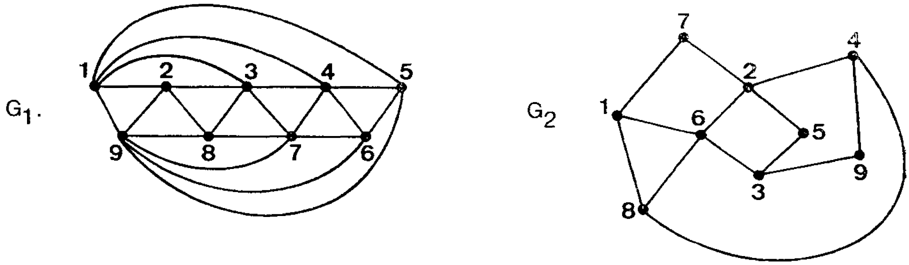


Figure 1

$$G = K_9 - (57)\text{-}(58)$$

donc G n'est pas 2-maximal bien que G_1 soit 1-maximal et qu'il soit impossible d'ajouter planairement (57) ou (58) à G_2.

Propriété 5 : *Soit G un graphe t-maximal d'ordre n. Alors si un sommet x est soit isolé, soit sur un arbre dans l'un des plans d'une t-décomposition planaire quelconque de G, son degré est égal à* $n - 1 \cdot (t \geqslant 2)$.

En effet soit $(G_1, G_2, \ldots, G_t)$ une t-décomposition planaire de G. Si x est isolé ou sur un arbre de G_i (c'est-à-dire une composante connexe de G_i qui est un arbre) alors sur G_i on peut joindre planairement x à tous les autres sommets de G. Donc toutes ces arêtes sont éléments de A_G sinon G n'est pas t-maximal.

Propriété 6 : *Si G est un graphe t-maximal d'ordre n ayant une t-décomposition planaire avec au moins 2t sommets isolés ou sur des arbres alors* $m \geqslant (n+1)t + t(4t-5)$ $(t \geqslant 2)$.

En effet si G a x sommets isolés ou sur des arbres, le graphe G se décompose en un graphe complet à x sommets tous les sommets étant reliés à tous les autres sommets du graphe. Donc $m \geqslant \frac{x(x-1)}{2} + x(n-x)$, fonction qui est croissante en x quand $1 \leqslant x \leqslant n-1$. Or en posant $x = 2t$ on a :

$$\begin{aligned} t(2t-1) + 2t(n-2t) &= (n+1)t + nt - 2t^2 - 2t \\ &\geqslant (n+1)t + 6t^2 - 3t - 2t^2 - 2t \text{ car } n \geqslant 6t - 3. \end{aligned}$$

REMARQUE : *Le nombre de sommets isolés ou sur des arbres est très intéressant car c'est une borne inférieure pour le degré minimum du graphe.*

Soit $D = (G_1 G_2 \ldots G_t)$ une t-décomposition planaire de G. On appellera D_s *décomposition saturée* de G obtenue à partir de D, la décomposition obtenue de la manière suivante :

On dispose sur $G_1 G_2 \ldots G_{t-1}$ un ensemble maximal d'arêtes de G_t de telle sorte que $G'_1 G'_2 \ldots G'_{t-1}$ ainsi obtenu reste d'épaisseur $t-1$ puis on recommence sur $G'_1 G'_2 \ldots G'_{t-1}$ en saturant les t-2 premiers plans avec les arêtes de G'_{t-1} etc...

Propriété 7 : *Si $(G_1 G_2 \ldots G_t)$ est une t-décomposition planaire saturée de G, graphe t-maximal, alors 2 composantes connexes, qui sont des arbres de G_i et G_j, sont disjointes au sens des sommets. (Ceci $\forall$ i et j)* $\cdot$ $(t \geqslant 2)$.

En effet, supposons que le sommet $x \in S_{A_i^k}$, A_i^k étant un arbre de G_i, apparaisse dans $S_{A_j^l}$, A_j^l étant un arbre de G_j (avec $i > j$). Alors une des arêtes incidentes à x dans G_i peut être représentée planairement sur G_j donc la décomposition n'est pas saturée.

Théorème IV : *Si G est un graphe t-maximal d'ordre n, alors G admet une t-décomposition planaire sans sommet isolé et où tous les arbres sont disjoints 2 à 2 au sens des sommets, sinon le degré minimum de G est $\geqslant n - t + 2$.*

Démonstration :

Considérons une t-décomposition saturée de G. Tous les arbres sont disjoints 2 à 2 au sens des sommets d'après la propriété 7. Si le sommet x est isolé dans l'un des plans P nous dirons que nous pouvons « déplacer » l'arête (xy) du plan P' où elle se trouve sur P, si on peut supprimer (xy) de P' et la mettre sur P ceci sans créer de sommet isolé et en conservant les arbres disjoints 2 à 2 (au sens des sommets).

Supposons qu'il soit impossible de rendre x non isolé par de tels déplacements. Nous allons alors montrer que le degré minimum de G est : $\mathrm{dmin}(G) \geqslant n - t + 2$, ou plus exactement que le nombre de sommets de G de degré $n-1$ est $\geqslant n - t + 2$. Une fois que l'on a déplacé le maximum d'arêtes (xz) il reste l plans, $l \geqslant 1$, où x est isolé. p plans, $p \geqslant 1$, où le degré de x est $\geqslant 2$ et k plans où le degré de x est 1 (voir fig. 2).

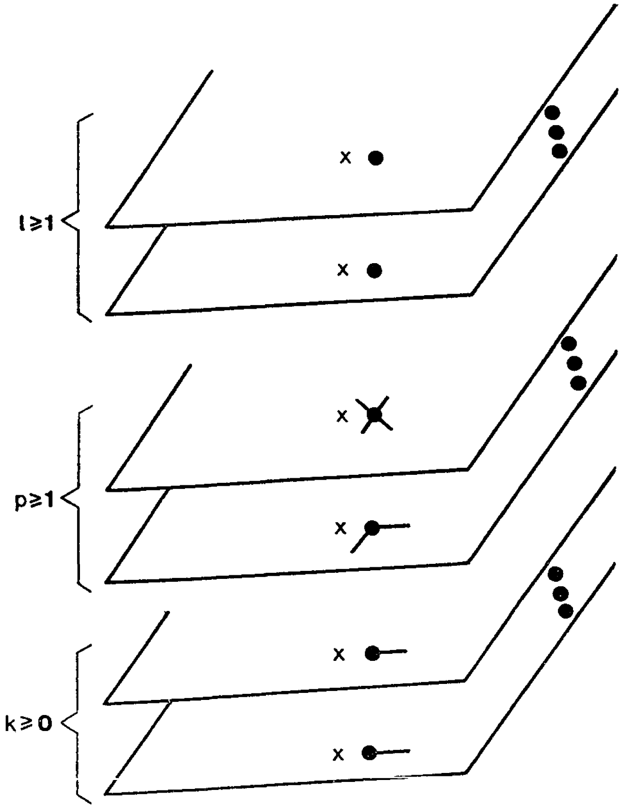


Figure 2

Considérons l'un des p plans Q où le degré de x est $\geqslant 2$, et soit y_i l'un des sommets adjacents à x dans Q.

(1) (xy_i) n'est pas un isthme.

(1.1) *En supprimant* (xy_i) *on crée un arbre.* Dans ce cas la composante connexe C de Q qui contient x a un seul cycle qui d'ailleurs contient (xy_i). Donc on peut joindre planairement tout sommet de C planairement à tout sommet de G sur Q. Donc tous les sommets de C sont de degré $n - 1$.

(1.2) *On ne crée pas d'arbre en supprimant* (xy_i). Puisqu'on ne peut pas déplacer (xy_i) sur l'un des plans où x est isolé, c'est que y_i est sur un arbre dans l'un de ces plans et x sur un arbre. Dans ce cas $d_G(y_i) = n - 1$.

(2) (xy_i) *est un isthme.*

Donc en supprimant (xy_i) on crée deux composantes connexes.

(2.1) *On crée un arbre qui contient* y_i. Dans ce cas, d'après la propriété 5 $d_G(y_i) = n - 1$ puisqu'on peut représenter planairement (xy_i) sur l'un des plans où x est isolé. y_i est alors un sommet qui est un arbre dans une t-décomposition planaire de G.

(2.2) *On ne crée pas d'arbre contenant* y_i. Dans ce cas s'il est impossible de déplacer (xy_i), c'est que y_i est sur un arbre dans l'un des plans où x est isolé, donc $d_G(yl) = n - 1$. (Dans ce cas il ne peut y avoir qu'un plan où x est isolé sinon y_i apparaîtrait dans deux arbres ce qui est contraire aux hypothèses.)

Nous avons donc démontré que tous les sommets adjacents à x étaient de degré $n - 1$ dans G. Or ce nombre est $\geqslant n - 1 - k$ or $k \geqslant t - 2$ puisque $l \geqslant 1$ et $p \geqslant 1$ donc $\mathrm{dmin}(G) \geqslant n - t + 2$ en effet

$$\mathrm{dmin}(G) \geqslant n - 1 - k + 1 \geqslant n - k \geqslant n - t + 2.$$

Théorème V : *Tout graphe G t-maximal d'ordre n a un nombre d'arêtes* $m \geqslant (n + 1)t$.

Démonstration :

Si G n'admet pas de décomposition planaire sans sommet isolé et où tous les arbres sont disjoints 2 à 2 d'après le théorème IV :

$$m \geqslant \frac{n(n - t)}{2}$$

Dans le cas contraire soit $(G_1 G_2 \ldots G_t)$ une décomposition planaire. On note $G'_i = G_i - \bigcup A^k_i$, A^k_i étant les composantes connexes de G_i qui sont des arbres. $m_{G'_i} - n_{G'_i} \geqslant 2$ sinon G est un graphe complet. En effet si $m_{g'_i} - n_{g'_i} < 2$ on peut joindre planairement sur G_i 2 sommets quelconques de G_i. Posons $n'_i = |S_{G_i} - S_{G'_i}|$ le nombre d'arêtes des arbres de G_i est $\geqslant \frac{n'_i}{2}$ et le nombre d'arêtes de $G'_i \geqslant n - n'_i + 2$ donc :

$$m_G \geqslant \sum_i \left(n + 2 - \frac{n'_i}{2} \right) = (n + 1)t + \left(t - \frac{\sum_i n'_i}{2} \right).$$

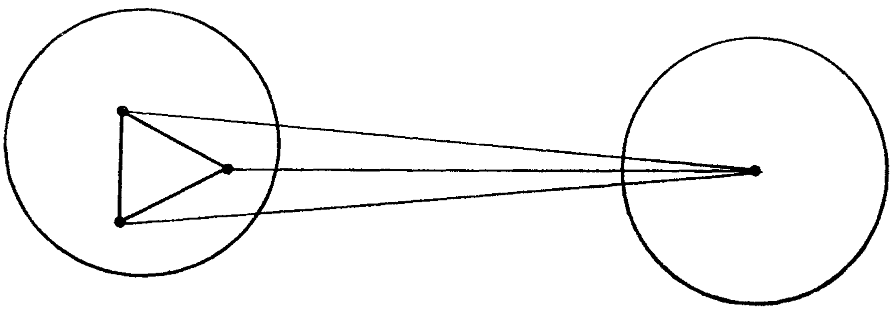


Figure 3

Si $2t \geqslant \sum_i n'_i$ le théorème est démontré.

Si $2t < \sum_i n'_i$ alors le graphe G a la structure suivante :

$G = K_A \cup K_{A,\bar{A}} \cup G'$ avec $|A| > 2t$ et d'après la propriété 6 le théorème est démontré (fig. 3).

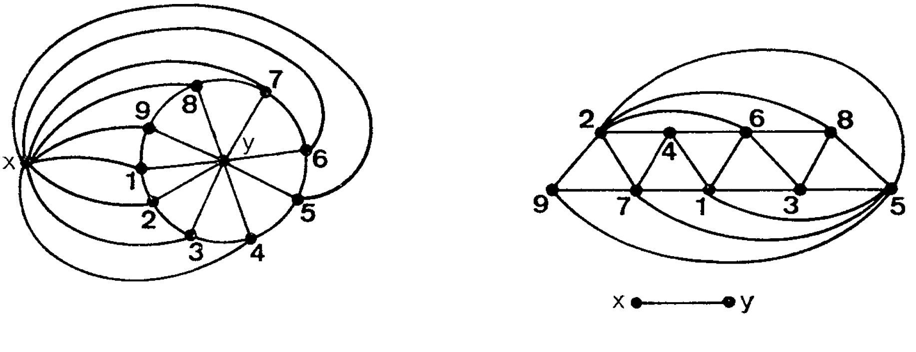
Théorème VI. — *Le graphe G est t-maximal si et seulement si, pour toute t-décomposition planaire de $G = (G_1, G_2, ..., G_t)$, la condition suivante est vérifiée pour $i = 1, 2, .., t$:*

Quel que soit $B \subset A_{G_i}$ avec $e(B \cup \{\bigcup_{j \neq i} G_j\}) = t - 1$, les ensembles d'arête qui rendent G_i-B 1-maximal sont inclus dans $\bigcup_{j \neq i} A_{G_j}$.

Démonstration :

C'est une condition nécessaire. En effet supposons que l'on puisse rendre G_1 1-maximal, en enlevant des arêtes B que l'on peut ajouter à $\bigcup_{i=2} G_i$ en conservant l'épaisseur de ce graphe et en ajoutant l'ensemble d'arêtes A contenant $a \notin \bigcup_{i=2}^{t} A_{G_i}$. Ceci entraîne que $\{G_1 \cup A, G'_2, ..., G'_t\}$, avec $G'_i = G_i - A + B_i$ et $B_i \subset B$, est d'épaisseur t or ce graphe c'est $G \cup \{a\}$ donc G n'est pas t-maximal.

Elle est suffisante en effet si on ajoute une arête $a \notin \bigcup_{i=1}^{t} A_{G_i}$ à G_i par exemple on rend G_i non planaire sinon a serait $\in \bigcup_{j \neq i} A_{G_j}$ donc $\in \bigcup_{j=1} A_{G_i}$.



g_1 g_2

Figure 4

Remarque : *La condition du théorème VI porte sur tous les ensembles B mais on peut ne la faire porter que sur les ensembles maximaux d'arêtes à enlever. Par exemple, considérons le graphe de la figure 4 :* $G = g_1 \cup g_2$

g_1 est 1-max donc $g_1 \cup \{ a \}$ est non planaire $\forall\, a \in A_{g2}$

$g_2 \cup b$ est non planaire $\forall\, b \notin A_{g1}$.

Cependant $g_1 \cup g_2$ n'est pas 2-maximal. En effet on peut mettre $(x9)$ sur g_2 par exemple et ajouter (18) à g_1.

Propriété 8 : *Si* $H_1, H_2, ..., H_t$ *sont des graphes 1-maximaux d'ordre* n, *2 à 2 disjoints au sens des arêtes, alors* $G = \bigcup_{i=1}^{t} H_i$ *est t-maximal.*

Démonstration :

Le nombre d'arêtes de H_i est $3n - 6$ donc $A_G = t(3n - 6)$ ce qui entraîne (th. 1) $e(G) \geqslant \dfrac{t(3n-6)}{3(n-2)} = t$. Donc G est d'épaisseur t ; d'autre part G est t maximal, car si on pouvait lui ajouter une arête sans augmenter son épaisseur, l'un des graphes au moins, de toute décomposition, aurait plus de $3n - 6$ arêtes donc serait non poanaire. Toute décomposition planaire de G est un ensemble de t graphes 1-maximaux disjoints 2 à 2 au sens des arêtes.

La réciproque de cette propriété est fausse. En effet considérons une 2-décomposition planaire de $K_9 - a$ (fig. 5) :

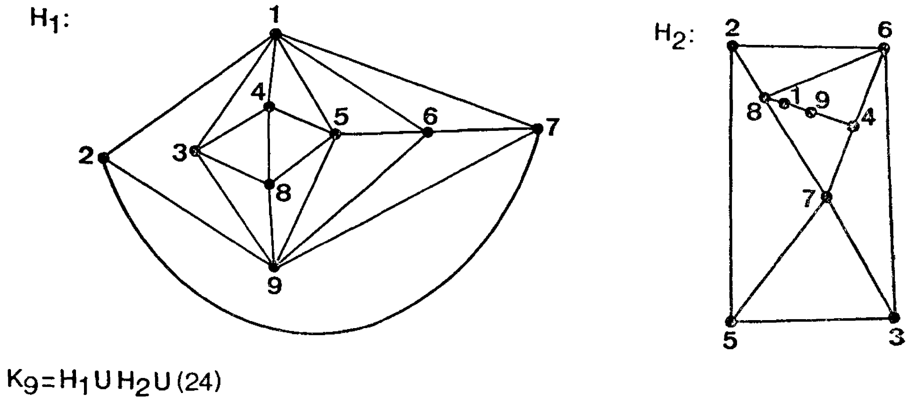


Figure 5

Remarques : 1) *La propriété 8 permet d'envisager une méthode constructive pour étudier l'épaisseur des graphes complets. En effet s'il existe t graphes* H_i *1-maximaux d'ordre n avec* $A_{H_i} \cap A_{H_j} = \varnothing, \forall\, i \neq j$ alors l'épaisseur de K_n *est* $\geqslant t$.

2) *La conjecture de Hobbs* [6] : « *les graphes K_{6t-7} sont t-minimaux pour $t \geqslant 5$"», est fausse.*

En effet cette conjecture est équivalente à la proposition suivante : » *les graphes $K_{6t-7} - \{ a \}$ sont (t-1)-maximaux, quel que soit $a \in A_{K_{6t-7}}$.* » *Or le théorème 1 dit que :*

$$m \leqslant t(3n\text{-}6),$$

pour tout graphe d'épaisseur t ayant n sommets et m arêtes. En appliquant ce résultat à $K_{6t-7} - \{ a \}$ on obtient :

$$(6t-7)(3t-3)-1 = 18t^2-39t+20$$
$$\leqslant (t-1)(3(6t-7)-6) = 18t-45t^2+27$$

ce qui est absurde ($t \leqslant 5$).

BIBLIOGRAPHIE

[1] J. BATTLE, F. HARARY, et Y. KODOMA, « *Every planar graph with nine points has a nonplanar complement* », Bull. Amer. Math. *Soc.*, 68 (1962), 569-571.

[2] L. W. BEINEKE, *The decomposition of complete graphs into planar subgraphs in* « *graph theory and theorical physics* ». Edited by F. Harary Acedemic Press, 1967.

[3] L. W. BEINEKE, *Complete bipartite graphs : decomposition into planar subgraphs in* « *A seminar on graph Theory* » (Harary ed.), Acedemic Press, N. Y., 1967.

[4] L. W. BEINEKE et F. HARARY, « *The thickness of the complete graph* », Canad J. Math., 17, 1965, 850-859.

[5] C. BERGE, *Théories de graphes et ses applications*, Dunod, 1958.

[6] A. M. HOBBS et J. W. GROSSMAN, « *A class of thickness-minimal graphs* », Jal Res. NBS (Math. Science), 72B, 2 (1968), 145-153.

[7] A. M. HOBBS, *A Survey of Thickness, in* « *Recent Progress in Combinatorics* », (Tutte éd.), Acad. Press, N. Y., 1969.

[8] O. ORE, *The four color problem.* Academic Press, 1967.

[9] C. PICARD, « *Graphes complémentaires et graphes planaires* », Rev. Franç. Rech. Oper., 8 (1964), 329-343.

[10] W. T. TUTTE, « *The thickness of a graph* », Indag. Math., 25, 1963, 567-577.

[11] W. T. TUTTE, « *The nonbiplanar character of the complete 9-graph* », Can. Math. Bull, 6 (1963), 319-330.