REVUE FRANÇAISE D'INFORMATIQUE ET DE RECHERCHE OPÉRATIONNELLE. SÉRIE ROUGE

CLAUDE LOBRY

Brève communication. Contrôlabilité de systèmes linéaires par des commandes Bang-Bang

Revue française d'informatique et de recherche opérationnelle. Série rouge, tome 4, nº R3 (1970), p. 135-140

<http://www.numdam.org/item?id=M2AN_1970__4_3_135_0>

R.I.R.O.
(4e année, R-3, 1970, p. 135-140)

CONTROLABILITE DE SYSTEMES LINEAIRES PAR DES COMMANDES BANG-BANG

par Claude Lobry (1)

Sommaire. — *On démontre un théorème de « contrôlabilité » par des commandes constantes par morceaux ayant au plus $n + 2^{n-1}$ discontinuités. Ce théorème s'applique à des systèmes linéaires du type :*

$$\frac{dx}{dt} = Ax + Bu \qquad x \in R^n \qquad u \in R^p.$$

Quelques remarques sont faites concernant le cas non linéaire.

Ce résultat qui est obtenu par des moyens entièrement élémentaires contient certains résultats de « contrôlabilité Bang-Bang » déduits du théorème de Liapunov sur l'image d'une mesure vectorielle.

I. INTRODUCTION

On considère le système de commande défini par :

$$\text{(I)} \qquad \frac{dx}{dt} = Ax + Bu \qquad x \in R^n \qquad u \in R^p.$$

Étant donné une application mesurable bornée de R^+ dans R^p :

$$U : R^+ \to R^p$$

il lui correspond une unique fonction absolument continue de R^+ dans R^n définie comme solution du problème de Cauchy :

$$\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) + BU(t) \quad ; \quad x(0) = 0$$

On appelle cette fonction « réponse » et on la note $x(t, U)$. Rappelons que :

$$x(t, U) = e^{tA} \int_0^t e^{-\theta A} BU(\theta)\, d\theta$$

(1) Institut de Mathématiques Appliquées, Grenoble.

Si C est une partie de R^p on désigne par : $L_\infty(R^+, C)$ l'ensemble des fonctions mesurables bornées définies sur R^+ à valeur dans C; par : $C_M(R^+, C)$ l'ensemble des fonctions continues par morceaux de R^+ dans C.

Désignons par V le cube unité de R^p, par S les sommets du cube unité.

D'aprés un théorème de Kalman [6] on peut énoncer :

Théorème 1. — *Si la matrice $(B, AB, A^2B, \ldots, A^{n-1}B)$ est de rang n l'ensemble :*

$$A(L_\infty(R^+, V)) = \{ x(t, U); t \in R^+ ; U \in L_\infty(R^+, V) \}$$

est un voisinage de l'origine.

Grâce au théorème de Liapunov sur l'image d'une mesure vectorielle on déduit le théorème de « contrôlabilité Bang-Bang » de La Salle [7].

Théorème 2. — *L'ensemble : $A(L_\infty(R^+, V))$ et l'ensemble :*

$$A(L_\infty(R^+, S)) = \{ x(t, U); t \in R^+ ; U \in L_\infty(R^+, S) \}$$

sont égaux ; en particulier lorsque le rang de $(B, AB, \ldots, A^{n-1}B)$ est égal à l'ensemble $A(L_\infty(R^+, S))$ est un voisinage de 0.

Par un raffinement du théorème de Liapunov dû à Halkin [4] on obtient le résultat plus précis suivant ([6]) :

Théorème 3. — *L'ensemble : $A(L_\infty(R^+, V))$ et l'ensemble :*

$$A(C_M(R^+, S)) = \{ x(t, U); t \in R^+ ; U \in C_M(R^+, S) \}$$

sont égaux ; en particulier lorsque le rang de $(B, AB, \ldots, A^{n-1}B)$ est égal à n l'ensemble $A(C_M(R^+, S))$ est un voisinage de 0.

Ce dernier théorème signifie que tout point suffisamment proche de l'origine peut être atteint en utilisant une fonction U (appelée commande) *constante par morceaux,* prenant ses valeurs parmi les sommets du cube unité de R^p. La démonstration de ce résultat qui est faite au § 2 est élémentaire; de plus on montre que le nombre de discontinuités est majoré par un nombre qui ne dépend que de n.

II. CONTROLABILITE POUR UN SYSTEME LINEAIRE

Proposition 1. — Considérons le système :

$$\frac{dx}{dt} = Ax + Bu \quad ; \quad x \in R^n \quad , \quad u \in R^p.$$

Si la matrice $(B, AB, A^2B, \ldots, A^{n-1}B)$ est de rang n, il existe un voisinage de l'origine tel que tout point de ce voisinage puisse être atteint à partir de l'origine au moyen d'une commande prenant ses valeurs parmi les sommets du cube unité de R^p et ayant au plus $n + 2^{n-1}$ discontinuités.

En dépit de son caractère purement élémentaire, cette démonstration est rendue compliquée par la multiplication des indices. Nous la faisons dans un cas particulier, la démonstration générale procédant exactement de la même manière. Nous démontrons donc la proposition 1 dans le cas ou $n = 2$ et $p = 1$.

Démonstration. — Par hypothèse les deux vecteurs B et AB sont indépendants. Pour tout couple de réels (t_1, t_2) définissons la commande $U(t_1, t_2, \theta)$ de la manière suivante :

$$U(t_1, t_2, \theta) = \begin{cases} \operatorname{sgn}(t_1) & \theta \in [0, |t_1|\,] \\ \operatorname{sgn}(t_2) & \theta \in \,]\,|t_1|, |t_1| + |t_2|^{1/2}] \\ -\operatorname{sgn}(t_2) & \theta \in \,]\,|t_1| + |t_2|^{1/2}, |t_1| + 2\,|t_2|^{1/2}] \end{cases}$$

La commande $U(t_1, t_2, \theta)$ a donc au plus 2 discontinuités ce qui est bien inférieur à $n + 2^{n-1} = 2 + 2^1 = 4$. On va montrer que l'image de l'application *continue* de R^2 dans R^2 définie par :

$$(t_1, t_2) \to \Psi(t_1, t_2) = x(\,|t_1| + 2\,|t_2|^{1/2}, U(t_1, t_2))$$

est un voisinage de 0 ce qui montrera la proposition. Écrivons :

$$\Psi(t_1, t_2) = e^{(|t_1| + 2|t_2|^{1/2})A} \int_0^{|t_1| + 2|t_2|^{1/2})} e^{-\theta A}\, BU(t_1, t_2, \theta)\, d\theta.$$

Soit encore :

$$\begin{aligned}\Psi&(t_1, t_2) \\ &= e^{(|t_1| + 2|t_2|^{1/2})A} \left[\int_0^{|t_1|} e^{-\theta A} B \operatorname{sgn}(t_1)\, d\theta + \int_{|t_1|}^{|t_1| + |t_2|^{1/2}} e^{-\theta A} B \operatorname{sgn}(t_2)\, d\theta \right. \\ &\qquad \left. - \int_{|t_1| + |t_2|^{1/2}}^{|t_1| + 2|t_2|^{1/2}} e^{-\theta A} B \operatorname{sgn}(t_2)\, d\theta \right]\end{aligned}$$

Ceci donne après avoir fait le changement de variable $u = \theta - |t_1|$ et $u = \theta - |t_1| - |t_2|^{1/2}$ dans la 2ᵉ et la 3ᵉ intégrale :

$$\begin{aligned}\Psi(t_1, t_2) &= e^{(|t_1| + 2|t_2|^{1/2})A} \int_0^{|t_1|} e^{-\theta A} B \operatorname{sgn}(t_1)\, d\theta \\ &\quad + e^{2|t_2|^{1/2}} \int_0^{|t_2|^{1/2}} e^{-\theta A} B \operatorname{sgn}(t_2)\, d\theta - e^{|t_2|^{1/2}} \int_0^{|t_2|^{1/2}} e^{-\theta A} \operatorname{sgn}(t_2)\, d\theta\end{aligned}$$

En remplaçant les expressions sous les signes somme par des développements limites, un calcul élémentaire conduit à :

$$\Psi(t_1, t_2) = t_1 B + t_1 \varepsilon_1(t_1) + (e^{|t_2|^{1/2}A} - 1)(|t_2|^{1/2} + |t_2|^{1/2}\varepsilon_2(|t_2|^{1/2}) B \operatorname{sgn}(t_2)$$

soit encore après avoir choisi une norme dans R^2.

$$\Psi(t_1, t_2) = t_1 B + t_2 AB + \|t_1, t_2\| \, \varepsilon(t_1, t_2) \quad \lim_{\|t_1, t_2\| \to 0} \varepsilon(t_1, t_2) = 0$$

ce qui prouve que Ψ est différentiable en 0 et a pour application linéaire tangente l'application :

$$(t_1, t_2) \to t_1 B + t_2 AB$$

qui par hypothèse est de rang 2. (Remarquons que Ψ n'est certainement pas de classe C^1 en raison de la présence de la fonction sgn.) L'application Ψ est continue, $\Psi(0, 0) = 0$; l'application Ψ est différentiable à l'origine et sa différentielle est de rang 2, l'image de Ψ est donc un voisinage de 0 (cf. § 3).

Dans le cas général, on choisira n colonnes indépendantes dans la matrice $(B, AB, \ldots, A^{n-1}B)$. Si $A^k V_l (V_l = l$-ième colonne de $B)$ est un tel vecteur on introduira la commande $U_{k,l}$ définie par récurrence par :

$$U_{1,l}(\theta) = \begin{cases} \underbrace{0, 0, \ldots, 1}_{l}, 0, \ldots 0 & \theta \in [0\tau] \\ \underbrace{0, 0, \ldots, -1}_{l}, 0, \ldots 0 & \theta \in [\tau, 2\tau] \end{cases}$$

$$U_{r+1,l}(\theta) = \begin{cases} U_{r,l}(\theta) & \theta \in [0, 2^r\tau] \\ U_{r,l}(\theta - 2^r\tau) & \theta \in [2^r\tau, 2^{r+1}\tau] \end{cases}$$

La « juxtaposition » de telles commandes permet de construire l'application Ψ. On voit que par construction même le nombre de discontinuité sera majorée.

III. SURJECTIVITE D'UNE APPLICATION DIFFERENTIABLE

La proposition ci-dessous est une conséquence immédiate du théorème de Brouwer.

Proposition 2. — *Soit f une application continue de R^n dans R^n différentiable à l'origine, soit M sa différentielle. Si M est de rang n l'image de f est un voisinage de* 0.

Démonstration : Soit $\| \ \|$ une norme sur R^n. Il existe une constante $K > 0$ telle que $\|M^{-1}x\| \leqslant \|x\|$.

Par hypothèse on a :

$$f(x) = Mx + \|x\| \, \varepsilon(x) \quad \lim_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0.$$

Soit η tel que :

$$\|x\| \leqslant \eta \Rightarrow \|\varepsilon(x)\| \leqslant \frac{1}{2K}.$$

Soit x_0 tel que $\|x_0\| \leqslant \frac{\eta}{2K}$ et φ_{x_0} l'application *continue* de R^n dans R^n définie par :

$$\varphi_{x_0}(x) = x_0 + x - f(M^{-1}x).$$

Une vérification immédiate prouve que φ_{x_0} envoie la boule fermée de centre 0 et de rayon $\frac{\eta}{K}$ dans elle-même. D'après le théorème de Brouwer (3) φ_{x_0} a au moins un point fixe. Si x est un tel point on a :

$$x = x_0 + x - f(M^{-1}x) \Rightarrow x_0 = f(M^{-1}x)$$

ce qui montre que la boule de centre 0 et de rayon $\frac{\eta}{2K}$ est dans l'image de f.

IV. CAS DES SYSTEMES NON LINEAIRES

La technique utilisée pour démontrer la proposition 1 repose sur la connaissance du développement limité au voisinage de 0 de la solution d'une équation différentielle linéaire. Un tel développement existe également dans le cas non linéaire et par conséquence cette méthode doit pouvoir, en principe, être appliquée dans le cas non linéaire. On peut espérer le résultat suivant :

« Soit le système :

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = f(x) + B(x)u \quad ; \quad f \in C^\infty(R^n, R^n) \quad ; \quad B \in C^\infty(R^n, \pounds(R^p, R^n)).$$

Supposons que $f(0) = 0$; soit A la jacobienne de f à l'origine. Une condition suffisante pour que tout point d'un voisinage de 0 puisse être atteint au moyen d'une commande à valeur parmi les sommets du cube unité ayant au plus $n + 2^{n-1}$ discontinuités est que le rang de la matrice $(B(0), AB(0), \ldots, A^{n-1}B(0))$ soit égal à n. »

Remarquons que cette condition qui est nécessaire dans le cas linéaire ne l'est pas dans le cas non linéaire. Par exemple, si f est identiquement nulle et B analytique, une condition nécessaire et suffisante est que la dimension de l'espace vectoriel engendré par les valeurs à l'origine de la plus petite famille de champs de vecteurs, contenant les p-champs définis par les colonnes de B et close pour l'opération de crochet de Lie (cf. [8]), soit égale à n.

BIBLIOGRAPHIE

Ouvrages généraux

[1] LEE-MARKUS, *Foundations of optimal control theory*, Wiley, 1967.

[2] HERMES-LA SALLE, *Functionnal analysis and time optimal control*, Academic Press, 1969.

[3] MILNOR, *Topology from the differential view point*, The University Press of Virginia, Charlottesville.

Articles

[4] HALKIN, « *On a generalisation of a theorem of Liapunov* », J. Math. Anal. and Appli., 10 (325-329) (1965).

[5] HALKIN, « *A generalisation of La Salle's Bang-Bang principle* », J. Siam on Control, n° 2 (1965).

[6] KALMAN, HO, NARENDA, « *Controlability of linear dynamical systems* », Contribution to differential equations n° 1, pp. 189-213.

[7] LA SALLE, *The time optimal control problem. Theory of nonlinear oscillations*, vol. 4, pp. 29-52, Princeton Univ. Press, 1959.

[8] LOBRY, « *Controlabilité des systèmes no linnéaires* », J. Siam on Control, n° 8, 4, 1970, pp. 573-605.