Marc Duc-Jacquet

Brève communication. Sur la fonctionnelle erreur attachée à une formule de quadrature dans $C^r[0,1]$

Revue française d'informatique et de recherche opérationnelle. Série rouge, tome 4, nº R3 (1970), p. 111-117

<http://www.numdam.org/item?id=M2AN_1970__4_3_111_0>

R.I.R.O.
(4e année, R-3, 1970, p. 111-117)

SUR LA FONCTIONNELLE ERREUR ATTACHEE A UNE FORMULE DE QUADRATURE DANS $C^r[0,1]$

par Marc DUC-JACQUET (1)

Résumé. — *On s'intéresse dans* $C^r[0,1]$ *normé par*

$$\|\varphi\|_{C^r} = \text{Max}\left\{ |f(0)|, |f'(0)|, \ldots, |f^{(r-1)}(0)|, \underset{t \in [0,1]}{\text{Max}} |f^{(r)}|(t) \right\}$$

à la norme de la fonctionnelle erreur R, attachée à la formule de quadrature

$$\int_0^1 f(x)\, dx = \sum_{i=1}^{N} A_i f(x_i) + R(f).$$

On montre que le choix des nœuds x_i *et des poids* A_i $i = 1, 2, \ldots, N$ *qui minimise* $\|R\|$, *implique pour la formule associée un degré de validité* $r - 1$. *Ceci permet la recherche de ces nœuds et poids optimaux en utilisant la technique des multiplicateurs de Lagrange comme il, est indiqué dans* KRYLOV, Approximate calculations of integrals.

On note $C^r_{[0,1]}$ l'ensemble des fonctions continûment dérivables jusqu'à l'ordre r ($r \geqslant 1$) (inclus) sur [0, 1]. On considère la formule d'intégration pour $f \in C^r_{[0,1]}$

$$\int_0^1 f(x)\, dx = \sum_{i=1}^{N} A_i f(x_i) + R(f) \qquad (N \geqslant r)$$

où $0 \leqslant x_1 < x_2 < x_3 \ldots < x_n \leqslant 1$ et $A_i \in \mathbf{R}$ $i = 1, 2, \ldots, N$.

Nous nous proposons d'étudier le comportement de la fonctionnelle erreur R en fonctions des nœuds x_i et des poids A_i $i = 1, 2, \ldots, N$.

$C^r_{[0,1]}$ sera normé en prenant

$$\|f\|_{C^r} = \text{Max}\left\{ |f(0)|, |f'(0)|, \ldots, |f^{r-1}(0)|, \underset{t \in [0,1]}{\text{Max}} |f^{(r)}(t)| \right\}.$$

(1) Institut de Mathématiques Appliquées de Grenoble.

I. REPRESENTATION ET ETUDE DE LA FONCTIONNELLE ERREUR

Dans $C^r_{[0,1]}$ on peut utiliser la formule de Taylor et on obtient ainsi l'expression classique

$$R(f) = \sum_{i=0}^{r-1} \frac{1}{i!} f^{(i)}(0) * \left(\frac{1}{i+1} - \sum_{j=1}^{N} A_j x_j^i\right) + \int_0^1 K(t) f^{(r)}(t)\, \mathrm{d}t$$

où

$$K(t) = \frac{(1-t)^r}{r!} - \frac{1}{(r-1)!} * \sum_{j=1}^{N} A_j (x_j - t)_+^{r-1} \qquad \text{avec} \qquad \begin{aligned} E_+ &= E \text{ si } E > 0 \\ &= 0 \text{ sinon} \end{aligned}$$

$K(t)$ est donc une fonction polynomiale par morceaux et est continûment dérivable jusqu'à l'ordre $r-2$ sur $[0, 1]$. En remarquant que dans tous les cas $K(t)$ est indéfiniment dérivable au voisinage de l'origine, on peut encore écrire

$$\boxed{R(f) = \sum_{i=0}^{r-1} (-1)^{r-i-1} f^{(i)}(0) K^{(r-i-1)}(0) + \int_0^1 K(t) f^{(r)}(t)\, \mathrm{d}t} \tag{1}$$

On a alors la majoration

$$|R(f)| \leqslant \|f\| * \left[\sum_{i=0}^{r-1} |K^{(i)}_{(0)}| + \int_0^1 |K(t)|\, \mathrm{d}t\right]$$

soit pour la fonctionnelle R :

$$\|R\| \leqslant \sum_{i=0}^{r-1} |K^{(i)}_{(0)}| + \int_0^1 |K(t)|\, \mathrm{d}t.$$

Montrons que cette borne pour $\|R\|$ peut être atteinte. A cet effet considérons la fonction φ définie par les relations :

$$\varphi^{(r)}(t) = \text{signe}\,(K(t))$$

$$\varphi^{(i)}(0) = \text{signe}\,[(-1)^{r-i-1} K^{(r-i-1)}(0)] \qquad i = 0, 1, 2, \ldots, r-1$$

φ n'appartient pas à $C^r_{[0,1]}$, mais $R(\varphi)$ est défini et

$$R(\varphi) = \sum_{i=0}^{r-1} |K^{(i)}(0)| + \int_0^1 |K(t)|\, \mathrm{d}t$$

et par ailleurs on peut toujours construire une suite $\varphi_n(r)$ de fonctions de $C^r_{[0,1]}$ qui vérifie les conditions :

$$\varphi_n^{(i)}(0) = \varphi^{(i)}(0) \qquad i = 0, 1, 2, \ldots, r-1$$

$$\varphi_n^{(r)} \to \varphi^{(r)} \qquad \text{au sens de } L_1$$

$$\|\varphi_n\| = 1\ \forall\, n.$$

Dans ces conditions on a :

$$R(\varphi) - R(\varphi_n) = R(\varphi_n - \varphi) = \int_0^1 K(t)(\varphi_n^{(r)} - \varphi^{(r)})\,\mathrm{d}t \to 0 \text{ si } n \to \infty$$

et par conséquent on a l'égalité

$$\boxed{\|R\| = \sum_{i=0}^{r-1} |K^{(i)}(0)| + \int_0^1 |K(t)|\,\mathrm{d}t} \tag{2}$$

II. ETUDE DE LA NORME DE LA FONCTIONNELLE ERREUR

Que peut-on dire de $\|R\|$ lorsque les x_i ou les A_i varient? Intéressons-nous au préalable au problème suivant :

Déterminer (pour des nœuds fixés) les poids A_i $i = 1, 2, \ldots, N$ pour lesquels $\|R\|$ est minimum.

Il s'agit en effet bien d'un minimum car $\|R\|$ est une fonction convexe des A_i $i = 1, 2, \ldots, N$. De façon plus précise nous allons démontrer le :

Théorème 1. — *Pour des nœuds fixés (distincts dans* 0,1), *si $\|R\|$ est minimum alors nécessairement* $K^{(i)}(0)$ $i = 0, 1, 2, \ldots, r-1$.

Écrivons $\|R\| = \sum_{i=0}^{r-1} \frac{1}{i!} * \left| \frac{1}{i+1} - \sum_{j=1}^{N} A_j x_j^i \right| + \int_0^1 |K(t)|\,\mathrm{d}t = \|R(A)\|$

avec, rappelons-le,

$$K(t) = \frac{(1-t)^r}{r!} - \sum_{j=1}^{N} \frac{1}{(r-1)!} * A_j(x_j - t)_+^{r-1}$$

posons

$$\lambda_i = \frac{1}{i!}\left(\frac{1}{i+1} - \sum_{j=1}^{N} A_j x_j^i\right) \qquad i = 0, 1, 2, \ldots, r-1$$

et supposons qu'il existe p, $0 \leqslant p \leqslant r-1$ tels que $\lambda_p \neq 0$.

Considérons alors le système linéaire défini par

$$(S)\begin{cases} \sum_{j=1}^{r} \delta A_j x_j^i = 0 & i = 0, 1, 2, \ldots, r-1 \qquad i \neq p \\ \sum_{j=1}^{r} \delta A_j x_j^p = \omega * p! \text{ signe } (\lambda_p) \text{ où } 0 < \omega < |\lambda_p| \\ \delta A_j = 0 & j = r+1, \ldots, N. \end{cases}$$

Dans ces conditions on peut écrire

$$\delta\,\|R\| = \|R(A+\delta A)\| - \|R(A)\| = |\lambda_p - \omega \text{ signe } (\lambda_p)| - |\lambda_p| + M$$

où

$$M = \int_0^{x_r} \left\{ \left| \frac{(1-t)^r}{r!} - \frac{1}{(r-1)!}\sum_{j=1}^{N} A_j(x_j - t)_+^{r-1} - \frac{1}{(r-1)!}\sum_{j=1}^{N} \delta A_j(x_j-t)_+^{r-1} \right| - \left| \frac{(1-t)^r}{r!} - \frac{1}{(r-1)!}\sum_{j=1}^{N} A_j(x_j-t)_+^{r-1} \right| \right\} \mathrm{d}t$$

$$\left(M = \int_0^1 \{ |K(A+\delta A)| - |K(A)| \} \,\mathrm{d}t \right).$$

Compte tenu des relations (S) on peut écrire

$$|\lambda_p - \omega \text{ signe } (\lambda_p)| - |\lambda_p| = -\omega$$

Par ailleurs si on pose

$$\delta K(t) = \frac{1}{(r-1)!}\sum_{j=1}^{N} \delta A_j(x_j - t)_+^{r-1}, \ M \text{ s'écrit}$$

$$M = \int_0^{x_r} \{ |K(t) - \delta K(t)| - |K(t)| \}\,\mathrm{d}t$$

ce qui permet la majoration $M \leqslant \int_0^{x_r} \big|\, |K - \delta K| - |K| \,\big| \,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^{x_r} |\delta K(t)|\,\mathrm{d}t$
soit en définitive

$$\boxed{\delta\,\|R\| \leqslant -\omega + \int_0^{x_r} |\delta K(t)|\,\mathrm{d}t} \qquad (3)$$

Étude de la fonction $\delta K(t)$

Posons

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & & 1 \\ x_1 & x_2 & & x_r \\ & & & \\ & & & \\ x_1^{r-1} & x_2^{r-1} & & x_r^{r-1} \end{pmatrix} \quad u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \\ \\ u_r \end{pmatrix} \text{ avec } u_i = (x_i - t)_+^{r-1}$$

et e_i le i-ème vecteur de la base canonique dans $\mathbf{R}^r$.

On peut écrire matriciellement

$$\delta K(t) = \frac{1}{(r-1)!} * \omega * p! \text{ signe } (\lambda_p) * u^t M^{-1} e_{p+1}$$

$$= \pm\, \omega * \frac{p!}{(r-1)!} e^t_{p+1} M^{t^{-1}} u = \pm\, \omega * \frac{p!}{(r-1)!} a_p$$

où a_p représente le coefficient de x^p dans l'expression du polynôme $P_t(x)$ de degré inférieur ou égal à $r-1$ et vérifiant $P_t(x_i) = (x_i - t)_+^{r-1}$ $i = 1, 2, ..., r$. Autrement dit $P_t(x)$ est le polynôme d'interpolation, basé sur les abscisses $x_1, x_2, ..., x_r$, de la fonction $\theta(x) = (x-t)_+^{r-1}$, t étant considéré comme un paramètre dans $[0, 1]$. On peut alors prouver le :

Théorème 2. — *Le polynôme $P(x)$ de degré inférieur ou égal à $r-1$, qui vérifie $P(x_i) = \theta(x_i)$ $i = 1, 2, ..., r$ est tel que :*

$$|P^{(i)}(0)| \leqslant (r-1)! \qquad i = 0, 1, 2, ..., r-1.$$

On démontre cette propriété en utilisant d'une part l'expression de $P(x)$ sur la base canonique $\{1, x, x^2, ..., x^{r-1}\}$, d'autre part, l'expression de $P(x)$ sous la forme de Newton. En exprimant les différences divisées de la deuxième forme, et en la développant pour identifier à la première forme, on obtient par majorations et minorations le résultat indiqué.

Mais $|P^{(i)}(0)| = |a_i|\, i!$ $\left(\text{on a supposé } P_t(x) \text{ écrit sous la forme } P_t(x) = \sum_{i=r-1}^{0} a_i x^i\right)$ d'où

$$|a_i|\, i! \leqslant (r-1)! \Rightarrow |a_i| \leqslant \frac{(r-1)!}{i!} \qquad i = 0, 1, 2, ..., r-1$$

et en particulier

$$|a_p| \leqslant \frac{(r-1)!}{p!} \Rightarrow |\delta K(t)| \leqslant \omega$$

Conséquence

En utilisant (3) on obtient $\delta \|R\| \leqslant -\omega + \omega x_r$

si $r < N$ alors $x_r < x_N \leqslant 1$ donc $\|\delta R\| \leqslant -\omega(1 - x_r) < 0$

si $r = N$ alors si $x_N < 1$ on a de même $\|\delta R\| < 0$

sinon si $x_N = 1$ on doit remarquer que $\delta K(t)$ vérifie $|\delta K(t)| \leqslant \omega$ $\forall t \in [0, 1]$ et δK est égale dans $[x_{N-1}, 1]$ à $\frac{1}{(r-1)!} \delta A_N (1-t)^{r-1}$, et vérifie dans cet intervalle $\int_{xN-1}^{1} |\delta K(t)| < (1 - x_{N-1})$ ce qui entraîne encore

$$\int_0^{x_N=1} |\delta K(t)| < \omega \qquad \text{et} \qquad \|\delta R\| < 0.$$

En conséquence nous avons montré que si pour un jeu de poids A_i $i = 1, 2, ..., N$ l'une des quantités λ_p est telle que $\lambda_p \neq 0$ alors on peut trouver un jeu de poids $A_i + \delta A_i$ $i = 1, 2, ..., N$ telle que $\|R(A + \delta A)\| < \|R(A)\|$. Ainsi, lorsque $\|R\|$ est minimum nous avons nécessairement $\lambda_i = 0$ $i = 0, 1, 2, ..., r - 1$ ou en revenant à la définition de λ_i, $K^{(i)}(0) = 0$, $i = 0, 1, 2, ..., r - 1$ ce qui constitue bien le résultat annoncé.

Nous devons remarquer que (sauf dans le cas $r = N$) les A_i optimaux ne se trouvent donc pas entièrement déterminés puisqu'ils vérifient seulement les r relations

$$\frac{1}{i+1} - \sum_{j=1}^{N} A_j x_j^i = 0 \qquad i = 0, 1, 2, ..., r - 1.$$

On peut interpréter notre résultat de la manière suivante en énonçant :

Théorème 1'. — *Une formule de quadrature à N points dans $C^r_{[0,1]} r \leqslant N$, optimale au sens de la norme choisie dans $C^r_{[0,1]}$, est une formule exacte sur les polynômes de degré au plus égal à $r - 1$.*

Notons $\rho_{N,r} = \min\limits_{A_1,\dots,A_N} \|R\|$. On peut écrire si les A_i^* sont les poids optimaux

$$\forall f \in C^r_{[0,1]} \left| \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x - \sum_{i=1}^{N} A_i^* f(x_i) \right| \leqslant \rho_{N,r} \|f\|$$

mais la formule est de degré de validité $r - 1$, donc

$$\boxed{\forall f \in C^r_{[0,1]} \left| \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x - \sum_{i=1}^{N} A_i^* f(x_i) \right| \leqslant \rho_{N,r} * \max_{t \in [0,1]} |f^{(r)}(t)|} \qquad (4)$$

Or il se trouve que dans les cas $r = 1$ et $r = 2$ le problème suivant a été résolu et explicité (cf. [*]).

« Trouver la borne inférieure des nombres $\rho_{N,r}$ satisfaisant à (4) et ceci pour $A_i \in \mathbf{R}$ $i = 1, 2, ..., N$ mais aussi pour les x_i variables dans [0,1]. »

En conséquence nous n'améliorons pas les résultats connus, mais nous avons relié deux notions importantes qui semblaient *a priori* être différentes, dans la théorie de l'intégration numérique approchée :

* la notion de formule optimale au sens de la norme choisie,

* la notion de meilleure formule parmi les formules de degré de validité $r - 1$;

et nous pouvons énoncer les résultats de [1] sous la forme :

Théorème 3. — *Dans $C^1_{[0,1]}$ si nous considérons la formule d'intégration*

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_1^N A_i f(x_i) + R(f)$$

alors il existe un jeu unique de nœuds $x_i = \dfrac{2i-1}{2N}$

et de poids $A_i = \dfrac{1}{N} \qquad i = 1, 2, \ldots, N$

pour lequel $\|R\|$ *est minimum et on a l'estimation de l'erreur*

$$\forall f \in C^1_{[0,1]} \ |R(f)| \leqslant \frac{1}{4N} \max_{t \in [0,1]} |f'(t)|.$$

Théorème 4. — *Dans* $C^2_{[0,1]}$ *si nous considérons la formule d'intégration*

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{i=1}^{N} A_i f(x_i) + R(f)$$

alors il existe un jeu unique de nœuds $x_i = \dfrac{\sqrt{3} + 4(i-1)}{2} h \qquad i = 1, 2, \ldots, N$

$$\text{et de poids} \left| \begin{array}{ll} A_i = 2h & i = 2, 3, \ldots, N-1 \\ A_1 = A_N = \dfrac{2+\sqrt{3}}{2} h & \end{array} \right.$$

avec $h = [\sqrt{3} + 2(N-1)]^{-1}$

pour lequel $\|R\|$ *est minimum, et on a l'estimation de l'erreur*

$$\forall f \in C^2_{[0,1]} \ |R(f)| \leqslant \frac{h^2}{8} \max_{t \in [0,1]} |f''(t)|$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] V. I. KRYLOV, *Approximate calculation of integrals*, The Mac Millan Company, New York, pp.