REVUE FRANÇAISE D'INFORMATIQUE ET DE RECHERCHE OPÉRATIONNELLE. SÉRIE ROUGE

MICHEL VALADIER

Intégration de convexes fermés notamment d'épigraphes inf-convolution continue

Revue française d'informatique et de recherche opérationnelle. Série rouge, tome 4, n° R2 (1970), p. 57-73

<http://www.numdam.org/item?id=M2AN_1970__4_2_57_0>

R.I.R.O.
(4e année, R-2, 1970, p. 57-73)

INTEGRATION DE CONVEXES FERMES NOTAMMENT D'EPIGRAPHES INF-CONVOLUTION CONTINUE

par Michel VALADIER (1)

Résumé. — *On caractérise la fermeture de l'intégrale d'une multi-application à valeurs convexes fermées (éventuellement non bornées) ; ce résultat est inspiré de Ioffe-Tihomirov. On étudie ensuite l'exactitude de l'inf-convolution (i.e. le fait que la borne inférieure de la définition est atteinte) d'une famille de fonctions pas forcément convexes. Tout cela est fait en dimension finie.*

INTRODUCTION

Les résultats de cet article sont susceptibles d'interprétations économiques. L'interprétation de l'intégrale d'une multi-application est classique (cf. la bibliographie de Debreu-Schmeidler) : $\Gamma(t)$ représente un ensemble de consommations possibles pour l'agent t, et alors $\int_T \Gamma\mu$ est l'ensemble des consommations possibles de l'ensemble d'agents T. Le problème de l'exactitude de l'inf-convolution continue est un problème particulier de contrôle optimal avec critère intégral, ou, si l'on veut un problème particulier de calcul des variations. L'interprétation suivante est due à Pallu de La Barrière. Considérons deux unités de production 1 et 2 dont les productions et les coûts de production s'additionnent. Soit $f_i(x)$ le coût de production de la quantité x par $i(i = 1, 2$. On peut supposer $f_i(x) = \infty$ si $x < 0)$. Alors l'inf-convolution, définie par $f_1 \nabla f_2(x) = \inf \{f_1(x_1) + f_2(x_2) \mid x_1 + x_2 = x\}$ est le coût minimum pour produire la quantité x lorsque 1 et 2 se partagent la production de façon optimale. On a pour les fontions polaires la formule $(f_1 \nabla f_2)^* = f_1^* + f_2^*$ qui est intuitivement triviale, puisque $f_i^*(x')$ est le revenu maximum que peut obtenir i, en fixant à son choix la quantité produite, lorsque le prix de vente est x' (on a $f_i^*(x') = \sup_x [x'x - f_i(x)]$).

---

(1) Attaché de Recherches au C.N.R.S., Institut de Recherche d'Informatique et Automatique.

Au lieu de considérer deux producteurs, on peut en considérer un nombre fini quelconque, ou même une infinité (un champ de producteurs indexés par un paramètre, qui peut être par exemple le temps).

Dans la première partie on donne une extension, dans une certaine direction, du théorème de Strassen (cf. Valadier § 4), inspirée de Ioffe-Tihomirov [2] [(7) p. 63. La démonstration donnée par les auteurs ne nous satisfait pas]. Dans la seconde partie on étudie l'exactitude de l'inf-convolution d'une famille de fonctions par rapport à une mesure positive. L'inf-convolution de fonctions convexes se ramène à l'intégrale d'épigraphes et constitue une application de la première partie. En fait il existe d'autres démonstrations possibles, et nous détaillons celle qui nous paraît la plus intéressante (pour les contributions de Olech et Rockafellar à ce problème voir les remarques dans le texte). L'inf-convolution de fonctions non convexes par rapport à une mesure sans atomes est essentiellement une application du théorème de Ljapunov (la convexité est établie dans Ioffe-Tihomirov [1]).

Rappelons la définition de la fonction d'appui d'une partie Γ d'un espace vectoriel topologique E (cf. Hörmander) : on pose

$$\varphi(x', \Gamma) = \sup \{ \langle x', x \rangle \mid x \in \Gamma \}$$

pour tout $x' \in E'$. La fonction d'appui de Γ est $\varphi(., \Gamma)$.

1. INTEGRATION D'ENSEMBLES CONVEXES FERMES DANS R^n

1. Soit $(T, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré, avec $\mu \geqslant 0$, σ-finie. Dans cette partie, Γ désignera une multi-application mesurable de T dans les convexes fermés de $\mathbf{R}^n$ (pour la notion de mesurabilité cf. Rockafellar [2]). Pour simplifier, nous dirons que f est une section de Γ si $f(t) \in \Gamma(t)$, μ-presque partout.

La proposition suivante est donnée de façon un peu plus générale par Debreu-Schmeidler (lemme 2).

Proposition. — *Supposons que* Γ *admette une section intégrable. La formule suivante a un sens, pour tout* $x' \in (\mathbf{R}^n)'$: $\Phi(x') = \int \varphi(x', \Gamma(t))\mu(dt)$. *Notons* $\int \Gamma\mu = \left\{ \int f\mu \mid f \in \mathcal{L}^{1\,n}_{\mathbf{R}}, f \text{ section de } \Gamma \right\}$. *Alors* $\Phi(x') = \varphi\left(x', \int \Gamma\mu\right)$.

Démonstration. — Soit f_0 une section intégrable de Γ. On a

$$\varphi(x', \Gamma(\cdot)) \geqslant \langle x', f_0 \rangle \text{ p.p.},$$

donc Φ est bien définie. On a manifestement

$$\varphi\left(x', \int \Gamma\mu\right) \leqslant \int \varphi(x', \Gamma(t))\mu(dt) = \Phi(x').$$

On va montrer que les valeurs de $\langle x', \int f\mu \rangle$ (pour f section intégrale de Γ) sont arbitrairement voisines de $\Phi(x')$. Comme μ est σ-finie, il existe une fonction $h : T \to]0, \infty[$ intégrable. Soit $\Gamma_p(t)$ l'intersection de $\Gamma(t)$ et de la boule fermée de rayon $\|f_0(t)\| + ph(t)$. Alors Γ_p est mesurable, et $\Gamma_p(t)$ est presque partout non vide. On a, de façon évidente, $\varphi(x', \Gamma_p(\cdot)) \to \varphi(x', \Gamma(\cdot))$. On a aussi $\varphi(x', \Gamma_p(\cdot)) \geqslant \langle x', f_0 \rangle$. D'après la théorie des multi-applications mesurables (cf. Rockafellar [2] ou Valadier), il existe une section mesurable g_p de Γ_p, (donc de Γ) telle que $\langle x', g_p(t) \rangle = \varphi(x', \Gamma_p(t))$ p.p.

Alors, d'après Fatou-Lebesgue,

$$\langle x', \int g_p\mu \rangle = \int \varphi(x', \Gamma_p(t))\mu(\mathrm{d}t) \to \int \varphi(x', \Gamma(t))\mu(\mathrm{d}t).$$

Remarque. — Un exemple où $\int \Gamma\mu$ n'est pas fermé sera donné après le théorème 5.

2. **Lemme.** — *Soit C un cône convexe fermé saillant de $\mathbf{R}^n$. Alors il existe une base $(e_1, \ldots, e_n)$ de $\mathbf{R}^n$ telle que C soit contenu dans le cône convexe engendré par cette base.*

Démonstration. — Le cône polaire C^0 a un intérieur non vide. Donc il contient une base $(e'_1, \ldots, e'_n)$ de $(\mathbf{R}^n)'$. Il existe une base $(e_1, \ldots, e_n)$ de $\mathbf{R}^n$ telle que $\langle e'_i, e_j \rangle = -\delta_{ij}$. Cette base a la propriété requise, car elle engendre le cône polaire du cône engendré par $(e'_1, \ldots, e'_n)$.

3. Dans la suite de cette partie C désigne un cône convexe fermé saillant de $\mathbf{R}^n$.

Proposition. — *On suppose qu'il existe $f \in \mathfrak{L}^1_{\mathbf{R}^n}$ telle que $\Gamma(t) + f(t) \subset C$ presque partout. Pour que Γ soit mesurable (pour la tribu complétée) il faut et il suffit que, pour tout x', $\varphi(x', \Gamma(\cdot))$ soit mesurable. Pour que Γ admette une section intégrable (lorsqu'elle est déjà supposée mesurable) il faut que, pour tout x', $\varphi(x', \Gamma(\cdot))^-$ soit intégrable* (1), *et il suffit qu'il existe x' intérieur à C^0 tel que $\varphi(x', \Gamma(\cdot))^-$ soit intégrable.*

Démonstration. L'assertion concernant la mesurabilité résulte de Rockafellar [2] et du fait que les parties de C ne contiennent pas de droites. Si Γ admet une section intégrable, f_0, on a : $\varphi(x', \Gamma(\cdot)) \geqslant \langle x', f_0 \rangle$, d'où $\varphi(x', \Gamma(\cdot))^- \leqslant -\langle x', f_0 \rangle$. Réciproquement supposons l'existence de x' intérieur à C^0 tel que $\varphi(x', \Gamma(\cdot))^-$ soit intégrable. On a

$$\varphi(x', \Gamma(\cdot)) = \varphi(x', \Gamma(\cdot) + f) - \langle x', f \rangle,$$

(1) On désigne par ψ^- la partie négative de la fonction numérique ψ.

de sorte que $\varphi(x', \Gamma(\cdot) + f)^-$ est encore intégrable. Posons $\Gamma' = \Gamma + f$. Remarquons que, x' étant négative sur C, on a $\varphi(x', \Gamma'(\cdot))^- = -\varphi(x', \Gamma'(\cdot))$ p.p. Remarquons aussi que $\Gamma(t)$ est presque partout non vide, car $\varphi(x', \Gamma(t)) = -\infty$ sur un négligeable. Comme les ensembles

$$C_\alpha = \{ x \in C \mid \langle x', x \rangle \geqslant \alpha \}$$

sont compacts lorsque $\alpha \in \mathbf{R}$, x' atteint son maximum sur $\Gamma'(t)$ p.p. Soit g une section mesurable de Γ' telle que $\varphi(x', \Gamma'(t)) = \langle x', g(t) \rangle$ p.p. Comme il existe une constante $k > 0$ telle que C_α soit contenu dans la boule de centre 0, de rayon $k\,|\alpha|$, g est intégrable, et $g - f$ est une section intégrable de Γ.

4. Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et $(\bar{\Omega}, \bar{\mathcal{A}}, \bar{P})$ deux espaces de probabilité dont les algèbres métriques quotients $\mathcal{A}(P)$ et $\bar{\mathcal{A}}(\bar{P})$ sont isomorphes (cf. Dunford-Schwartz lemme 1 p. 158, ou Neveu ex. I-3-1 p. 12). L'isomorphisme des fonctions mesurables étagées se prolonge aux espaces $L^\infty_{\mathbf{R}^n}$ (avec conservation de l'intégrale), puis aux espaces de fonctions mesurables non bornées à valeurs dans $\mathbf{R}^n$. Pour les fonctions à valeurs dans un polonais, cf. Castaing-Valadier lemme p. 5. Comme nous nous intéressons plus aux fonctions qu'à leurs classes d'équivalence, nous dirons que $f : \Omega \to \mathbf{R}^n$ et $g : \bar{\Omega} \to \mathbf{R}^n$, supposées mesurables, se correspondent si leurs classes d'équivalence se correspondent dans l'isomorphisme.

Lemme. — *Soit* $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ *et* $(\bar{\Omega}, \bar{\mathcal{A}}, \bar{P})$ *deux espaces de probabilité dont les algèbres métriques quotients sont isomorphes. Soit* Γ *une multi-application mesurable de* Ω *dans les convexes fermés non vides de* $\mathbf{R}^n_+$. *Alors il existe une multi-application mesurable* $\bar{\Gamma}$ *de* $\bar{\Omega}$ *dans les convexes fermés non vides de* $\mathbf{R}^n_+$, *telle que :*

1) f *est une section mesurable de* Γ *si et seulement s'il existe* $\bar{f}$ *correspondant à* f *qui soit une section mesurable de* $\bar{\Gamma}$,

2) *pour tout* x', $\varphi(x', \Gamma(\cdot))$ *correspond à* $\varphi(x', \bar{\Gamma}(\cdot))$.

Démonstration. 1) Désignons par $\mathcal{M}(\Gamma)$ l'ensemble des sections mesurables de Γ. Pour chaque $f \in \mathcal{M}(\Gamma)$ choisissons une fonction $\bar{f} : \bar{\Omega} \to \mathbf{R}^n_+$, mesurable correspondant à f. Soit (x'_p) une suite dense dans $(\mathbf{R}^n)'$. Il existe (d'après Neveu démonstration de la prop. II-4-1 p. 43) une partie $\mathfrak{X}$ de $\mathcal{M}(\Gamma)$, dénombrable, telle que, $\forall p$, $\sup \{ \langle x'_p, \bar{f} \rangle \mid f \in \mathfrak{X} \} = \operatorname{sup\,ess} \{ \langle x'_p, \bar{f} \rangle \mid f \in \mathcal{M}(\Gamma) \}$. Posons $\bar{\Gamma}(\bar{\omega}) = \overline{co} \{ \bar{f}(\bar{\omega}) \mid f \in \mathfrak{X} \}$, où $\overline{co}$ désigne l'enveloppe convexe fermée. Si $f \in \mathcal{M}(\Gamma)$, on a, $\forall p$, $\langle x'_p, \bar{f} \rangle \leqslant \varphi(x'_p, \bar{\Gamma}(\cdot))$ p.p., d'où (compte tenu de Klee-Olech p. 296 (1)) $\bar{f}(\bar{\omega}) \in \bar{\Gamma}(\bar{\omega})$ p.p. Réciproquement si

$$g \in \mathcal{M}(\bar{\Gamma}) \text{ et si } h : \Omega \to \mathbf{R}^n$$

(1) On y montre que si K est convexe fermé et ne contient pas de droites, on a $K = \{ x \mid \forall p, \langle x'_p, x \rangle \leqslant \varphi(x'_p, K) \}$. On obtient le même résultat avec le corollaire du lemme 6 de Debreu-Schmeidler.

correspond à g, on a $\langle x'_p, g \rangle \leqslant \varphi(x'_p, \bar{\Gamma}(\cdot)) = \sup \{ \langle x'_p, \bar{f} \rangle \mid f \in \mathfrak{X} \}$, d'où $\langle x'_p, h \rangle \leqslant \sup \{ \langle x'_p, f \rangle \mid f \in \mathfrak{X} \}$ p.p. $\leqslant \varphi(x'_p, \Gamma(\cdot))$. Finalement $h(\omega) \in \Gamma(\omega)$ p.p.

2) Si (f_p) est une suite de sections mesurables denses dans Γ (i.e. presque partout $\{f_p(\omega)\}$ est dense dans $\Gamma(\omega)$) on a, $\forall\, x'$, $\varphi(x', \Gamma(\cdot)) = \sup \langle x', f_p \rangle$. Et l'on a

$$\varphi(x', \bar{\Gamma}(\cdot)) \geqslant \sup \langle x', \bar{f}_p \rangle \text{ p.p., et } \sup \langle x', \bar{f}_p \rangle$$

correspond à $\sup \langle x', f_p \rangle = \varphi(x', \Gamma(\cdot))$. Par symétrie, pour les mêmes raisons, $\varphi(x', \Gamma(\cdot))$ est $\geqslant$ à une fonction correspondant $\varphi(x', \bar{\Gamma}(\cdot))$. On en conclut que ces deux fonctions se correspondent.

5. **Théorème.** — *Soit Γ une multi-application mesurable de T dans les convexes fermés de $\mathbf{R}^n$. On suppose qu'il existe $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbf{R}^n}$ telle que $\Gamma(t) + f(t) \subset C$ p.p. et que Γ admette une section intégrable. Soit Λ le cône asymptotique de $\overline{\int \Gamma\mu}$. On a $\overline{\int \Gamma\mu} = \int \Gamma\mu + \Lambda$. La fonction d'appui de $\int \Gamma\mu$ est $x' \mapsto \int \varphi(x', \Gamma(\cdot))\mu$.*

Démonstration. Compte tenu de la prop. 1 il reste à montrer $\int \Gamma\mu + \Lambda = \overline{\int \Gamma\mu}$. Posons $\Gamma' = \Gamma + f$. On a $\int \Gamma'\mu = \int \Gamma\mu + f$. On peut donc faire la démonstration en supposant $\Gamma(t) \subset C$ p.p. De plus, d'après le lemme 2, on peut supposer $C = \mathbf{R}^n_+$.

1) Supposons T stonien et μ de Radon, normale, de support T (pour ces notions cf. Dixmier). Soit (x_p) une suite de points de $\int \Gamma\mu$ convergeant vers $x \in \overline{\int \Gamma\mu}$. On a $x_p = \int f_p\mu$, où f_p est une section intégrable de Γ. Montrons que l'ensemble des f_p est borné en norme dans $\mathcal{L}^1_{\mathbf{R}^n}$ En effet soit (e'_i) la base duale. On a $\langle e'_i, f_p \rangle \geqslant 0$ et $\int \langle e'_i, f_p \rangle \mu \to \langle e'_i, x \rangle$, donc la suite $\left(\int | \langle e'_i, f_p \rangle | \mu\right)_{p \in \mathbf{N}}$ est bornée. L'ensemble des mesures vectorielles $\nu_p = f_p\mu$ est borné en norme dans $\mathcal{M}_{\mathbf{R}^n}(T)$. Soit λ une valeur d'adhérence vague de (ν_p), λ_1 la partie de λ admettant une densité f par rapport à μ, et λ_2 la partie de λ étrangère à μ. On va montrer que f est une section de Γ, et que $\lambda_2(T) \in \Lambda$, ce qui, compte tenu de l'égalité $x = \lambda(T) = \int f\mu + \lambda_2(T)$, démontrera notre assertion. On a, pour un filtre ad hoc, pour tout x' et toute $\psi \in \mathcal{C}_{\mathbf{R}}(T)$:

$$\lim \int \psi \langle x', f_p \rangle \mu = \int \psi \langle x', f \rangle \mu + \int x' \otimes \psi(t)\lambda_2(dt). \qquad (1)$$

Soit N un μ-négligeable portant λ_2. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe un ouvert U contenant N tel que $\mu(U) < \varepsilon$. Comme $\bar{U} - U$ est rare, et que μ est normale, $\bar{U} - U$ est μ-négligeable, et $\bar{U}$ est un ouvert fermé (car T est stonien) contenant N, tel que $\mu(\bar{U}) < \varepsilon$. Soit A un ensemble μ-mesurable disjoint de $\bar{U}$. Il existe un ouvert fermé B égal, à un μ-négligeable près, à A (car $L^\infty = \mathcal{C}(T)$), et B est disjoint de $\bar{U}$ (car $B \cap \bar{U}$ est négligeable et ouvert fermé, donc vide). On a alors

$$\int_A \langle x', f_p \rangle \mu = \int_B \langle x', f_p \rangle \mu \to \int_B \langle x', f \rangle \mu = \int_A \langle x', f \rangle \mu,$$

d'où $\int_A \langle x', f \rangle \mu \leqslant \int_A \varphi(x', \Gamma(\cdot))\mu$. Il en résulte que les ensembles $\{ t \in T - \bar{U} \mid \langle x', f(t) \rangle > \varphi(x', \Gamma(t)) \}$ sont négligeables. D'après Klee-Olech (corollaires p. 296. Déjà cité dans la démonstration du lemme 4), cela entraîne $f(t) \in \Gamma(t)$ p.p. sur $T - \bar{U}$. Comme $\mu(\bar{U}) < \varepsilon$, f est une section de Γ. En prenant pour ψ la fonction caractéristique de $\bar{U}$, (1) nous donne :

$$\langle x', \lambda_2(T) \rangle + \int_{\bar{U}} \langle x', f \rangle \mu = \lim \int_{\bar{U}} \langle x', f_p \rangle \mu \leqslant \int_{\bar{U}} \varphi(x', \Gamma(t))\mu(dt).$$

Avec les notations de la prop. 1, si on prend $x' \in \operatorname{dom} \Phi = \{ y' \mid \Phi(y') < \infty \}$, $\varphi(x', \Gamma(\cdot))$ appartient à $\mathcal{L}^1$, et l'intégrale de droite tend vers 0 avec ε, ainsi d'ailleurs que $\int_{\bar{U}} \langle x', f \rangle \mu$. Donc $x' \in \operatorname{dom} \Phi$ entraîne $\langle x', \lambda_2(T) \rangle \leqslant 0$. Or on a $\Lambda = (\operatorname{dom}\Phi)^0$. En effet soit $x_0 \in \overline{\int \Gamma\mu}$. D'après la prop. 1 on a

$$\begin{aligned} x \in \Lambda &\Leftrightarrow (\forall\, \alpha \geqslant 0)\ x_0 + \alpha x \in \overline{\int \Gamma\mu} \\ &\Leftrightarrow (\forall\, \alpha \geqslant 0)(\forall\, x' \in \operatorname{dom} \Phi)(\langle x', x_0 + \alpha x \rangle \leqslant \Phi(x')) \\ &\Leftrightarrow (\forall\, x' \in \operatorname{dom} \Phi)(\langle x', x \rangle \leqslant 0). \end{aligned}$$

2) Supposons μ abstraite bornée. Soit $\bar{\Omega}$ le spectre de l'algèbre $L^\infty(T, \mathcal{T}, \mu)$ (cf. Bourbaki [2]) et $\bar{\mu}$ la forme linéaire sur $\mathcal{C}(\bar{\Omega})$ déduite de l'intégrale sur T par l'isomorphisme entre $L^\infty(T, \mathcal{T}, \mu)$ et $\mathcal{C}(\bar{\Omega})$. Alors $\bar{\Omega}$ est stonien et $\bar{\mu}$ normale, $\geqslant 0$ de support $\bar{\Omega}$. Grâce au lemme 4 et au 1) le théorème est vrai.

3) Montrons qu'on peut toujours se ramener au cas μ bornée. Comme μ est σ-finie il existe $h : T \to]0, \infty[$ intégrable. On pose

$$\mu' = h\mu \quad \text{et} \quad \Gamma'(t) = \frac{1}{h(t)} \Gamma(t).$$

On a évidemment

$$\int \Gamma\mu = \int \Gamma'\mu' \quad \text{et} \quad \int \varphi(x', \Gamma(\cdot))\mu = \int \varphi(x', \Gamma'(\cdot))\mu'.$$

EXEMPLE. Voici un exemple où $\int \Gamma\mu$ n'est pas fermé.

Soit

$$\Omega = \mathbf{N} - \{0\},\ n = 2 \text{ (et } C = \mathbf{R}^2_+\text{) et, } \forall p,\ \mu(\{p\}) = 1$$

et

$$\Gamma(p) = \left[(0, 0), \left(1, \frac{1}{p^2}\right)\right].$$

Il est facile de voir que $\int \Gamma\mu$ n'est pas fermé car il ne contient pas les points de la forme $(\lambda, 0)(\lambda > 0)$ qui lui sont adhérents, et que $\Lambda = \mathbf{R}_+ \times \{0\}$.

REMARQUE. Si $\Omega = \mathbf{N}$ et si μ est bornée, on peut, dans la démonstration du th. 5, se contenter d'introduire le compactifié d'Alexandroff de $\mathbf{N}$. Le négligeable N sera réduit au point à l'infini, et on majorera « à ε près » sa fonction caractéristique par une fonction continue.

2. INF-CONVOLUTION

6. Soit $(T, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré avec $\mu \geqslant 0$. Soit $(f_t)_{t\in T}$ une famille de fonctions s.c.i. sur $\mathbf{R}^n$ à valeurs dans $]-\infty, \infty]$. On note f^* la fonction polaire de f (cf. Moreau), et on note épi(f) l'ensemble $\{(x, \lambda) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R} \mid \lambda \geqslant f(x)\}$ (épigraphe de f). On suppose dans toute la suite que la multi-application $t \mapsto$ épi f_t est mesurable. (Il en résulte, lorsque les f_t sont convexes, finies en au moins un point, que $(t, x) \mapsto f_t(x)$ est un « normal convex integrand » au sens de Rockafellar [1]). En utilisant les résultats de Rockafellar [2] et le fait que $t \mapsto$ épi f_t admet une suite de sections denses sur l'ensemble mesurable $\{t \mid \text{épi} f_t \neq \varnothing\}$, on voit que $t \mapsto$ épi f_t^* est aussi mesurable. Enfin pour toute fonction mesurable $X : T \to \mathbf{R}^n_;$ $t \mapsto f_t(X(t))$ est mesurable.

Lemme. — *Supposons que, pour tout x', les fonctions $t \mapsto f_t^*(x')^+$ sont intégrables. Alors il existe un cône convexe fermé saillant de $\mathbf{R}^{n+1}$, C, et une fonction intégrable h tels que* épi $f_t + (0, h(t)) \subset C$ *p.p. Il existe T_0, σ-fini, tel que $t \notin T_0$ entraîne $f_t \geqslant \delta_0$ (¹). Il est alors équivalent de supposer les fonctions $t \mapsto f_t^*(x')$ intégrables ou que $t \mapsto$ épi f_t admet une section intégrable ; alors $\{t \mid f_t \neq \delta_0\}$ est σ-fini.*

Démonstration. 1) Soit $e' \in (\mathbf{R}^n)'$, $e' \neq 0$. Comme

$$f_t^*(e') + f_t(x) \geqslant \langle e', x \rangle,$$

(1) On note δ_0 l'indicatrice de 0.

l'ensemble épi $f_t + (0, f_t^*(e')^+)$ est contenu dans le demi-espace

$$D_{e'} = \{ (x, \alpha) \mid \langle e', x \rangle \leqslant \alpha \}.$$

Il existe $n+1$ vecteurs $e'_1, ..., e'_{n+1}$ tels que $C = \cap D_{e'_i}$ soit un cône saillant. Il suffit de poser $h(t) = \sup f_t^*(e'_i)^+$.

2) Soit (e'_p) une suite dans $(\mathbf{R}^n)'$ telle que tout point de $(\mathbf{R}^n)'$ soit barycentre d'un nombre fini de e'_p(1). Soit T_0 σ-fini tel que $t \notin T_0 \Rightarrow (\forall p) f_t^*(e'_p) \leqslant 0$. Alors $t \notin T_0 \Rightarrow (\forall x') f_t^*(x') \leqslant 0$. Pour $t \notin T_0$ on a donc, $f_t \geqslant f_t^{**} \geqslant \delta_0$ (car la polaire de δ_0 est la fonction nulle).

3) Supposons que $t \mapsto$ épi f_t admette une section intégrable (X, Λ). Alors $f_t^*(x') + f_t(X(t)) \geqslant \langle x', X(t) \rangle$, d'où $f_t^*(x') \geqslant \langle x', X(t) \rangle - \Lambda(t)$, ce qui prouve que $t \mapsto f_t^*(x')$ est intégrable. Réciproquement si $t \mapsto f_t^*(x')$ est intégrable, comme l'on a $\varphi((x', -1), \text{épi} f_t) = f_t^*(x')$, et qu'il existe un x' tel que $(x', -1)$ soit intérieur à C^0, il résulte de la prop. 3 que $t \mapsto$ épi f_t admet une section intégrable.

4) Puisque $t \mapsto$ épi f_t admet une section intégrable, la partie de $T - T_0$, $\{ t \in T - T_0 \mid f_t(0) > 0 \}$ est σ-finie. Cela établit que $\{ t \in T \mid f_t \neq \delta_0 \}$ est σ-fini.

7. On définit l'inf-convolution de la famille $(f_t)_{t \in T}$ par rapport à la mesure μ par la formule

$$\left[\forall\!\!\!\!\int f_t \mu(dt) \right](x) = \inf \left\{ \int f_t(X(t)) \mu(dt) \mid X \in \mathcal{L}^1_{\mathbf{R}^n}, \int X\mu = x \right\},$$

où l'intégrale vaut $+\infty$ dès que $\displaystyle\int f_t(X(t))^+ \mu(dt) = \infty$.

Cette convention est similaire à celle de Moreau. En fait, dans la situation du théorème suivant, $t \mapsto f_t(X(t))$ est minorée par une fonction intégrable, ce qui lève toute ambiguïté.

Théorème. — *On suppose les fonctions f_t convexes, et que pour tout x', $t \mapsto f_t^*(x')$ est intégrable. L'inf-convolution est exacte (i.e., $\forall x, \exists X \in \mathcal{L}^1_{\mathbf{R}^n}$ tel que*

$$\int X\mu = x \text{ et } \int f_t(X(t))\mu(dt) = \left[\forall\!\!\!\!\int f_t \mu(dt) \right](x)).$$

C'est une fonction convexe s.c.i., à valeurs dans $]-\infty, \infty]$, non partout égale à $+\infty$, d'épigraphe $\displaystyle\int$ épi $f_t \mu(dt)$. La fonction polaire de $\displaystyle\forall\!\!\!\!\int f_t \mu(dt)$ est la fonction $x' \mapsto \displaystyle\int f_t^*(x') \mu(dt)$.

---

(1) Si on identifie $(\mathbf{R}^n)'$ à $\mathbf{R}^n$, il suffit de prendre pour les e'_p les points de $\mathbf{Z}^n$.

Première démonstration. D'après le lemme 6, on peut supposer que μ est σ-finie, car δ_0 est l'élément neutre pour l'inf-convolution. On a, $\forall\, X \in \mathcal{L}^1_{\mathbf{R}^n}$, $\int f_t(X(t))\mu(dt) \geqslant -\int f_t^*(0)\mu(dt) > -\infty$, donc l'inf-convolution est à valeurs dans $]-\infty, \infty]$.

Considérons $K = \int \text{épi}\, f_t \mu(dt)$. Il est non vide d'après le lemme 6. On a $K + \{0\} \times \mathbf{R}_+ = K$ trivialement. On va montrer, grâce au th. 5, que K est fermé. Remarquons d'abord que si f est une fonction convexe s.c.i. à valeurs dans $]-\infty, \infty]$ non partout égale à $+\infty$, on a :

$$\varphi((x', \lambda), \text{épi}\, f) = \begin{cases} +\infty \text{ si } \lambda > 0 \\ \sup \{ \langle x', x \rangle \mid x \in \text{dom}\, f \} \text{ si } \lambda = 0 \\ -\lambda f^*\left(-\dfrac{x'}{\lambda}\right) \text{ si } \lambda < 0. \end{cases}$$

En utilisant, comme dans la démonstration du lemme 6, une suite (e'_p) telle que tout x' soit barycentre d'un nombre fini de e'_p, on voit qu'il existe un négligeable N, tel que si $t \notin N, f_t^*(x') \in \mathbf{R}$, $\forall\, x'$; ce qui fait que f_t est à valeurs dans $]-\infty, \infty]$, non partout égale à $+\infty$. On a

$$\varphi((x', \lambda), \bar{K}) = \int \varphi((x', \lambda), \text{épi}\, f_t)\mu(dt).$$

Si $\lambda < 0$ on a $\varphi((x', \lambda), \bar{K}) \in \mathbf{R}$ et si $\lambda > 0$, $\varphi((x', \lambda), \bar{K}) = \infty$. Par suite : $\mathbf{R}^n \times]-\infty, 0[\subset \text{dom}\, \varphi(., \bar{K}) \subset \mathbf{R}^n \times]-\infty, 0]$. Il en résulte (fin de la démonstration du 1) du th. 5) que le cône asymptotique de $\bar{K}$ est $\{0\} \times \mathbf{R}_+$, et par suite (th. 5) K est fermé.

Montrons que K est l'épigraphe de $\displaystyle\int\!\!\!\!\!\!\nabla f_t \mu(dt)$. En effet

$$\left[\int\!\!\!\!\!\!\nabla f_t \mu(dt)\right](x) = \inf \left\{ \int f_t(X(t))\mu(dt) \mid \int X\mu = x \right\}$$

$$= \inf \left\{ \lambda \mid (x, \lambda) \in \int \text{épi}\, f_t \mu(dt) \right\}.$$

La borne inférieure de la dernière expression, si elle est finie, est atteinte. Soit λ_0 le minimum. Soit (X, Λ) une section intégrable de $t \mapsto \text{épi}\, f_t$, telle que $\int (X, \Lambda) = (x, \lambda_0)$. Alors $\int f_t(X(t))\mu(dt) \leqslant \int \Lambda(t)\mu(dt) = \lambda_0$, et on a égalité.

Il ne reste qu'à calculer la fonction polaire de $\displaystyle\int\!\!\!\!\!\!\nabla f_t \mu(dt)$. D'après la formule sur la fonction d'appui d'un épigraphe, c'est la fonction $x' \mapsto \varphi((x', -1), K)$.

Or on a

$$\varphi((x', -1), K) = \int \varphi((x', -1), \text{épi} f_t)\mu(dt) = \int f_t^*(x')\mu(dt).$$

EXEMPLE. Soit, en dimension 1, pour $p \in \mathbf{N} - \{0\}$,

$$f_p(x) = \begin{cases} \infty \text{ si } x \notin [0, 1] \\ \dfrac{x}{p} \text{ si } x \in [0, 1]. \end{cases}$$

Alors

$$(\mathop{\nabla}_{p \geqslant 1} f_p)(x) = \begin{cases} \infty \text{ si } x < 0 \\ 0 \quad \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}.$$

L'inf-convolution n'est pas exacte pour $x > 0$. On a

$$f_p^*(x') = \begin{cases} 0 \text{ si } x' \leqslant \dfrac{1}{p} \\ x' - \dfrac{1}{p} \text{ si } x' \geqslant \dfrac{1}{p} \end{cases}$$

et $\Sigma f_p^*(x')$ diverge pour tout $x' > 0$.

8. Nous allons maintenant donner une deuxième démonstration du th. 7.

Lemme. — *Si les fonctions $t \mapsto f_t^*(x')$ sont intégrables et si μ est σ-finie, il existe une fonction $h : T \to]0, \infty[$ intégrable, un négligeable N et une fonction convexe finie g^*, tels que $t \notin N \Rightarrow f_t^*(x') \leqslant h(t)g^*(x')$.*

Démonstration. Soit (e'_p) une suite telle que tout point x' soit barycentre d'un nombre fini de e'_p. Soit une fonction $h : T \to]0, \infty[$ intégrable telle que $\forall p$, $\exists k > 0$ tel que $f_t^*(e'_p) \leqslant kh(t)$ p.p. (on peut prendre pour h une fonction $\geqslant$ p.p. à $\Sigma 2^{-p} \dfrac{f_t^*(e'_p)}{\|f^*(e'_p)\|_1}$, où on prend la somme pour les fonctions non p.p. nulles). Soit N un négligeable en dehors duquel l'inégalité a lieu pour tout p. Posons $g^*(x') = \sup \left\{ \dfrac{f_t^*(x')}{h(t)} \mid t \notin N \right\}$ (si $T - N \neq \varnothing$, sinon le lemme est trivial). On a, $\forall p$, $g^*(e'_p) < \infty$, d'où, $\forall x'$, $g^*(x') < \infty$. Comme pour tout x', $g^*(x') > -\infty$, h, g^* et N ont les propriétés demandées.

9. **Proposition.** — *Sous les hypothèses du th. 7, en supposant μ σ-finie, il existe une fonction convexe s.c.i., g, telle que $\dfrac{g(x)}{\|x\|} \to \infty$ quand $\|x\| \to \infty$, un négligeable N et une fonction $h : T \to]0, \infty[$ intégrable tels que les fonctions g_t d'épigraphe $\dfrac{\text{épi} f_t}{h(t)}$ vérifient $g_t \geqslant g$ si $t \notin N$, et $\displaystyle\oint g_t h\mu(dt) = \oint f_t\mu(dt)$.*

Démonstration. Prenons h, N et g^* comme dans le lemme 8. Soit g la polaire de g^*. On a $g_t(x) = \dfrac{f_t(h(t)x)}{h(t)}$.

On peut alors facilement vérifier que $\displaystyle\oint g_t(h\mu)(\mathrm{d}t) = \oint f_t\mu(\mathrm{d}t)$. La polaire de g_t est $\dfrac{f_t^*}{h(t)}$, de sorte que $g_t \geqslant g$ si $t \notin N$. Il reste à voir que la fonction polaire g d'une fonction convexe finie g^* vérifie $\dfrac{g(x)}{\|x\|} \to \infty$ quand $\|x\| \to \infty$. Or si g ne vérifiait pas cette hypothèse, il existerait (x_p) telle que $\|x_p\| \to \infty$ et $g(x_p) \leqslant k\,\|x_p\|$, où $k < \infty$. La suite $\left(\dfrac{x_p}{\|x_p\|}, k\right)$ ayant une valeur d'adhérence (x, k) avec $x \neq 0$, épi g contiendrait une demi-droite non verticale : $\{(x_0, k_0) + \lambda(x, k) \mid \lambda \geqslant 0\}$. Si x' est tel que $\langle x', x\rangle > k$, on a

$$\begin{aligned} g^*(x') &= \varphi((x', -1), \text{épi } g) \\ &\geqslant \sup\{\langle (x', -1), (x_0, k_0) + \lambda(x, k)\rangle \mid \lambda \geqslant 0\} \\ &= \infty, \text{ ce qui est absurde.} \end{aligned}$$

10. Supposons μ finie. Le lemme suivant étend très légèrement le th. II-22 de Meyer (p. 38).

Lemme. — *Soit g une fonction sur $\mathbf{R}^n$, s.c.i. à valeurs dans $]-\infty, \infty]$ telle que $\dfrac{g(x)}{\|x\|} \to \infty$ quand $\|x\| \to \infty$. Pour tout $M \in \mathbf{R}$ l'ensemble*

$$\mathfrak{X} = \left\{ X \in \mathfrak{L}^1_{\mathbf{R}^n} \;\middle|\; \int g(X(t))\mu(\mathrm{d}t) \leqslant M \right\}$$

est équi-intégrable.

Démonstration. Il s'agit de montrer que $\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists\, c$ tel que

$$\forall\, X \in \mathfrak{X}, \int_{\{t \mid \|X(t)\| \geqslant c\}} \|X(t)\|\mu(\mathrm{d}t) \leqslant \varepsilon.$$

Soit $a = \dfrac{|M|}{\varepsilon}$ et c assez grand pour que $\|x\| \geqslant c \Rightarrow \dfrac{g(x)}{\|x\|} \geqslant a$. On a

$$\int_{\{\|X\| \geqslant c\}} \|X(t)\|\mu(\mathrm{d}t) \leqslant \frac{1}{a}\int_{\{\|X\| \geqslant c\}} g(X(t))\mu(\mathrm{d}t) \leqslant \frac{|M|}{a} = \varepsilon.$$

11. *Deuxième démonstration du th. 7.* On a déjà remarqué que l'on peut se ramener au cas μ σ-finie. Prenons les notations de la prop. 9. Montrons l'exactitude de l'inf-convolution des g_t par rapport à $\nu = h\mu$, en un point x, où

$\oint g_t \nu(dt)$ est finie. Soit (X_p) une suite minimisante telle que $\int g_t(X_p(t))\nu(dt)$ décroisse. D'après la prop. 9, le lemme 10 et le fait que les parties équi-intégrables de L^1 sont faiblement relativement compactes (Meyer th. II-23 p. 39), la suite (X_p) est faiblement relativement compacte. Soit X une valeur d'adhérence faible de (X_p). Soit $A_p = co \{ X_q \mid q \geqslant p \}$, où co désigne l'enveloppe convexe dans $L^1_{\mathbf{R}^n}$. On a $X \in \bar{A}_p$, ou $\bar{A}_p$ est l'adhérence faible mais aussi l'adhérence forte. Il existe donc $Y_p \in A_p$ tel que $\| Y_p - X \|_1 \leqslant 2^{-p}$. Il en résulte (cf. Bourbaki [1] ch. IV § 3 n^{os} 3 et 4) que $Y_p(t) \to X(t)$ p.p. (1). Comme $Y_p \in A_p$ et que $\int g_t(X_p(t))\nu(dt)$ décroît on a : $\int g_t(Y_p(t))\nu(dt) \leqslant \int g_t(X_p(t))\nu(dt)$. Par ailleurs on a, $\forall\, Z \in \mathcal{L}^1_{\mathbf{R}^n}$, $g_t(Z(t)) \geqslant -g_t^*(0)$, donc, par le théorème de Fatou-Lebesgue :

$$\underline{\lim} \int g_t(Y_p(t))\nu(dt) \geqslant \int \underline{\lim}\, g_t(Y_p(t))\nu(dt) \geqslant \int g_t(X(t))\nu(dt).$$

D'où : $\int g_t(X(t))\nu(dt) \leqslant \left[\oint g_t \nu(dt) \right](x)$, et comme $\int X\nu = x$, l'exactitude est démontrée. Cela implique que $\int \text{épi}\, g_t \nu(dt)$ est l'épigraphe de $\oint g_t \nu(dt)$. On montrerait la s.c.i. de la même façon que l'exactitude. Cela entraîne que $\int \text{épi}\, f_t \mu(dt) = \int \text{épi}\, g_t \nu(dt)$ est fermé, d'où l'exactitude de $\oint f_t \mu(dt)$. Finalement on calcule la polaire de $\oint g_t \nu(dt)$ grâce à la prop. 1 et au fait que $\varphi((x', -1), \text{épi}\, g_t) = g_t^*(x')$ (formule valable également pour $\oint g_t \nu(dt)$).

Remarque. Le résultat suivant m'a été communiqué par Rockafellar en complément à son article Rockafellar [1] : si les fonctions $t \mapsto g_t^*(x')$ sont dans $\mathcal{L}^\infty$, si μ est bornée, alors l'inf-convolution est exacte, etc... La démonstration de Rockafellar n'utilise pas la notion de partie équi-intégrable (la méthode a été reprise dans les Banach par Castaing). On peut remarquer que l'hypothèse « les $t \mapsto g_t^*(x')$ sont dans $\mathcal{L}^1$ et $g_t \geqslant g$ (où $\frac{g(x)}{\|x\|} \to \infty$ quand $\|x\| \to \infty$) » est plus faible que celle de Rockafellar : par exemple si h est une fonction intégrable positive et si $g_t = \delta_0 + h(t)$. Voici le principe d'une troisième démonstration possible du th. 7, inspirée de Olech [2] (l'exactitude de l'inf-convolution est remarquée dans Olech [2], remarque 2 p. 174) : 1) étendre le lemme de Olech [2] à un compact quelconque (le lemme de Olech [3] s'en

(1) On pourrait aussi bien utiliser le fait que si $Y_p \to X$ en norme, il existe une suite extraite qui converge p.p. vers X.

rapproche); 2) montrer que les ensembles $\left\{ X \mid \int f_t(X(t))\mu(\mathrm{d}t) \leqslant M \right\}$ sont bornés en norme dans $\mathcal{L}^1_{\mathbf{R}^n}$, en reprenant les calculs de Olech [2] p. 171-172; 3) utiliser le lemme 4.

12. **Lemme.** — *Soit f une fonction s.c.i. sur $\mathbf{R}^n$ à valeurs dans* $]-\infty, \infty]$. *On suppose que f^* est finie. Alors l'enveloppe convexe de* épi f *est fermée.*

Démonstration. Soit (z_p) une suite de points de co (épi f) convergente vers z. Chaque z_p est de la forme

$$z_p = \sum_{i=1}^{m} \alpha_p(i)Z_p(i), \text{ où } Z_p(i) \in \text{épi}\, f,\ \alpha_p(i) \geqslant 0,\ \Sigma\alpha_p(i) = 1 \text{ et } m \leqslant n+2$$

(d'après le théorème de Carathéodory). On montrera dans le 2) que si pour un indice i, $\|Z_p(i)\| \to \infty$, z est limite de barycentres de $m - 1$ points.

1) Si $\|Z_p(1)\| \to \infty$ on est dans la situation du 2). Sinon on peut, par extraction de suite, supposer que $(Z_p(1))$ converge. On peut alors faire les mêmes considérations sur $(Z_p(2))$, et ainsi de suite. Supposons donc que toutes les $(Z_p(i))$ convergent. On peut également supposer, par extraction de suite, les $(\alpha_p(i))$ convergentes, et l'on a, avec des notations évidentes pour les limites $z = \Sigma\alpha_\infty(i)Z_\infty(i) \in co(\text{épi}\, f)$.

2) Supposons que pour un i, $\|Z_p(i)\| \to \infty$. Pour simplifier supposons $i = m$. Nous utiliserons les notations $z_p = (x_p, \lambda_p)$ et $Z_p(i) = (X_p(i), \Lambda_p(i))$. On a $\Lambda_p(m) \to \infty$, car si on pouvait extraire une suite majorée $(\Lambda_{p_k}(m))$, $(X_{p_k}(m))$ serait bornée (car f est inf-compacte).

Posons $Z'_p = \dfrac{1}{1-\alpha_p(m)} \displaystyle\sum_{i=1}^{m-1} \alpha_p(i)Z_p(i)$. On a

$$z_p = \alpha_p(m)Z_p(m) + (1 - \alpha_p(m))Z'_p$$

et en particulier, $\lambda_p = \alpha_p(m)\Lambda_p(m) + (1 - \alpha_p(m))\Lambda'_p$. On a forcément $\alpha_p(m) \to 0$. Donc (Λ'_p) est majorée et (Z'_p) est bornée. Par extraction de suite on peut supposer (Z'_p) convergente. Comme épi f^{**} n'admet que $\{0\} \times \mathbf{R}_+$ comme direction asymptotique (cf. démonstration de la prop. 9), il existe $k \geqslant 0$ tel que : $z = \lim Z'_p + k(0, 1)$. Or $Z'_p(i) + k(0, 1)$ appartient à épi f, donc z est limite de barycentres de $m - 1$ points.

13. **Théorème.** — *On suppose les fonctions f_t s.c.i. sur $\mathbf{R}^n$ et que, pour tout x', $t \mapsto f_t^*(x')$ est intégrable. Si μ est sans atomes l'inf-convolution est exacte et* $\displaystyle\int\!\!\!\!\!\!\nabla f_t\mu(\mathrm{d}t) = \int\!\!\!\!\!\!\nabla f_t^{**}\mu(\mathrm{d}t)$.

Démonstration. Soit x tel que $\left[\displaystyle\int\!\!\!\!\!\!\nabla f_t^{**}\mu(\mathrm{d}t)\right](x) = \lambda < \infty$. Notons $z = (x, \lambda)$, et soit $Z = (X, \Lambda)$ une section intégrable de $t \mapsto$ épi f_t^{**} telle que

$\int Z = z$. On va montrer qu'il existe une section intégrable de $t \mapsto \text{épi} f_t$, Z_1, telle que $\int Z_1 = z$. Compte tenu du fait que $\oint f_t \mu(\mathrm{d}t) \geqslant \oint f_t^{**} \mu(\mathrm{d}t)$, cela établira le théorème. Comme on est en dimension finie, le convexe $\int \text{épi } f_t^{**} \mu(\mathrm{d}t)$ admet en z un hyperplan d'appui (obtenu par exemple en le séparant de $\{x\} \times]-\infty, \lambda[$).

1) Supposons cet hyperplan non vertical. Il existe donc x' tel que le point z réalise le maximum de $(x', -1)$ sur $\int \text{épi } f_t^{**} \mu(\mathrm{d}t)$. D'après la prop. 1 il en est de même pour presque tout t avec $Z(t)$. Posons $\Gamma(t) = \{ \xi \in \text{épi } f_t^{**} \mid \xi \text{ maximise } (x', -1) \}$. Montrons que Γ est « intégrable ». Toute section intégrable de Γ a pour intégrale un point de $\left\{ \xi \in \int \text{épi } f_t^{**} \mu(\mathrm{d}t) \mid \xi \text{ maximise } (x', -1) \right\}$, et cet ensemble est compact $\left(\text{car } \oint f_t^{**} \mu(\mathrm{d}t) \text{ est inf-compacte pour toute pente puisque sa polaire est finie} \right)$, donc la fonction d'appui de Γ est intégrable (d'après la prop. 1). Soit $\Sigma(t) = \{ \xi \in \text{épi} f_t \mid \xi \text{ maximise } (x', -1) \}$. D'après le lemme 12 on a $co(\Sigma(t)) = \Gamma(t)$. Il résulte du théorème de Kellerer (1) (qui utilise le théorème de Ljapunov) qu'il existe une section intégrable de Σ, Z_1, telle que $\int Z_1 \mu = \int Z \mu$.

2) Supposons l'hyperplan d'appui vertical. Il existe x', tel que z maximise $(x', 0)$ sur $\int \text{épi } f_t^{**} \mu$. D'après la prop. 1, on a encore, presque partout : $\forall x \in \text{dom } f_t^{**}$, $\langle x', X(t) \rangle \geqslant \langle x', x \rangle$. On peut supposer $X(t) = 0$, sans perte de généralité, car si on pose $h_t(x) = f_t(x + X(t))$, on a

$$h_t^*(x) = f_t^*(x') - \langle x', X(t) \rangle ,$$

qui est encore intégrable en t. On peut supposer que $x' = e_n'$. Posons $H = \ker e_n'$, qui s'identifie à $\mathbf{R}^{n-1}$. Posons $g_t = f_{t|H}$. On a

$$\begin{aligned} g_t^*(\xi') &= \sup_{\xi} [\langle \xi', \xi \rangle - g_t(\xi)] \\ &= \sup_{\xi} [\langle \xi', \xi \rangle - f_t(\xi, 0)] \\ &\leqslant \sup_{x} [\langle (\xi', 0), x \rangle - f_t(x)] = f_t^*(\xi', 0). \end{aligned}$$

(1) Cf. également Valadier th. 21.

Ainsi $t \mapsto g_t(\xi')$ est majorée par une fonction intégrable. D'après le lemme 6, comme $t \mapsto \text{épi}\, g_t^{**}$ admet une section intégrable (à savoir $t \mapsto (0, \Lambda(t))$), les fonctions $t \mapsto g_t^*(\xi')$ sont intégrables. Grâce au lemme 12 $g_t^{**} = f_t^{**} \mid_H$, et on a

$$\begin{aligned} \text{épi} \curlyvee\!\!\!\!\int g_t^{**}\mu(\mathrm{d}t) &= \int \text{épi}\, g_t^{**}\mu(\mathrm{d}t) \\ &= H \times \mathbf{R} \cap \int \text{epi}\, f_t^{**}\mu(\mathrm{d}t) \\ &= H \times \mathbf{R} \cap \text{épi} \curlyvee\!\!\!\!\int f_t^{**}\mu(\mathrm{d}t). \end{aligned}$$

Ainsi $\lambda = \left[\curlyvee\!\!\!\!\int g_t^{**}(\mathrm{d}t)\right](0)$. Si donc on suppose le théorème vrai en dimension $n - 1$ (en dimension 0 tout cela est trivial : toute fonction est convexe !), il existe une section intégrable Z_1 de $t \mapsto \text{épi}\, g_t$ telle que $\int Z_1\mu = (0, \lambda)$. Le résultat est établi car Z_1 est aussi une section de $t \mapsto \text{épi} f_t$.

14. **Théorème.** — *Si T est dénombrable, si les fonctions f_t sont s.c.i. sur $\mathbf{R}^n$, et si pour tout x', $t \mapsto f_t^*(x')$ est intégrable, alors l'inf-convolution est exacte, s.c.i. et inf-compacte, non partout égale à $+\infty$.*

Démonstration. Comme $\curlyvee\!\!\!\!\int f_t\mu(\mathrm{d}t) \geqslant \curlyvee\!\!\!\!\int f_t^{**}\mu(\mathrm{d}t)$ et que $\curlyvee\!\!\!\!\int f_t^{**}\mu(\mathrm{d}t)$ est inf-compacte, car sa polaire est finie, l'inf-compacité résultera de la s.c.i. D'après la prop. 9 et le lemme 10 on peut se ramener au cas où μ est bornée et où les suites minimisantes sont équi-intégrables (donc faiblement relativement compactes). On peut supposer $\mathcal{C} = \mathcal{P}(T)$ et, $\forall\, t$, $\mu(\{t\}) > 0$. Si (X_p) est une suite minimisante, sur $\mathfrak{X} = \{X_p\}$, la topologie $\sigma(L^1_{\mathbf{R}^n}, L^\infty_{(\mathbf{R}^n)'})$ coïncide avec la topologie de la convergence simple (car la dernière est séparée et moins fine que la première). Par extraction de suite on peut supposer, $\forall\, t$, $X_p(t) \to X_\infty(t)$, et l'on a $\int X_\infty(t)\mu(\mathrm{d}t) = x$. Comme $f_t(X_p(t)) \geqslant -f_t^*(0)$, on peut appliquer le théorème de Fatou-Lebesgue, ce qui donne :

$$\int f_t(X_\infty(t))\mu(\mathrm{d}t) \leqslant \underline{\lim} \int f_t(X_p(t))\mu(\mathrm{d}t) = \left[\curlyvee\!\!\!\!\int f_t\mu(\mathrm{d}t)\right](x).$$

La s.c.i. s'établit pareillement.

15. **Théorème.** — *Si μ est $\geqslant 0$ quelconque, si les fonctions f_t sont s.c.i. sur $\mathbf{R}^n$, et si pour tout x', $t \mapsto f_t^*(x')$ est intégrable, l'inf-convolution est exacte, s.c.i. et inf-compacte, non partout égale à $+\infty$.*

Démonstration. Elle va résulter des th. 13 et 14. On a déjà vu que l'on pouvait se ramener au cas où μ est σ-finie, et de là à μ finie. Alors T est réunion de deux mesurables disjoints T_1 et T_2, tels que μ soit sans atomes sur T_1 et purement atomique sur T_2 (donc T_2 est dénombrable) (à ce sujet cf. Neveu ex. I-4-3 p. 18). On a :

$$\inf \left\{ \int_{T_1} f_s(X(s))\mu(\mathrm{d}s) + \int_{T_2} f_t(X(t))\mu(\mathrm{d}t) \mid \int_T X\mu = x \right\}$$

$$= \inf_{x_1+x_2=x} \left(\left[\oint_{T_1} f_s\mu(\mathrm{d}s) \right](x_1) + \left[\oint_{T_2} f_t\mu(\mathrm{d}t) \right](x_2) \right)$$

Le théorème résulte alors des th. 13 et 14, et de Moreau prop. 4*e* et 4*f* p. 23-24.

REMARQUE. Lorsque f_t est l'indicatrice d'un ensemble $\Gamma(t) \subset \mathbf{R}^n$, on retrouve un résultat connu :

Si Γ est une multi-application mesurable à valeurs compactes telle que les $\varphi(x', \Gamma(\cdot))$ soient intégrables, alors $\int \Gamma\mu$ est compact (résultat mentionné par Olech [1] p. 100).

BIBLIOGRAPHIE

BOURBAKI (N.), [1] *Intégration*, ch. 1, 2, 3, 4. 2e éd. [2] *Théories spectrales*, ch. 1 et 2, 1re éd.

CASTAING (Ch.), *Quelques applications du théorème de Banach-Dieudonné à l'intégration*, Montpellier (1970), publication n° 67.

CASTAING (Ch.) et VALADIER (M.), « Équations différentielles multivoques dans les espaces localement convexes », *Rev. Inf. Rech. Op.*, 16 (1969), 3-16.

DEBREU (G.) et SCHMEIDLER (D.), *The Radon-Nikodym derivative of a correspondence* (à paraître).

DIXMIER (J.), « Sur certains espaces considérés par M. H. Stone », *Summa Brasil. Math.* 2 (1951), 151-182.

DUNFORD (N.) et SCHWARTZ (J. T.), *Linear operators, Part I*, John Wiley (1964).

HÖRMANDER (L.). « Sur la fonction d'appui des ensembles convexes dans un espace localement convexe », *Arkiv för Math.* 3-12 (1954), 181-186.

IOFFE (A. D.) et TIHOMIROV (V. M.). [1] « Dualité des fonctions convexes et problèmes d'extremum », *Uspehi Mat.* N. 23-6 (1968), 51-116. [2] « Sur la minimisation d'une fonctionnelle intégrale », *Funkt. an. i priloj.* 3-3 (1969), 61-70.

KELLERER (H. G.), « Bemerkung zu einem Satz von H. Richter », *Archiv der Math.* 15 (1964), 204-207.

KLEE (V.) et OLECH (C.), « Characterizations of a class of convex sets », *Math. Scand.* 20-2 (1967), 290-296.

MEYER (P. A.), *Probabilités et potentiel*, Hermann (1966).

MOREAU (J. J.), « Fonctionnelles convexes », *Séminaire sur les équations aux dérivées partielles*, II., Collège de France, 1966-1967.

NEVEU (J.), *Bases mathématiques du calcul des probahilités*, Masson (1964).

OLECH (C.), [1] « Extremal solutions of a control system », *J. of Diff. Eq.*, 2-1 (1966), 74-101. [2] « Existence theorems for optimal problems with vector-valued cost function », *Trans. A.M.S.* 136 (1969), 159-180. [3] « Existence theorems for optimal control problems involving multiple integrals », *J. of Diff. Eq.* 6 (1969), 512-526.

PALLU DE LA BARRIÈRE (R.), *Cours d'Analyse Convexe (cours oral)*, Paris, 1970.

ROCKAFELLAR (R. T.), [1] « Integrals which are convex functionals ». *Pacific, J. Math.* 24-3 (1968), 525-539. [2] « Measurable dependance of convex sets and functions on parameters », *J. Math. An. Appl.* 28-1 (1969), 4-25.

VALADIER (M.), « Multi-applications mesurables à valeurs convexes compactes », *J. Maths. pures et appl.* (à paraître).

Remarque ajoutée en épreuve. Signalons l'article de D. Schmeidler : « Fatou's lemma in several dimensions » *Proc. A.M.S.* 24-2 (1970) 300-306. Le coroll. 3 p. 305 est à rapprocher de la conséquence suivante de notre théorème 5 : $\Gamma\mu$ contient les points extrémaux de son adhérence.