REVUE FRANÇAISE D'INFORMATIQUE ET DE RECHERCHE OPÉRATIONNELLE. SÉRIE ROUGE

MICHEL FLIESS

Transductions algébriques

Revue française d'informatique et de recherche opérationnelle. Série rouge, tome 4, nº R1 (1970), p. 109-125

<http://www.numdam.org/item?id=M2AN_1970__4_1_109_0>

R.I.R.O.
(4e année, N° R-1, 1970, p. 109-125)

TRANSDUCTIONS ALGEBRIQUES

par Michel FLIESS (1)

Résumé. — *La bijection entre les transductions d'un monoïde libre X^* dans un autre Y^* et les parties du monoïde produit $X^* \otimes Y^*$ nous permet de montrer que la théorie des transductions est une conséquence simple de concepts généraux tels ceux de parties reconnaissables, rationnelles et algébriques et des propriétés de leurs intersections. Nous prouvons que les transductions algébriques sont effectuées par les transducteurs à mémoire en pile. Nous donnons de nombreux exemples.*

PLAN :

NOTATION

On appelle X^* le monoïde libre engendré par un ensemble non vide X, appelé « alphabet », qui, dans ce travail, est toujours fini. Le produit de concaténation est noté multiplicativement. L'élément neutre de X^*, c'est-à-dire le *mot vide*, est noté « 1 ».

(1) Institut de Programmation, Faculté des Sciences de Paris.

INTRODUCTION

Les transductions sont des applications d'un monoïde libre dans l'ensemble des parties d'un autre. Elles sont apparues dès le début de la théorie des automates comme étant effectuées par des automates finis auxquels on avait ajouté une « sortie » (voir, par exemple, les machines dites de Moore ou de Mealy, cf. [10]). Le terme de transduction et la première formalisation mathématique sont dus à Schützenberger [18].

Notre but, dans cet article, est de systématiser le point de vue d'Elgot et Mezei [4] en considérant toute transduction de X^* dans Y^* comme une partie du monoïde produit $X^* \otimes Y^*$.

La classification en transductions rationnelles et algébriques, les propriétés de compositions et des images des langages rationnels et algébriques apparaissent alors comme des conséquences simples de concepts et de théorèmes généraux dus à Eilenberg [3], [4]. Les transductions rationnelles ayant déjà été étudiées (Elgot et Mezei [5], Nivat [14]), nous nous intéressons plus particulièrement aux transductions algébriques dont, notamment, nous montrons qu'elles sont effectuées par les transducteurs à mémoire en pile introduits par R. J. Evey et étudiés par Ginsburg et Rose ([7], p. 102, [8], [9]). Nous donnons de nombreux exemples.

Nous apprenons, avant la mise en impression, qu'un article d'Aho et Ullmann [1] contient quelques-uns de nos résultats : les transductions algébriques y figurent sous le nom de « simple syntax directed translations ».

I. PARTIES RECONNAISSABLES, RATIONNELLES ET ALGEBRIQUES

On doit à Eilenberg [3] [4] les définitions suivantes :

Définitions

1) Une partie P d'un monoïde M est dite *reconnaissable* si elle est saturée par une congruence d'index fini. Il existe donc un homomorphisme φ de M dans un monoïde fini tel que $P = \varphi^{-1}\varphi P$.

2) La classe des parties *rationnelles* d'un monoïde M est la plus petite classe de parties de M satisfaisant les conditions suivantes :

(i) la partie vide et tout élément m de M sont des parties rationnelles;

(ii) si P_1 et P_2 sont des parties rationnelles, il en est de même de leur union $P_1 \cup P_2$ et de leur produit P_1P_2;

(iii) si P est une partie rationnelle, il en est de même de P^*, sous-monoïde engendré par P.

Soit $M \otimes M'$ le monoïde produit (direct) des monoïdes M et M'. Un élément de $M \otimes M'$ est noté $m \otimes m'$ où $m \in M$ et $m' \in M'$. On peut énoncer le théorème ([1]) suivant :

Théorème 1

Pour qu'une partie de $M \otimes M'$ soit reconnaissable, il faut et il suffit qu'elle soit union finie de produits $R \otimes R'$ de parties reconnaissables de M et M'.

PREUVE : (i) Soit R (resp. R') une partie reconnaissable de M (resp. M') il existe un homomorphisme φ (resp. φ') de M (resp. M') dans un monoïde fini Φ (resp. Φ'), une partie F (resp. F') de Φ (resp. Φ') tels que :

$$R = \varphi^{-1}F \qquad R' = \varphi'^{-1}F'$$

Soit $\varphi \otimes \varphi'$ l'homomorphisme de $M \otimes M'$ dans $\Phi \otimes \Phi'$ défini par $(\varphi \otimes \varphi')(m \otimes m') = \varphi m \otimes \varphi' m'$ $(m \in M, m' \in M')$. Il vient

$$R \otimes R' = (\varphi \otimes \varphi')^{-1}(F \otimes F').$$

$R \otimes R'$ est donc reconnaissable; toute union finie de parties reconnaissables étant reconnaissable (cf. [2], [3]), la part directe du théorème est démontrée.

(ii) Soit Ψ un homomorphisme de $M \otimes M'$ dans le monoïde fini Φ, F une partie de Φ, R la partie reconnaissable de $M \otimes M'$ définie par $R = \Psi^{-1}F$. Soit u et u' les injections canoniques de M et M' dans $M \otimes M'$. Posons $P = \Psi u M$, $P' = \Psi u' M'$. Il vient $R = \bigcup\limits_{\substack{p \in P, p' \in P' \\ pp' \in F}} (\Psi u)^{-1}p \otimes (\Psi u')^{-1}p'$.

D'où la démonstration de la réciproque.

REMARQUE

On généralise à un produit de plus de deux monoïdes de manière évidente.

On sait que dans tout monoïde libre X^*, il y a identité entre les classes de parties reconnaissables et rationnelles (cf. [7], p. 50, [11], p. 153). Ce n'est pas le cas pour un produit de monoïdes libres. Dans le monoïde commutatif libre à deux générateurs $X^+ = \{ x, y \}^+$, isomorphe au produit de deux monoïdes libres monogènes, la partie rationnelle $\{ x^n y^n \mid n \geqslant 0 \}$, sous-monoïde engendré par xy, n'est pas reconnaissable.

Eilenberg [3], [4] définit aussi dans des ensembles munis de structures algébriques fort générales des parties dites *algébriques*. En particulier, la définition s'applique aux produits d'un nombre fini de monoïdes libres : on obtient les ensembles « context-free » de [12]. Dans un monoïde libre on retrouve les langages « context-free » de Chomsky. On a le théorème fondamental suivant [3] :

(1) Communication personnelle d'Eilenberg qui nous a dit qu'il était dû, ainsi que la démonstration, à Mezei.

Théorème 2

L'intersection d'une partie algébrique (resp. rationnelle) et d'une partie reconnaissable est une partie algébrique (resp. rationnelle).

Terminologie et notation

On appelle *langage* toute partie d'un monoïde libre. Les langages rationnels ont souvent été appelés langages de Kleene, K-langages (cf. [11], [14]), langages ou événements réguliers, « finite-state languages ». Les langages algébriques ont souvent été appelés langages de Chomsky, C-langages (cf. [11], [14]), « context-free languages », « Algol-like languages ».

L'union de parties dans un produit de monoïdes libres sera notée par $\cup$, $+$ ou Σ. Un système engendrant une partie algébrique correspond à une grammaire « context-free » de Chomsky, il sera appelé « système d'équations algébriques ».

II. TRANSDUCTIONS

a) Définition des transductions

Définition

On appelle « *transduction* du monoïde libre X^* dans le monoïde libre Y^* » toute application de X^* dans l'ensemble 2^{Y^*} des parties de Y^*.

A toute transduction τ de X^* dans Y^*, faisons correspondre la partie $\hat{\tau}$ de $X^* \otimes Y^*$ définie par :

$$\hat{\tau} = \{f \otimes \tau f \mid f \in X^*\}$$

Réciproquement, à toute partie $\hat{\tau}$ de $X^* \otimes Y^*$, on peut faire correspondre la transduction τ de X^* dans Y^* telle que

$$\tau f = \{g \mid f \otimes g \in \hat{\tau}\}$$

L'image par τ de tout langage $L \subseteq X^*$ est donnée par

(A) $$\boxed{\tau L = p_y[(L \otimes Y^*) \cap \hat{\tau}]}$$

où p_Y est la projection canonique de $X^* \otimes Y^*$ sur Y^*.

Soit les transductions τ_1 de X^* dans Y^*, τ_2 de Y^* dans Z^*, on définit de manière évidente la composition des deux transductions (cf. [18], [5], [14]).

La partie correspondante $\widehat{\tau_2 \tau_1} \subseteq X^* \otimes Z^*$ est donnée par

(B) $$\boxed{\widehat{\tau_2 \tau_1} = p_{x \otimes z}[(\hat{\tau}_1 \otimes Z^*) \cap (X^* \otimes \hat{\tau}_2)]}$$

où $p_{X \otimes Z}$ est la projection canonique de $X^* \otimes Y^* \otimes Z^*$ sur $X^* \otimes Z^*$. Remarquons que l'application identique de X^* dans X^* est la transduction correspondant à la partie rationnelle de $X^* \otimes X^*$

$$\{f \otimes f \mid f \in X^*\} = \{x \otimes x \mid x \in X\}^*$$

La somme $\tau + \tau'$ des deux transductions τ et τ' de X^* dans Y^* est, par définition, la transduction correspondant à l'union $\hat{\tau} \cup \hat{\tau}'$ des parties $\hat{\tau}$ et $\hat{\tau}'$ de $X^* \otimes Y^*$. La transduction qui à tout langage de X^* fait correspondre la partie vide de Y^* est l'élément neutre du monoïde commutatif additif des transductions de X^* dans Y^*. τ_1 (resp. τ_2) étant une transduction de Z_1^* dans X^* (resp. de Y^* dans Z_2^*), on vérifie que :

$$(\tau + \tau')\tau_1 = \tau\tau_1 + \tau'\tau_1$$
$$\tau_2(\tau + \tau') = \tau_2\tau + \tau_2\tau'$$

On peut résumer ce qui précède de la manière suivante (cf. [13], p. 28) :

Proposition

On peut définir une catégorie semi-additive, dite catégorie des transductions, dont les objets sont les monoïdes libres et les morphismes les transductions.

REMARQUES

(i) On vérifie que dans la catégorie précédente, il n'existe ni produit, ni coproduit (cf. [13], p. 24).

(ii) On aurait pu aussi définir des transductions généralisées comme applications d'un produit $\bigotimes_i X_i^*$ d'un nombre fini de monoïdes libres dans l'ensemble des parties d'un produit $\bigotimes_j Y_j^*$ d'un nombre fini de monoïdes libres. Elles auraient correspondu à des parties de $(\bigotimes_i X_i^*) \otimes (\bigotimes_j Y_j^*)$.

On aurait trouvé des propriétés analogues.

b) Transductions inverses

A une même partie de $X^* \otimes Y^*$, on peut associer une transduction de X^* dans Y^* et une de Y^* dans X^* : les deux transductions sont dites « inverses » l'une de l'autre.

Ce ne sont pas nécessairement des applications réciproques.

EXEMPLE : $X = \{x, y\}$, $\hat{\tau} = (x + y) \otimes y \subset X^* \otimes X^*$.

A $\hat{\tau}$ correspond la transduction τ de X^* dans X^* telle que $\tau x = y$ et la transduction inverse τ' telle que $\tau' y = x + y$.

On voit que $\tau'\tau x = x + y \neq x$.

c) Transductions rationnelles

Définition

Une transduction de X^* dans Y^* est dite rationnelle [1] si et seulement s'il lui correspond une partie rationnelle de $X^* \otimes Y^*$.

Les propriétés générales les plus importantes des transductions sont dues à Elgot et Mezei [4] et à Nivat [14]. Rappelons-les brièvement :

— La transduction inverse [2] d'une transduction rationnelle est rationnelle (immédiat d'après notre définition, voir aussi [14]).

— Pour qu'une transduction τ de X^* dans Y^* soit rationnelle, il faut et il suffit qu'on puisse lui associer un alphabet Z, un langage rationnel I de Z^*, deux homomorphismes φ et Ψ de Z^* dans X^* et Y^* tels que pour tout langage L de X^* l'on ait :

$$\tau L = \Psi(\varphi^{-1} L \cap I) \qquad \text{(cf. [14])}$$

— Les transductions rationnelles forment une sous-catégorie semi-additive de la catégorie des transductions (cf. [5], [14]).

— L'image par une transduction rationnelle d'un langage rationnel (resp. algébrique) est un langage rationnel (resp. algébrique) (cf. [7], p. 92, [14]).

L'automate, que nous appelons *transducteur fini* (« sequential transducer » dans [7]), effectuant une transduction rationnelle a été décrit par Elgot et Mezei [5]. Nivat [14] en a déduit pour une transduction rationnelle τ de X^* dans Y^* l'existence d'une représentation μ de X^* par des matrices $n \times n$, dont les éléments sont des langages rationnels de Y^*, vérifiant $\tau f = (\mu f)_{1,n}$.

III. TRANSDUCTIONS ALGEBRIQUES

a) Propriétés générales

Définition

Une transduction de X^* dans Y^* est dite algébrique si et seulement s'il lui correspond une partie algébrique de $X^* \otimes Y^*$.

REMARQUE

Si card X = card $Y = 1$, $X^* \otimes Y^*$ étant isomorphe à un monoïde commutatif libre, on sait d'après le théorème de Parikh ([16], [7], p. 146) que les classes des parties algébriques et rationnelles de $X^* \otimes Y^*$ sont confondues, donc aussi les classes des transductions algébriques et rationnelles de X^* dans Y^* (cf. [1]).

---

(1) Les transductions rationnelles ont été appelées souvent « sequential transducer mappings » [7], « K-transductions » [14], ou simplement « transductions » [5].

(2) Ce terme ne recouvre pas le même sens que dans [7], p. 95.

Proposition 1

La transduction inverse d'une transduction algébrique est algébrique.

Proposition 2

Pour qu'une transduction τ de X^* dans Y^* soit algébrique, il faut et il suffit qu'on puisse lui associer un alphabet Z, un langage algébrique I de Z^*, deux homomorphismes φ et Ψ de Z^* dans X^* et Y^* tels que, pour tout langage L de X^*, l'on ait :

$$\tau L = \Psi(\varphi^{-1} L \cap I) \qquad \text{(cf. [1])}$$

Preuve

Il suffit de remarquer qu'à toute partie algébrique

$$\hat{\tau} \text{ de } X^* \otimes Y^* (X \cap Y = \emptyset),$$

on peut associer un langage algébrique A du monoïde libre $\{X, Y\}^*$ tel que $\hat{\tau} = \gamma A$ où γ est l'homomorphisme de $\{X, Y\}^*$ sur $X^* \otimes Y^*$ défini par $\gamma x = x \otimes 1$, $\gamma y = 1 \otimes y$.

Soit i_x l'injection canonique de X^* dans $\{X, Y\}^*$, π_y la projection canonique de $\{X, Y\}^*$ sur Y^*, il vient : $\gamma L = \pi_y(i_x^{-1} L \cap A)$.

Réciproquement, soit le langage algébrique I de Z^*, les homomorphismes φ et Ψ de Z^* sur X^* et Y^*, la transduction τ de X^* dans Y^* définie par

$$\tau L = \Psi(\varphi^{-1} L \cap I).$$

Elle correspond à la partie $\{\varphi w \otimes \Psi w \mid w \in I\}$ de $X^* \otimes Y^*$, qui est évidemment algébrique. τ est donc algébrique.

Remarque

Étant donné deux sous-ensembles X_1 et X_2 d'un alphabet X et un sous-ensemble V de X^2, l'ensemble $(X_1 X^* \cap X^* X_2) \backslash X^* V X^*$ est un langage rationnel dit *standard* ([2], [11], p. 147). On appelle *langage algébrique standard* ([2], [11], p. 163) l'intersection d'un langage algébrique de Dyck ([2], [7], p. 110, [11], p. 159, [14]) et d'un langage rationnel standard.

On sait que tout langage algébrique est image homomorphe d'un langage algébrique standard (théorème Chomsky-Schützenberger ([2], [11], p. 164)).

On peut donc choisir dans la proposition précédente un alphabet Z tel que I soit standard.

Proposition 3

(i) La transduction composée d'une transduction rationnelle et d'une transduction algébrique est algébrique.

(ii) La transduction composée de deux transductions algébriques n'est pas nécessairement algébrique.

PREUVE

(i) Soit τ (resp. τ') une transduction rationnelle (resp. algébrique) de X^* dans Y^* (resp. de Y^* dans Z^*). Utilisant les mêmes notations que pour la preuve de la proposition (III a, 1) précédente, on peut associer $\hat{\tau}$ (resp. $\hat{\tau}'$) une partie rationnelle K (resp. algébrique A') de $\{X, Y\}^*$ (resp. $\{Y, Z\}^*$) de sorte que $\hat{\tau} = \gamma K$, $\hat{\tau}' = \gamma' A'$ et $\tau L = \pi_y(i_x^{-1} L \cap K)$, $\tau' L' = \pi_z(i_y^{-1} \cap A')$. Soit $\pi_{x,y}$, $\pi_{y,z}$, $\pi_{x,z}$ les projections canoniques de $\{X, Y, Z\}^*$ sur $\{X, Y\}^*$, $\{Y, Z\}^*$, $\{X, Z\}^*$. Le langage de $\{X, Z\}^* A = \pi_{x,z}\pi_{x,y}^{-1} K \cap \pi_y^{-1} A'$ est algébrique. Soit ω_x et ω_z les projections canoniques de $\{X, Z\}^*$ sur X^* et Y^*; il vient $\tau'\tau L = \omega_z(\omega_x^{-1} L \cap A)$: $\tau'\tau$ est algébrique. La démonstration serait identique avec τ algébrique et τ' rationnelle.

(ii) Soit les alphabets $X = \{x_1, x_2\}$, $Y = \{y_1, y_2\}$, $Z = \{z\}$, τ et τ' les transductions algébriques de X^* dans Y^* et de Y^* dans Z^* correspondant aux parties :

$$\hat{\tau} = \{ x_1^n x_2^n x_1^{n'} \otimes y_1^n y_2^{n'} \mid n, n' \geqslant 1 \}$$

$$\hat{\tau}' = \{ y_1^n y_2^n \otimes z^n \mid n \geqslant 1 \}$$

qui sont composantes des solutions des systèmes d'équations algébriques :

$$\begin{cases} \xi = \xi_1 \xi_2 \\ \xi_1 = x_1 x_2 \otimes y_1 + (x_1 \otimes 1)\xi_1(x_2 \otimes y_1) \\ \xi_2 = x_1 \otimes y_2 + (x_1 \otimes 1)\xi_2(1 \otimes y_2) \end{cases}$$

$$\xi' = y_1 y_2 \otimes z + (y_1 \otimes 1)\xi'(y_2 \otimes z)$$

D'après la formule (I, a) (B)), la partie correspondant à $\tau'\tau$ est

$$\{ x_1^n x_2^n x_1^n \otimes z^n \mid n \geqslant 1 \}$$

elle n'est pas algébrique, sinon sa projection $\{ x_1^n x_2^n x_1^n \mid n \geqslant 1 \}$ serait un langage algébrique, ce qui n'est pas (résultat dû à S. Scheinberg, cf. [7], p. 84).

Proposition 4

(i) L'image par une transduction algébrique d'un langage rationnel est un langage algébrique.

(ii) L'image par une transduction algébrique d'un langage algébrique n'est pas nécessairement un langage algébrique.

PREUVE

(i) C'est une conséquence directe de la formule (II a, (A)) et des théorèmes (I, 1) 2) (on peut aussi utiliser la proposition (III a, 2)).

(ii) $X = \{ x_1, x_2 \}$. Soit le langage algébrique $L = \{ x_1^n x_2^n x_1^{n'} \mid n, n' \geqslant 1 \}$ composante de la solution du système :

$$\begin{cases} \xi = (\xi + \xi_1)x_1 \\ \xi_1 = x_1x_2 + x_1\xi_1x_1 \end{cases}$$

et la transduction algébrique τ de X^* dans X^* correspondant à la partie

$$\hat{\tau} = \{ x_1^{n'} x_2^n x_1^n \otimes x_1^{n'} x_2^n x_1^n \mid n, n' \geqslant 1 \}$$

composante de la solution du système

$$\begin{cases} \xi = \xi_2\xi_1 \\ \xi_1 = x_2x_1 \otimes x_2x_1 + (x_2 \otimes x_2)\xi_1(x_1 \otimes x_1) \\ \xi_2 = x_1 \otimes x_1 + (x_1 \otimes 1)\xi_2(1 \otimes x_1) \end{cases}$$

il vient

$$\tau L = \{ x_1^n x_2^n x_1^n \mid n \geqslant 1 \}$$

Proposition 5

A toute transduction algébrique τ est associé un nombre positif c ayant la propriété suivante : pour tout mot non vide f, tel que $\tau f \neq \varnothing$, il existe un mot g appartenant à τf vérifiant $|g| \leqslant c|f|$ (1) (cf. [1]).

PREUVE

Soit X^+ et Y^+ les monoïdes commutatifs libres engendrés par X et Y, leur produit $X^+ \otimes Y^+$ est aussi un monoïde commutatif libre. Soit α l'homomorphisme canonique de $X^* \otimes Y^*$ sur $X^+ \otimes Y^+$. Soit τ une transduction algébrique de X^* dans Y^*, correspondant à la partie $\hat{\tau}$; $\alpha\hat{\tau}$, en vertu du théorème de Parikh déjà cité, est une partie rationnelle de $X^+ \otimes Y^+$, qui, par définition (cf. § I), est engendré à partir d'une famille fini d'éléments $u \otimes v$ de $X^+ \otimes Y^+$. Distinguons la sous-famille $F = \{ u \otimes v \mid u \neq 1 \}$. Tout nombre $c \geqslant \max \left\{ \frac{|v|}{|u|} \mid u \otimes v \in F \right\}$ répond à la question.

***b*) Exemples**

1. — Étant donné le langage algébrique I de X^*, la transduction de X^* dans X^*, qui à tout langage L associe $L \cap I$, est algébrique (cf. proposition III, *a*), 2)).

2. — L'application miroir m qui à un mot $f = x_{i_1}x_{i_2} \dots x_{i_k}$ associe son image miroir $mf = \tilde{f} = x_{i_k} \dots x_{i_2}x_{i_1}$ est une transduction algébrique de X^*

---

(1) $|f|$ désigne la longueur de f.

dans X^* correspondant à la partie $\hat{m} = \{f \otimes \tilde{f} \mid f \in X^*\}$ qui est solution de l'équation $\xi = 1 + \sum_{x \in X} (x \otimes 1)\xi(1 \otimes x)$.

Elgot et Mezei [5] ont montré que m n'est pas rationnelle. Donnons-en une autre démonstration. Si m était rationnelle, $\hat{m}$ serait une partie rationnelle de $X^* \otimes X^*$ et $\{f^2 \mid f \in X^*\}$ un langage *quasi-rationnel* (1), donc algébrique, ce qui n'est pas (résultat dû à Chomsky, cf. [7], p. 168, exercice n° 8). On vérifie aisément que l'image par m d'un langage rationnel (resp. algébrique) est un langage rationnel (resp. algébrique) (cf. [11], p. 85 et p. 114).

3. — Traduisons toute expression bien formée du calcul des implications à une variable en notation polonaise sans parenthèses en une expression parenthésée ordinaire. Ainsi, l'expression polonaise $++\ a\, b\, c$, où a, b, c représentent des nombres quelconques, devient $(a + b + c)$. Montrons que, moyennant un formalisme adéquat, nous avons affaire à une transduction algébrique (cf. [15]).

L'ensemble des expressions polonaises bien formées constitue le langage algébrique solution de l'équation $\xi = x_0 + x_1\xi^2$ (cf. [2]).

L'ensemble des expressions parenthésées ordinaires bien formées est le langage algébrique solution de $\xi = y_0 + y_2\xi y_1\xi y_2'$.

x_0 et y_0 représentent la variable, x_1 et y_1 le signe $+$, y_2 et y_2' les parenthèses ouvrante et fermante. La transduction algébrique correspondant à la partie

$$\hat{\tau} \subseteq \{x_0, x_1\}^* \otimes \{y_0, y_1, y_2, y_2'\}^*$$

solution de $\xi = x_0 \otimes y_0 + (x_1 \otimes y_2)\xi(1 \otimes y_1)\xi(1 \otimes y_2')$ répond à la question.

4. — On décrit, sans donner de démonstrations, un exemple remarquable dû à Perrot [17]. Soit les alphabets X_i $(i = 1, ..., n)$ tels que Card $X_i = 2$, Card $\bigcap_{i=1}^{n} X_i \geqslant 1$. Posons $X = \bigcup_{i=1}^{n} X_i$, $\bar{X} = \{\bar{x} \mid x \in X\}$ tel que

$$X \cap \bar{X} = \varnothing, Z = X \cup \bar{X}.$$

Soit

— D'^* le langage de Dyck restreint de Z^* associé aux relations

$$\{x\bar{x} = 1 \mid x \in X\} \qquad \text{(cf. [11], p. 160, [14])}$$

(on peut aussi utiliser le langage de Dyck D^*). Soit :

— φ et $\bar{\varphi}$ les homomorphismes de Z^* sur X^* définis par

$$\varphi x = x, \qquad \varphi\bar{x} = 1 \qquad \text{et} \qquad \bar{\varphi}x = 1, \qquad \varphi\bar{x} = x$$

(1) La classe des langages quasi-rationnels, introduite par Eilenberg, est la plus petite famille de parties de X^* contenant la partie vide, X, fermée pour les opérations d'union, de produit, d'étoile (c'est-à-dire : si P est quasi-rationnelle, il en est de même du sous-monoïde P^* engendré par P), et pour le produit « crochet » d'une partie quasi-rationnelle P de X^* par une partie rationnelle Q de $X^* \otimes X^*$ ainsi défini $\{gf\tilde{g} \mid f \in P \text{ et } g \otimes g' \in Q\}$. On montre que tout langage quasi-rationnel est algébrique et que tout langage algébrique borné (cf. [7], p. 155) est quasi-rationnel.

— α l'homomorphisme canonique de X^* sur le monoïde commutatif libre X^+ engendré par X. L étant un langage de X^*, $\alpha^{-1}\alpha L$ est la *fermeture commutative* de L.

— γ la transduction algébrique de X^* dans X^* définie par

$$\gamma L = \varphi(\varphi^{-1}L \cap D'^*).$$

On montre que γ jouit des propriétés suivantes :

— $\gamma L \subseteq \alpha^{-1}\alpha L$

— H étant un langage de X^*, *produit de Hurwitz* (1) des parties H_i de $X_i^*(i = 1, ..., n)$, on a $\gamma H = \alpha^{-1}\alpha H$

De même, soit $X = \{ x, y, z \}$, $\bar{X} = \{ \bar{x}, \bar{y}, \bar{z} \}$, $Z = X \cup \bar{X}$, D'^* le langage de Dyck restreint de Z^*, φ_1 et φ_2 les homomorphismes de Z^* sur X^* définis de même que plus haut. La transduction algébrique $\gamma_1 L = \varphi_1(\varphi_1^{-1}L \cap D_1'^*)$ possède des propriétés analogues :

— $\gamma_1 L \subseteq \alpha^{-1}\alpha L$

— $H_1 \subseteq X^*$ étant le produit de Hurwitz de parties de $\{ x, y \}^*$, $\{ y, z \}^*$, $\{ z, x \}^*$ on a $\gamma_1 H_1 = \alpha^{-1}\alpha H_1$

5. — Lorsque card $X = 2$, on vient de voir, dans l'exemple précédent, que l'application qui à tout langage de X associe sa fermeture commutative est une transduction algébrique qui possède la propriété suivante (Ginsburg [7], p. 157, exercice n° 4) : l'image d'un langage algébrique est un langage algébrique. Il n'en est plus de même lorsque card $X \geqslant 3$.

En effet, soit $X = \{ x, y, z \}$, $K = \{ xyz \}^*$ un langage rationnel; l'intersection de la fermeture commutative $\alpha^{-1}\alpha K$ avec le langage rationnel $x^*y^*z^*$ est le langage non algébrique $\{ x^n y^n z^n \mid n \geqslant 0 \}$: $\alpha^{-1}\alpha K$ n'est pas algébrique.

6. *Transductions algébrico-rationnelles :*

On appelle transduction *algébrico-rationnelle* toute transduction τ de X^* dans Y^* telle qu'il existe une représentation μ de X^* par des matrices $n \times n$ (n est la « dimension » de μ) à éléments dans le semi-anneau (2) des langages algébriques de Y^* et vérifiant $\tau f = (\mu f)_{1,n}$. Ces transductions ont été introduites par Nivat [14] qui les appelle *C-transductions*, leur classe comprend les transductions rationnelles.

---

(1) Le produit de Hurwitz de deux mots f et g est appelé « set of shuffles » dans la littérature américaine (cf. [7], p. 108); c'est la partie de X^* définie par

$$\{ f_1 g_1 \dots f_k g_k \mid f_1, g_1, \dots, g_k \in X^*; f = f_1 \dots f_k; g = g_1 \dots g_k \}.$$

Schützenberger a noté qu'on généralise ainsi une notion classique en Analyse due à A. Hurwitz et S. Pincherle (voir M. Fliess, C. R. Acad. Sci. Paris, 268, 1969, série A, p. 535-537).

(2) L'union $A_1 + A_2$, le produit $A_1 A_2$ de deux parties algébriques sont des parties algébriques (cf. [11], p. 84). Le produit étant distributif par rapport à l'union, on obtient la structure de semi-anneau.

— A τ correspond la partie $\hat{\tau}$ composante $(1, n)$ de la solution du système suivant, écrit sous forme matricielle :

$$(\xi_{ij}) = \left(\sum_{x \in X} x \otimes \mu x \right) (\xi_{ij})$$

(ξ_{ij}) est une matrice $n \times n$ dont les éléments sont n^2 inconnues.

$x \otimes \mu x$ est la matrice $(x \otimes L_{x,k,l})$ où $L_{x,k,l}$ est le langage algébrique d'indices (k, l) de μx. On sait (cf. [19]), le système étant linéaire gauche, que la solution $(1, n)$ est obtenue à partir des parties algébriques $x \otimes L_{x,k,l}$ de $X^* \otimes Y^*$ par un nombre fini d'unions de produits et d'opérations étoiles (1) : $\hat{\tau}$ est donc algébrique ainsi que la transduction τ.

On doit à Nivat [14] le résultat suivant :

Proposition 1

L'image par une transduction algébrico-rationnelle d'un langage algébrique est un langage algébrique.

Soit τ_1 et τ_2 deux transductions algébrico-rationnelles de X^* dans Y^* auxquelles sont associées les représentations μ_1 et μ_2 de dimensions n_1 et n_2. D'après une construction due à Schützenberger [19] on sait qu'il existe une représentation μ de dimension n telle que, pour tout $f \in X^*$:

$$(\mu f)_{1,n} = (\mu_1 f)_{1,n_1} + (\mu_2 f)_{1,n_2}.$$

Cela définit une transduction algébrico-rationnelle τ telle que $\tau = \tau_1 + \tau_2$.

Soit τ et τ' des transductions algébrico-rationnelles de X^* dans Y^* et de Y^* dans Z^*, auxquelles sont associées les représentations μ et μ' de dimensions n et n'. ν est la représentation de X^* par des matrices $nn' \times nn'$ définie par :

$$(\nu x)_{ii',jj'} = \{ (\mu g)_{i',j'} \mid g \in (\mu x)_{i,j} \} \qquad (\forall\, x \in X)$$

où $1 \leqslant i, j \leqslant n$, $1 \leqslant i', j' \leqslant n'$.

Les éléments en sont des langages algébriques d'après une démonstration identique à celle de la proposition 1 précédente. Il vient $\tau'\tau f = (\nu f)_{1,nn'}$. On peut donc énoncer :

Proposition 2

Les transductions algébrico-rationnelles forment une sous-catégorie semi-additive de la catégorie des transductions.

REMARQUE : L'automate effectuant une transduction algébrico-rationnelle a été décrit par l'auteur en [6].

---

(1) Si A est une partie algébrique, le sous-monoïde A^* engendré par A est aussi une partie algébrique (cf. [11], p. 84).

c) **Transducteurs à mémoire en pile**

Les automates à mémoire en pile sont, on le sait, associés à l'analyse des langages algébriques. Rappelons-en la définition donnée par Ginsburg ([7], p. 59) et Nivat [14] :

Définition 1

Un *automate à mémoire en pile* $(X, \Gamma, \gamma_0, Q, q_0, Q_F, \delta)$ (a.m.p. en abrégé, « pushdown automaton » dans la littérature américaine) est l'objet défini par la donnée :

— d'un alphabet d'entrée X et d'un alphabet de pile Γ où l'on a distingué un symbole initial γ_0;

— d'un ensemble fini Q d'états où l'on a distingué l'état initial q_0 et le sous-ensemble Q_F d'états finaux;

— d'une application δ de $Q \times \{ X \cup \{ 1 \} \} \times \Gamma$ dans les parties finies de $Q \times \Gamma^*$.

On appelle « configuration » de l'a.m.p. tout triple (q, f, w) où $p \in Q$, $f \in X^*$, $w \in \Gamma^*$. On note $\vdash$ la relation suivante :

$$(q_1, f_1, w) \vdash (q_2, f_2, w_2) \Leftrightarrow f_1 = uf'_1(u \in X_i\, u \{ 1 \}), f_2 = f'_1$$

$$w_1 = w'_1\gamma(\gamma \in \Gamma),\ w_2 = w'_1 w'_2,\ (q_2, w'_2) \in \delta(q_1, u_1, \gamma)$$

Soit $\overset{*}{\vdash}$ la fermeture transitive de la relation $\vdash$. Le langage L est dit analysé par l'a.m.p. si et seulement si :

$$f \in L \Leftrightarrow (q_0, f, \gamma_0) \overset{*}{\vdash} (q_f, 1, w) \qquad \text{où} \qquad q_f \in Q_F$$

Ajoutant une « sortie » aux a.m.p., R. J. Evey a introduit les transducteurs à mémoire en pile, dont on trouve la définition et des propriétés dans ([7], p. 102, [8], [9]).

Définition 2

Un *transducteur à mémoire en pile* $(X, Y, \Gamma, \gamma_0, Q, q_0, Q, \eta)$ (t.m.p. en abrégé, « pushdown transducer » dans la littérature américaine) est constituée par la donnée :

— des alphabets d'entrée X, de sortie Y, de pile Γ où l'on a distingué le symbole initial γ_0;

— d'un ensemble fini Q d'états où l'on a distingué l'état initial q_0 et le sous-ensemble Q_F d'états finaux;

— d'une application η de $Q \times \{ X \cup \{ 1 \} \} \times \Gamma$ dans les parties finies de $Q \times \Gamma^* \times Y^*$.

On appelle « configuration » du t.m.p. tout quadruple (q, f, w, g) où $q \in Q$, $f \in X^*$, $w \in \Gamma^*$, $g \in Y^*$. On note $\models$ la relation suivante :

$$(q_1, f_1, w_1, g_1) \models (q_2, f_2, w_2, g_2)$$

$$\Leftrightarrow f_1 = {}_u f_1' \qquad (u \in X \cup \{1\}), \qquad f_2 = f_1', w_1 = w_1'\gamma (\gamma \in \Gamma),$$

$$g_2 = g_1 g_2' \qquad (q_2, w_2', g_2') \in \eta\,(q_1, u, \gamma)$$

Soit $\overset{*}{\models}$ la fermeture transitive de la relation $\models$. A tout langage L de X^*, le t.m.p. fait correspondre le langage de Y^* défini par

$$\{ g \in Y^* \mid (q_0, f, \gamma_0, 1) \models (q_f, 1, w, g), \qquad f \in L, \qquad q_f \in Q_F \}$$

Proposition

L'application effectuée par un transducteur à mémoire en pile est une transduction algébrique. Réciproquement, toute transduction algébrique peut être effectuée par un transducteur à mémoire en pile (cf. [1]).

Preuve

(i) Au t.m.p. décrit dans la définition III c, 2) associons les ensembles P et S des mots imprimés sur la pile et la bande de sortie.

$$P = \{ w \in \Gamma^* \mid \exists\, q, q' \in Q, \exists\, u \in X \cup \{1\}, \exists\, \gamma \in \Gamma, \exists\, g \in Y^* : (q', w, g) \in \eta(q, u, \gamma) \}$$

$$S = \{ g \in Y^* \mid \exists\, q, q' \in Q, \exists\, u \in X \cup \{1\}, \exists\, \gamma \in \Gamma, \exists\, w \in \Gamma^* : (q', w, g) \in \eta(q, u, \gamma) \}$$

— l'a.m.p. donné par l'alphabet d'entrée

$$Z = Q \times (X \cup \{e\}) \times \Gamma \times Q \times P \times S$$

où e est un nouveau symbole, l'alphabet de pile Γ où l'on a distingué le symbole initial γ_0, l'ensemble d'états $Q' = Q \cup \{q_p\}$ où q_p est un nouvel état et où l'on a distingué l'état initial q_0 et les états finaux Q_F l'application δ de $Q' \times (Z \cup \{1\}) \times \Gamma$ dans $Q' \times \Gamma^*$ définie par :

$$\delta(q, 1, \gamma) = (q_p, 1)$$

$$\delta[q', (q_1, u, \gamma, q_2, w, g), \gamma'] = (q_p, 1) \qquad \text{si} \quad q' \neq q_1 \quad \text{ou} \quad \gamma' \neq \gamma$$

$$\delta[q_1, (q_1, x, \gamma, q_2, w, g), \gamma] = \begin{cases} (q_2, w) & \text{si} \quad (q_2, w, g) \in \eta(q_1, x, \gamma) \\ (q_p, 1) & \text{si} \quad (q_2, w, g) \notin \eta(q_1, x, \gamma) \end{cases}$$

$$\delta[q_1, (q_1, e, \gamma, q_2, w, g), \gamma] = \begin{cases} (q_2, w) & \text{si} \quad (q_2, w, g) \in \eta(q_1, 1, \gamma) \\ (q_p, 1) & \text{si} \quad (q_2, w, g) \notin \eta(q_1, 1, \gamma) \end{cases}$$

L'a.m.p. analyse le langage algébrique A de Z^*. Soit φ et Ψ les homomorphismes de Z^* dans X^* et Y^* définis par :

$$\varphi(q_1, x, \gamma, q_2, w, g) = x \quad , \quad \varphi(q_1, e, \gamma, q_2, w, g) = 1$$
$$\Psi(q_1, x, q_2, w, g) = \Psi(q_1, e, q_2, w, g) = g$$

L'application de X^* dans 2^{Y^*} effectué par le t.m.p. n'est autre que la transduction algébrique qui à $L \subseteq X^*$ associe $\Psi(\varphi^{-1}L \cap A)$ (cf. proposition III, *a*, 2).

(ii) Réciproquement, soit les trois alphabets X, Y, Z, le langage algébrique I de Z^*, les homomorphismes φ et Ψ de Z^* dans X^* et Y^* qui définissent la transduction algébrique τ de X^* dans Y^* : $\tau L = \Psi(\varphi^{-1}L \cap I)$.

φ^{-1} et Ψ sont des transductions rationnelles de X^* dans Z^* et de Z^* dans X correspondant aux parties rationnelles $\{ z \otimes \varphi z \mid z \in Z \}^*$ et $\{ z \otimes \Psi z \mid z \in Z \}^*$. On peut leur associer les transducteurs finis (1)

$$(S, s_I, s_F, X, Z, E) \text{ et } (S', s'_I, s'_F, Z, Y, E').$$

Le langage algébrique I est analysé par l'a.m.p. $(Z, \Gamma, \gamma_0, Q', q'_0, Q'_F, \delta)$.

On vérifie que la transduction algébrique τ est effectuée par le t.m.p. $(X, Y, \Gamma, \gamma_0, Q, q_0, Q_F, \eta)$ donnée par :

$$Q = S \times Q' \times S' \quad , \quad q_0 = (s_0, q'_0, s'_0) \quad , \quad Q_F = \{ s_F \} \times Q'_F \times \{ s'_F \}$$

L'application η de $Q \times \{ X \cup \{ 1 \} \} \times \Gamma$ dans les parties finies de $Q \times \Gamma^* \times Y^*$ est définie par $(q_2, w, g) \in \eta(q_1, u, \gamma)$ où l'on a posé $q_j = (s_j, q'_j, s'_j)$ $(j = 1, 2)$, si et seulement si :

— il existe une suite de k quadruples de $E\,(s^{(i)}, u^{(i)}, v^{(i)}, \bar{s}^{(i)})$ vérifiant $\bar{s}^{(i+1)} = s^{(i)}, s^{(1)} = s_I, \bar{s}^{(k)} = s_F, u = u^{(1)} \dots u^{(k)}$,

$$v = v^{(1)} \dots v^{(k)}$$

— $$(q'_2, w) \in \delta(q'_1, v, \gamma)$$

— il existe une suite de k' quadruples de $E'(s'^{(i)}, v'^{(i)}, w^{(i)}, \bar{s}'^{(i)})$ vérifiant $\bar{s}'^{(i+1)} = s'^{(i)}, s'^{(1)} = s'_I, \bar{s}'^{(k)} = s'_F$,

$$v = v'^{(1)} \dots v'^{(k)}, \qquad g = w^{(1)} \dots w^{(k)}$$

---

(1) Rappelons (cf. § II, [5], [7], p. 91, [14]) qu'un transducteur fini est l'objet (Q, q_I, q_F, X, Y, E) défini par la donnée :
— d'un ensemble fini Q d'états où l'on a distingué un état initial q_I et un état final q_F ;
— d'un ensemble fini E de quadruples $(q, u, v, q') \in Q \times \{ X \cup \{ 1 \} \} \times \{ Y \cup \{ 1 \} \} \times Q$
$g \in Y^*$ est dit appartenir à l'image de $f \in X^*$ donné par le transducteur si et seulement s'il existe une suite dite « admissible » de n quadruples (q_i, u_i, v_i, q'_i) vérifiant $q'_i = q_{i+1}$, $q_1 = q_I$, $q_n = q_F$, $f = u_1 \dots u_n$, $g = v_1 \dots v_n$.

REMARQUE

Au t.m.p. $(X, Y, \Gamma, \gamma_0, Q, q_0, Q_F, \eta)$ associons l'a.m.p. $(X, \Gamma, \gamma_0, Q, q_0, Q_F, \delta)$ où

$$\delta(q, u, \gamma) = \{ (q', w) \in Q \times \Gamma \mid \exists g \in Y^* : (q', w, g) \in \eta (q, u, \gamma) \}$$

Soit $\hat{\tau}$ la partie algébrique de $X^* \otimes Y^*$ correspondant à la transduction algébrique effectuée par le t.m.p. L'a.m.p. analyse le langage algébrique A de X^* qui n'est autre que la projection $p_x\hat{\tau}$ de $\hat{\tau}$ sur X^*. L'image de A donné par le t.m.p. est, en vertu de la formule II *a*), (A), le langage algébrique $B = p_y\hat{\tau}$, projection de $\hat{\tau}$ sur Y^*. Ainsi s'éclaire de manière simple le théorème 3.2 *a* de [9].

IV. TRANSDUCTIONS ET SERIES FORMELLES

En [6], l'auteur a montré que la théorie des transductions pouvait être généralisée et appliquée à la théorie des séries formelles en variables non commutatives.

Des tentatives en ce genre ont déjà été faites par Schützenberger (cf. [2]), Shamir [20], et surtout Nivat [14] qui utilise systématiquement la représentation matricielle des transductions rationnelles.

Donnons un très bref aperçu de notre formalisme. Soit A un anneau unitaire commutatif (A pourrait être aussi un semi-anneau), $A \ll X \gg$ l'A-algèbre des séries formelles en les variables non commutatives X. Une transduction τ de $A \ll X \gg$ dans $A \ll Y \gg$ est un homomorphisme partiel (i.e. non partout défini) de A-modules de $A \ll X \gg$ dans $A \ll Y \gg$. On lui fait correspondre une série $\hat{\tau}$ de $A \ll X \otimes Y \gg$ en les variables X et Y où les variables $x \in X$ et $y \in Y$ commutent, a étant une série de $A \ll X \gg$, il vient :

$$\tau a = p_y[(a \otimes_A \operatorname{car} Y^*) \boxdot \hat{\tau}]$$

où car $Y^* \in A \ll Y \gg$ est la série caractéristique de Y^*, $a \otimes_A \operatorname{car} Y^*$ est la série de $A \ll A \otimes Y \gg$, produit tensoriel des séries a et car Y^*; $\boxdot$ indique que l'on effectue le produit de Hadamard; p_y est la projection canonique, non partout définie, de $A \ll X \otimes Y \gg$ sur $A \ll Y \gg$.

On définit les séries rationnelles et algébriques de $A \ll X \otimes Y \gg$ de la même manière que dans $A \ll X \gg$ (cf. [2], [19], [20], [14]).

L'utilisation de techniques matricielles analogues à celles développées par Schützenberger en [19] permet d'étudier la sous A-algèbre de $A \ll X \otimes Y \gg$ $A^{\mathrm{Rat}} \ll X \gg \otimes_A A^{\mathrm{Rat}} \ll Y \gg$, produit tensoriel des sous-A-algèbres de séries rationnelles $A^{\mathrm{Rat}} \ll X \gg$ et $A^{\mathrm{Rat}} \ll Y \gg$ et de montrer que les propriétés des transductions, identiques à celles obtenues en théorie des langages, sont de simples conséquences des propriétés du produit de Hadamard.

BIBLIOGRAPHIE

[1] A. V. AHO et J. D. ULLMAN, *Properties of syntax directed translations*, J. Comput. System Sci., 3, 1969, p. 319-334.

[2] N. CHOMSKY et M. P. SCHÜTZENBERGER, *The algebraic theory of context-free languages*, in « Computer Programming and Formal Systems » (édit. P. Braffort et D. Hirschberg), p. 118-161, North Holland, Amsterdam, 1963.

[3] S. EILENBERG, *Algèbre catégorique et théorie des automates*, cours donné à Paris à l'Institut H. Poincaré en 1967, rédigé par R. Roussarie, miméographié.

[4] S. EILENBERG et J. B. WRIGHT, *Automata in general algebras*, Inform. Control, 11, 1967, p. 452-470.

[5] C. C. ELGOT et J. E. MEZEI, *On relations defined by generalized finite automata*, IBM J. Res. Develop., 9, 1965, p. 47-68.

[6] M. FLIESS, *Transductions et séries formelles*, thèse de 3e cycle, Faculté des Sciences de Paris, 1969.

[7] S. GINSBURG, *The mathematical theory of context-free languages*, McGraw-Hill, New York, 1966.

[8] S. GINSBURG et G. F. ROSE, *Preservation of languages by transducers*, Inform. Control, 9, 1966, p. 153-170.

[9] S. GINSBURG et G. F. ROSE, *A note on preservation of languages by transducers*, Inform. Control, 12, 1968, p. 549-552.

[10] W. M. GLUSCHKOW, *Theorie der abstrakten Automaten*, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1963 (Übersetzung aus dem Russischen).

[11] M. GROSS et A. LENTIN, *Notions sur les grammaires formelles*, Gauthier-Villars, Paris, 1967.

[12] M. A. HARRISON et O. H. IBARRA, *Multi-tape and multi-head pushdown automata*, Inform. Control, 13, 1968, p. 433-470.

[13] B. MITCHELL, *Theory of categories*, Academic Press, New York, 1965.

[14] M. NIVAT, *Transductions des langages de Chomsky*, Annales de l'Institut Fourier, 18, n° 1, 1968, p. 339-455.

[15] A. G. ŒTTINGER, *Automatic syntactic analysis and the pushdown store*, in « Structure of language and its mathematical aspects », Proc. 12th Symposium in Appl. Math., p. 104-129, Amer. Math. Soc., Providence (R.I.), 1961.

[16] R. J. PARIKH, *On context-free languages*, J. Assoc. Comput. Mach., 13, 1966, p. 570-581.

[17] J. F. PERROT, *Sur la fermeture commutative des C-langages*, C. R. Acad. Sci. Paris, 265, 1967, série A, p. 597-600.

[18] M. P. SCHÜTZENBERGER, *A remark on finite transducers*, Inform. Control, 4, 1961, p. 185-196.

[19] M. P. SCHÜTZENBERGER, *On a theorem of R. Jungen*, Proc. Amer. Math. Soc., 13, 1962, p. 885-890.

[20] E. SHAMIR, *A representation theorem for algebraic and context-free power series in non commuting variables*, Inform. Control, 11, 1967, p. 239-254.

Dans l'article suivant, le lecteur pourra trouver une démonstration du théorème 2 du § I et des compléments au § IV :

M. FLIESS, *Séries reconnaissables, rationnelles et algébriques*, Bulletin des Sciences mathématiques, 95, 1971 (à paraître).