REVUE FRANÇAISE D'INFORMATIQUE ET DE RECHERCHE OPÉRATIONNELLE. SÉRIE ROUGE

CHEIN

Recherche des graphes des matrices de Coxeter hyperboliques d'ordre $\leqslant 10$

Revue française d'informatique et de recherche opérationnelle. Série rouge, tome 3, nº R3 (1969), p. 3-16

<http://www.numdam.org/item?id=M2AN_1969__3_3_3_0>

R.I.R.O.
(3e année, N° R-3, 1969, p. 3-16)

RECHERCHE DES GRAPHES DES MATRICES DE COXETER HYPERBOLIQUES D'ORDRE $\leqslant$ 10

par M. CHEIN (1)

Résumé. — *Un algorithme permettant d'automatiser la recherche des graphes des matrices de Coxeter hyperboliques d'ordre $\leqslant$ 10 est présenté dans cet article. Cet algorithme a permis d'obtenir un graphe non encore obtenu manuellement et de vérifier que les graphes obtenus manuellement étaient corrects.*

Cette étude montre l'intérêt que peut avoir l'ordinateur dans des recherches en mathématiques pures.

Note : Cet article a pour origine un problème que M. Koszul expose dans l'introduction. Notre seule intervention a été de trouver des algorithmes programmables pour que, la recherche des graphes des matrices de Coxeter, comportant de trop gros risques d'omission à la main, puisse être automatisée.

INTRODUCTION

Soit S un ensemble fini. On appelle matrice de Coxeter sur S une matrice carrée $p(s, s')$, $(s, s' \in S)$, dont les coefficients sont, soit des entiers > 0, soit ∞ et qui vérifie les conditions suivantes :

a) $p(s, s') = p(s', s)$ quels que soient $s, s' \in S$.

b) $p(s, s) = 1$ pour tout $s \in S$.

c) $p(s, s') > 1$ si $s \neq s'$.

Une matrice de Coxeter se représente par un graphe qui se définit comme suit : Soit A l'ensemble des parties $\{ s, s' \} \subset S$ telles que $p(s, s') > 2$. Les

(1) Attaché de recherches au C.N.R.S. Institut de Math. Appli. de Grenoble.

sommets sont les éléments de S. Les arêtes sont les éléments de A, les extrémités de l'arête $\{ s, s' \}$ étant les sommets s et s'. Pour que le graphe détermine la matrice, on affecte l'arête $\{ s, s' \}$ du nombre $p(s, s')$ lorsque $p(s, s') > 3$.

Une matrice de Coxeter est dite irréductible lorsque son graphe est connexe. Toute sous-matrice principale (c'est-à-dire obtenue en choisissant une partie de l'ensemble des indices) d'une matrice de Coxeter est une matrice de Coxeter.

Soit $p(s, s')$ une matrice de Coxeter. On appelle groupe de Coxeter de cette matrice le groupe quotient du groupe libre engendré par S par le sous-groupe invariant engendré par les éléments $(ss')^{p(s,s')}(p(s, s') < \infty)$. On appelle matrice des cosinus de la matrice $p(s, s')$ la matrice $-\cos \dfrac{\pi}{p(s, s')}$.

Pour que le groupe de Coxeter soit un groupe fini, il faut et il suffit que la matrice des cosinus soit définie positive (théorème de E. Witt). Les matrices de Coxeter irréductibles dont la matrice des cosinus est définie positive ont pour graphes les graphes de la liste I (due à H.S.M. Coxeter). Les matrices de Coxeter irréductibles dont la matrice des cosinus est positive dégénérée ont pour graphe les graphes de la liste II (due à H.S.M. Coxeter). Les groupes de Coxeter correspondant sont les groupes de Weyl affines; si n est le nombre des éléments de S, la matrice des cosinus est de rang $n - 1$.

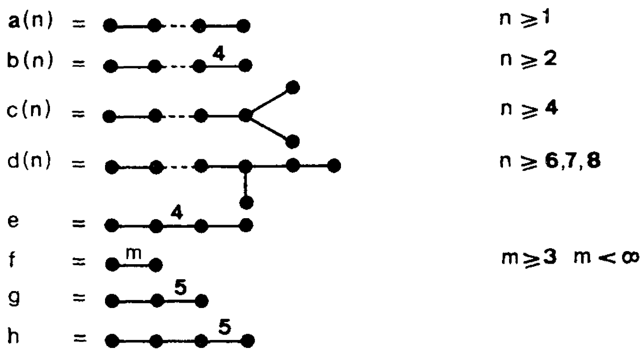
Une matrice de Coxeter est appelée une matrice hyperbolique si sa matrice des cosinus est de signature $(n - 1,1)$ et si toute sous-matrice principale de la matrice des cosinus d'ordre $n - 1$ est positive. Une matrice de Coxeter hyperbolique est dite compacte si toute sous-matrice principale d'ordre $n - 1$ de la matrice des cosinus est définie positive. Les groupes de Coxeter associés à une matrice de Coxeter hyperbolique d'ordre n s'identifient canoniquement à des sous-groupes discrets du groupe des isométries d'un espace hyperbolique de dimension $n - 1$, l'espace des trajectoires ayant une mesure finie. Pour qu'une matrice hyperbolique soit compacte, il faut et il suffit que, dans cette action, l'espace des trajectoires soit compact. Les graphes des matrices hyperboliques compactes irréductibles ont été déterminés par Lanner. Pour qu'un graphe connexe soit le graphe d'une matrice de Coxeter hyperbolique (resp. hyperbolique compacte) il faut et il suffit que :

1) ce ne soit pas un graphe des listes I et II,

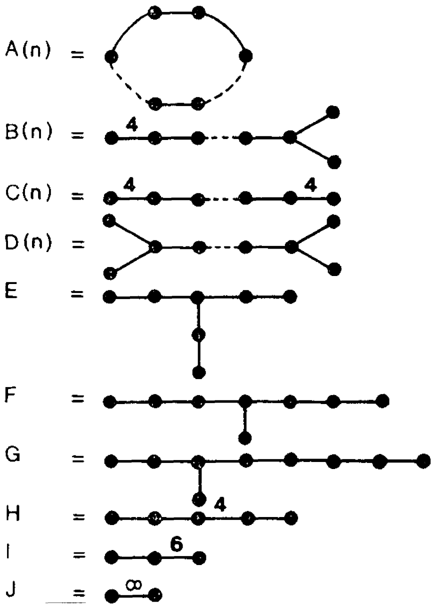
2) que pour tout sommet s, le graphe obtenu en supprimant le sommet s et les arêtes qui aboutissent à s ait pour composantes connexes des graphes appartenant aux listes I et II (resp. I).

Les graphes des matrices de Coxeter hyperboliques irréductibles sont au plus d'ordre 10 (cf. E. Vinberg).

Liste I (*L*1)



Liste II (*L*2)



1. PRINCIPE DE LA RESOLUTION

Il s'agit d'écrire un programme donnant toutes les matrices hyperboliques d'ordre $\leqslant 10$. Nous avons traité ce problème exclusivement en termes de graphes. Le programme se décompose en deux algorithmes principaux :

— génération d'un ensemble de graphes contenant tous les graphes hyperboliques en essayant de minimiser son nombre d'éléments (algorithme 2).

— reconnaissance d'un graphe appartenant à $L =$ Liste $I \cup$ Liste II (algorithme 1).

Ayant résolu ces deux problèmes l'algorithme complet est alors le suivant :

2. ALGORITHME 1 (voir l'organigramme p. 9)

(1) Si G est connexe et a au plus $N \leqslant 9$ sommets aller en 2 sinon $G \notin L$ (en effet tous les graphes de L sont connexes et ont au plus 9 sommets).

(2) M étant le nombre d'arêtes de G si $M \leqslant N$ aller en 3 sinon $G \notin L$. En effet si $M \leqslant N$ la dimension de l'espace des cycles de G est $C = M - N + 1 \geqslant 2$ ce qui est impossible puisque les graphes de L ont au plus un cycle.

(3) Si $N = 1$ ou 2 alors $G \in L$ sinon aller en 4. On obtient les graphes :

$$a(1) = \bullet \qquad f = \bullet\overset{m}{-\!\!-}\bullet \quad m \geqslant 3$$

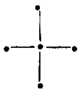
$$a(2) = \bullet\!-\!\!-\!\bullet \qquad J = \bullet\overset{\infty}{-\!\!-}\bullet$$

$$b(2) = \bullet\overset{4}{-\!\!-}\bullet$$

(4) S'il existe un poids $\neq 0, 4, 5, 6$, $G \notin L$ sinon aller en 5. En effet les seuls graphes de L ayant un poids $\neq 0$, 4, 5, 6 sont f et J déjà obtenus en 3.

(5) Si le nombre d'arêtes pondérées (NAP) est > 2 alors $G \notin L$ sinon aller en 6.

(6) S'il existe un sommet de degré 4 alors $G \notin L$. S'il existe un sommet de degré 4 et si $NAP = 0$ et $N = 5$ alors $G \in L$, G est alors le graphe

 $= D(5)$

sinon $G \notin L$ (en effet c'est le seul graphe de L ayant un sommet de degré 4). Dans les autres cas aller en 7.

(7) S'il existe plus de 2 sommets de degré 3 alors $G \notin L$.

S'il existe 0 sommet de degré 3 (le graphe est alors soit un cycle soit une chaîne) aller en 70.

Si $M = N - 1$ et si le graphe a un sommet de degré 3 aller en 71.

Si $M = N - 1$ et si le graphe a 2 sommets de degré 3 aller en 72.

Dans les autres cas $G \notin L$. En effet d'après 1 et 2 on a $M = N - 1$ ou $M = N$. Si $M = N$ le graphe est un cycle il n'a donc aucun sommet de degré 3. Si $M = N - 1$ et si $G \in L$ il a au plus 2 sommets de degré 3 puisque nous avons obtenu en 6 le seul graphe de L ayant un sommet de degré > 3.

(70) G est un cycle ou une chaîne: si $NAP = 0$ alors $G \notin L$. On obtient les graphes :


= a(n)


= A(n)

Nous avons ainsi obtenu tous les cycles de L. Donc si $M \neq N - 1$, $G \notin L$ sinon aller en 8.

(8) Si $NAP = 1$ aller en 80, si $NAP = 2$ aller en 81. Il n'y a pas d'autre cas à cause de 5.

(80) Si le poids est 4 et si l'arête pondérée est pendante alors $G \in L$. On obtient les graphes $b(n)$: $\bullet\overset{4}{—}\bullet$ ... $\bullet—\bullet$. Si le poids est 4 et si $N = 4$ ou 5, $G \in L$ on obtient les graphes :

e =  et M = 

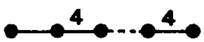
– Si le poids est 5 et si $N = 3$ alors $G \in L$. On obtient le graphe : $g = \bullet—\bullet\overset{5}{—}\bullet$. Si le poids est 5, si $N = 4$ et si l'arête pondérée est pendante $G \in L$. On obtient :

h = 

– Si le poids est 6 et si $N = 3$ alors $G \in L$. On obtient le graphe I : $\bullet—\bullet—\bullet$

– Dans tous les autres cas $G \notin L$. En effet nous avons obtenu toutes les chaînes de L ayant une seule arête pondérée.

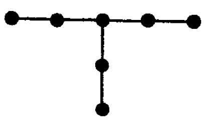
(81) S'il y a 2 poids égaux à 4 et si les arêtes pondérées sont pendantes alors $G \in L$. On obtient :

C(n)= 

Nous avons obtenu toutes les chaînes de L donc dans les autres cas $G \notin L$.

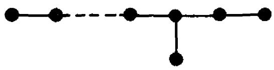
(71) Si le sommet du degré 3 est adjacent à 0 sommet pendant aller en 9 sinon aller en 10.

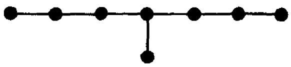
(9) si $N = 7$ et $NAP = 0$ alors on obtient le graphe :


= E

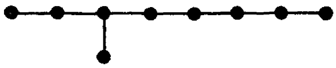
sinon $G \notin L$. En effet tous les autres graphes de L ayant un seul sommet de degré 3 sont adjacents à au moins un sommet pendant.

(10) Si le sommet de degré 3 est adjacent à un sommet pendant et si $NAP \neq 0$ alors $G \notin L$, sinon si $N < 9$ alors $G \in L$. On obtient les graphes

d(n) =  n = 6,7,8

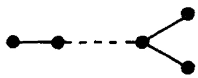
F = 

et si $N = 9$ et si un sommet pendant est à la distance 2 du sommet de degré 3 alors on obtient

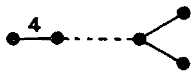
G = 

autrement $G \in L$ sinon aller en 11.

(11) Si $NAP = 0$ alors $G \in L$. On obtient les graphes :

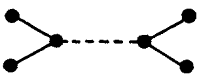
c(n)= 

si la 3[e] arête pendante est pondérée par 4 alors $G \in L$. On obtient ainsi :

B(n): 

Dans tous les autres cas $G \notin L$.

(72) Si $NAP \neq 0$ alors $G \notin L$. Si chaque sommet de degré 3 est adjacent à 2 sommets pendants alors $G \in L$ sinon $G \notin L$. On obtient ainsi :

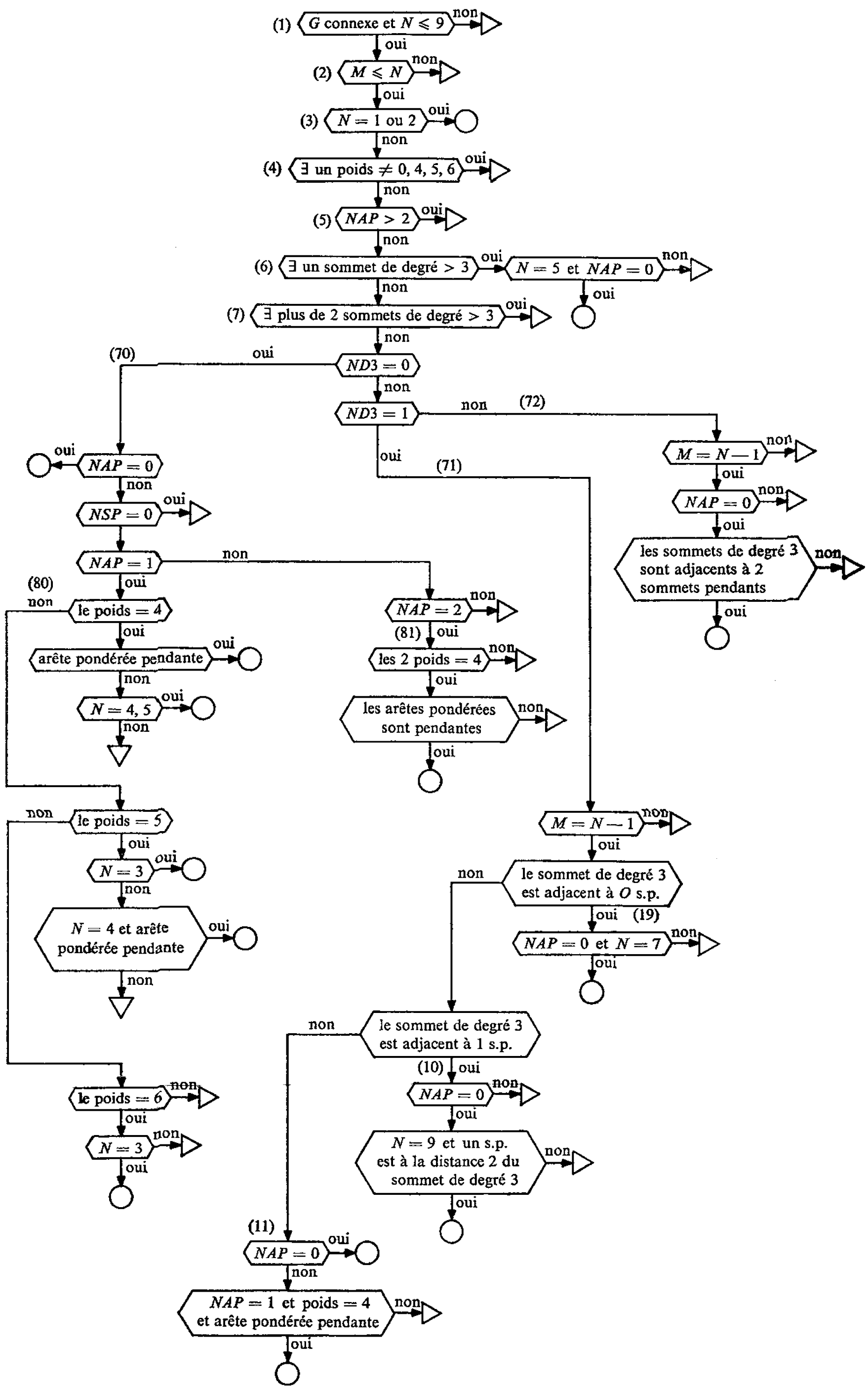
D(n):  n > 5

Dans les autres cas $G \notin L$.

Tous les graphes de L et eux seulement ont été obtenus, l'algorithme proposé résoud donc bien le problème posé.

Remarque. — L'organigramme est légèrement différent du programme écrit : nous n'avons pas effectué certaines simplifications afin de le rendre plus facilement compréhensible.

algorithme 2



M = nombre d'arêtes de G N = nombre de sommets de G ○ = $G \in L$

NAP = nombre d'arêtes NAP = nombre d'arêtes pondérées (poids ≠ 3)

NSP = nombre de sommets pendants ▷ = $G \notin L$ $ND3$ = nombre de sommets de degré 3

3. CONDITIONS SUFFISANTES SUR LE NOMBRE D'ARETES ET DE SOMMETS A AJOUTER A UN GRAPHE DE L POUR QUE LE NOUVEAU GRAPHE SOIT HYPERBOLIQUE

3.1. Nombre de sommets

Soit $G \in L$. Si on ajoute deux sommets s et t le graphe $G' = G \cup \{ s, t \}$ étant connexe, l'un des sommets s ou t n'est pas articulation. En effet supposons que s soit une articulation de G', comme G est connexe l'une des composantes connexes engendrées par la suppression de s est G donc l'autre est t. Ce qui entraîne que t est pendant donc n'est pas une articulation. Ceci entraîne qu'en enlevant t, $G \cup \{ s \}$ doit être élément de L pour que G' soit hyperbolique il est donc inutile d'ajouter deux sommets. Donc :

Un graphe hyperbolique peut être obtenu en ajoutant au plus un sommet à un graphe de L.

3.2. Nombre d'arêtes

$m_G =$ nombre d'arêtes, $n_G =$ nombre de sommets

$N_G = m_G - n_G + c_G$, $c_G =$ nombre de composantes connexes

$d_s =$ degré du sommet s, $R_k = \{$ graphe k-homogène $\}$

$K_n =$ graphe complet à n sommets, $d_m(G) = \min\limits_{s \in G} d_d(G)$

Quel que soit le sommet s de G hyperbolique, les composantes connexes de $G - s$ doivent être $\in L$, c'est-à-dire avoir au plus un cycle :

$$N_{G-s} \leqslant c_{G-s} \qquad \forall\, s \in G$$

$N_{G-s} = m - d_s - (n - 1) + c_{G-s} = N_G - d_s + c_{G-s}$ donc :

$$N_G \leqslant d_s \ \forall\, s \in G \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad \boxed{N_G \leqslant d_{\min}(G)} \tag{1}$$

$R_{d_{\min}(G)}$ étant un graphe $d_{\min}(G)$ — homogène (tous ses sommets de degré $d_{\min}(G)$) et connexe $N_G \geqslant N_{R_{d_{\min}(G)}}$

or $N_{R_k} = n \cdot \dfrac{k}{2} - n + 1$ on a :

$$n \cdot \frac{d_{\min}(G)}{2} - n + 1 \leqslant N_G \leqslant d_{\min}(G)$$

d'où $d_{\min}(G) \leqslant \dfrac{n-1}{\dfrac{n}{2} - 1}$

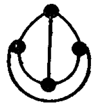
dès que $n \geqslant 5$ $d_{\min}(G) \leqslant 2$ c'est-à-dire que l'on a :

$$\boxed{N_G \leqslant 2 \qquad \text{pour} \qquad n \geqslant 5} \tag{2}$$

Etude directe pour n 5.

$n = 4 \qquad N_{K_4} = 3 \qquad n = 4 \Rightarrow d_{\min} \leqslant 3 \qquad d_{\min}(K_4) = 3$

le seul graphe est donc K_4 qui est hyperbolique

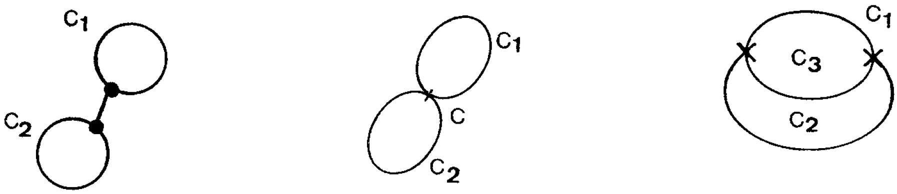


$n = 3 \qquad N_{K_3} = 1$

$$\boxed{\text{Le seul graphe } G \text{ hyperbolique avec } N_G > 2 \text{ est } K_4}$$

Etude directe pour $N_G = 2$.

G hyperbolique et $N_G = 2 \Rightarrow d_{\min}(G) = 2G$ est donc de la forme suivante :

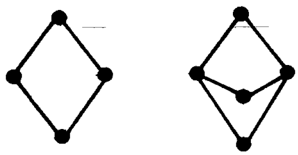


1 2 3

Dans le cas 1 il y a au moins un sommet sur c_1 en le supprimant le graphe restant n'est pas élément de L.

Dans le cas 2 s'il y a plus de 1 sommet sur c_1 ou sur c_2 en supprimant un sommet quelconque $\neq c$ on obtient un graphe $\notin L$.

Dans le cas 3 il y a au plus un sommet sur c_1, sur c_2 ou sur c_3 et au moins 1 sur deux au moins de ces arcs (sinon il y a des arêtes parallèles) on obtient ainsi les graphes suivants qui sont hyperboliques :



sont les seuls graphes hyperboliques avec $N_G = 2$.

Il ne reste plus qu'à rechercher les graphes hyperboliques ayant au plus 1 cycle.

Un graphe hyperbolique peut être obtenu en ajoutant au plus 1 sommet et 2 arêtes à un arbre de L ou 1 sommet et une arête à un cycle de L.

4. ALGORITHME 2

4.1. Obtention d'un ensemble de graphes contenant les graphes hyperboliques ayant un cycle

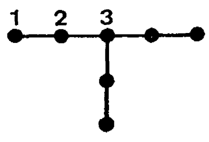
4.1.1. Si C est un cycle de L on joint un sommet unique quelconque de C à un nouveau sommet par une arête ayant tous les poids possibles. En éliminant les graphes ainsi formés qui ne sont pas hyperboliques on obtient, une fois et une seule, tous les graphes hyperboliques ayant un cycle et non égaux à un cycle. En effet un tel graphe ne peut avoir plus de 2 sommets pendants puisqu'en en enlevant un on obtiendrait un graphe $\notin L$, ni une chaîne adjacente à un sommet du cycle sinon en enlevant l'extrémité pendante de cette chaîne (de $\lg \geqslant 2$) on obtiendrait un graphe $\notin L$.

4.1.2. Si G est un graphe hyperbolique réduit à un cycle en enlevant un de ses sommets on obtient une chaîne de L il est donc obtenu en ajoutant un sommet que l'on joint par 2 arêtes ayant tous les poids possibles aux 2 sommets pendants d'une chaîne quelconque de L.

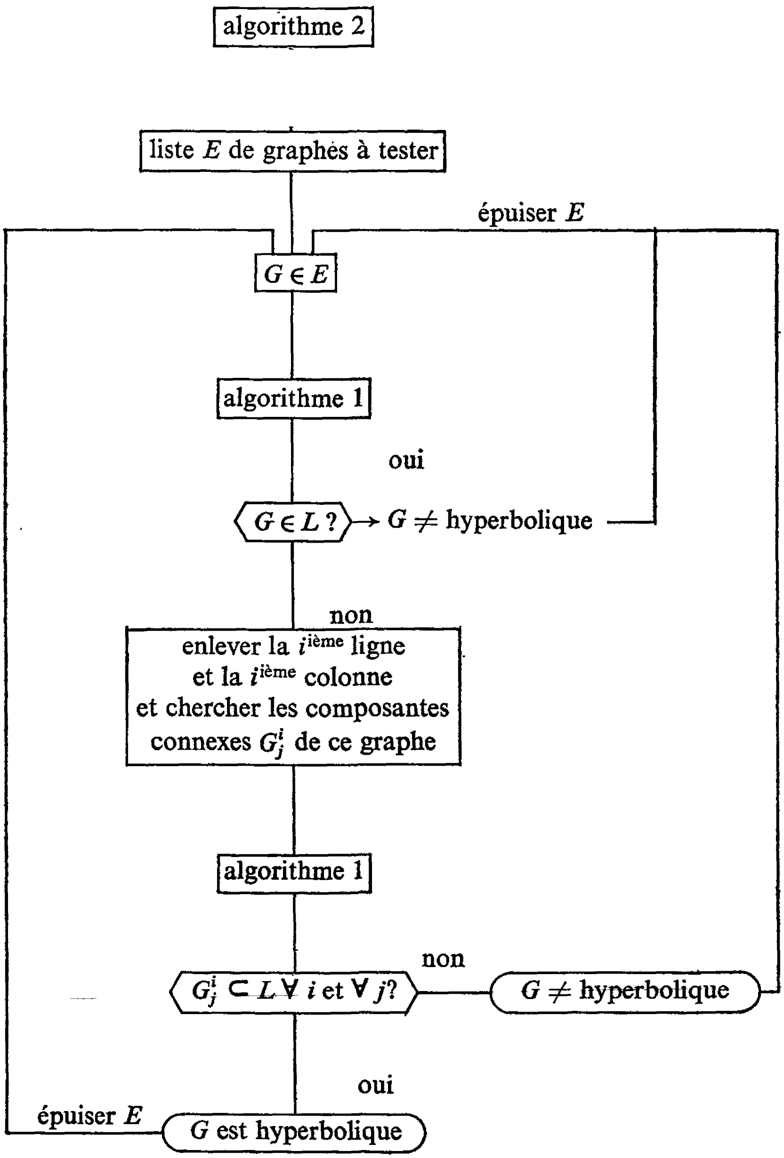
4.2. Obtention des graphes hyperboliques qui sont des arbres

Un tel graphe est obtenu en ajoutant un sommet que l'on joint par une arête ayant tous les poids possibles à tous les sommets d'un graphe de L qui n'est pas un cycle.

Remarque. — Il est possible de limiter notablement le nombre de graphes hyperboliques identiques obtenus, en tenant compte des symétries des graphes de L. Par exemple en cherchant les arbres hyperboliques obtenus à partir de



il suffit de joindre un nouveau sommet aux sommets 1 ou 2 ou 3.


algorithme 2
liste E de graphes à tester
épuiser E
$G \in E$
algorithme 1
oui
$G \in L$?
$G \neq$ hyperbolique
non
enlever la $i^{\text{ième}}$ ligne
et la $i^{\text{ième}}$ colonne
et chercher les composantes
connexes G_j^i de ce graphe
algorithme 1
non
$G_j^i \subset L \, \forall \, i$ et $\forall \, j$?
$G \neq$ hyperbolique
oui
épuiser E
G est hyperbolique

5. RESULTATS

Les programmes ont été écrits en FORTRAN par M. N. Spiridon de l'Institut de Mathématiques Appliquées de Grenoble que je tiens à remercier vivement. Les graphes obtenus sont ceux de la liste publiée en appendice. Le temps de calcul, sur IBM 7044, a été de 4 minutes.

APPENDICE : GRAPHES DES GROUPES DE COXETER HYPERBOLIQUES IRREDUCTIBLES

Liste établie par M. M. Chein (1)

Rang 3

compacts

$3 \leqslant p, q, r < \infty$
$p + q + r > 9$

$6 < m < \infty$

non compacts

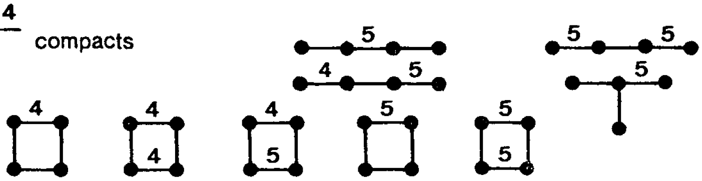
$4 \leqslant p < \infty \quad 5 \leqslant q < \infty$

$3 \leqslant p < \infty$

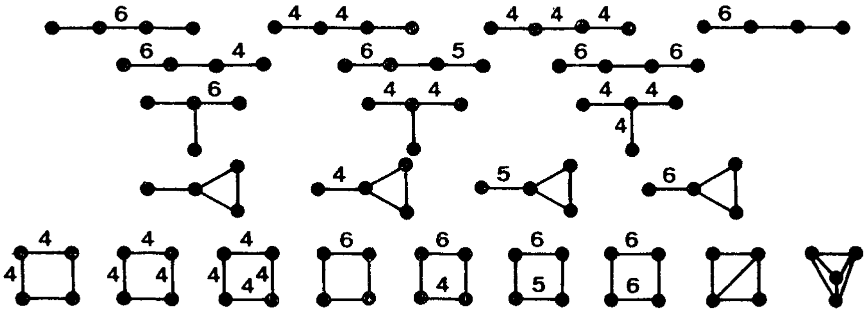
$3 \leqslant p, q < \infty$

Rang 4

compacts



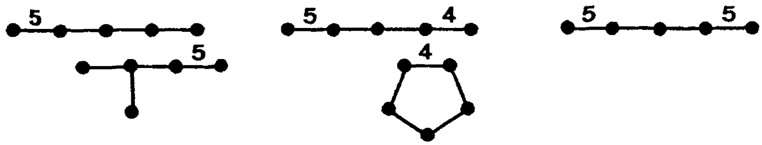
non compacts



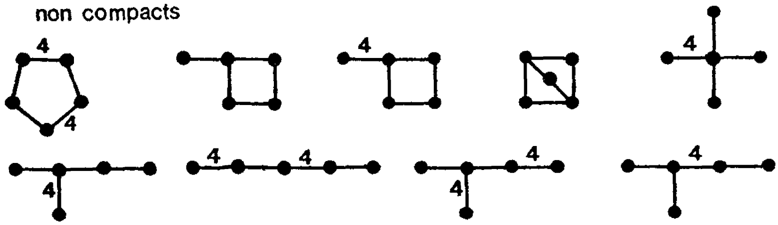
(1) Cette liste comporte la liste des groupes de Coxeter hyperboliques compacts qui a été donnée par F. Lanner (on complexes with transitive groups of automorphisms, Sém. Math. Lund, t. 11, 1950, 5-70).

Rang 5

compacts

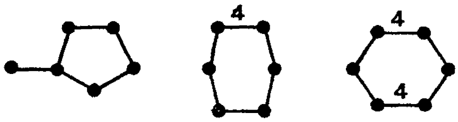


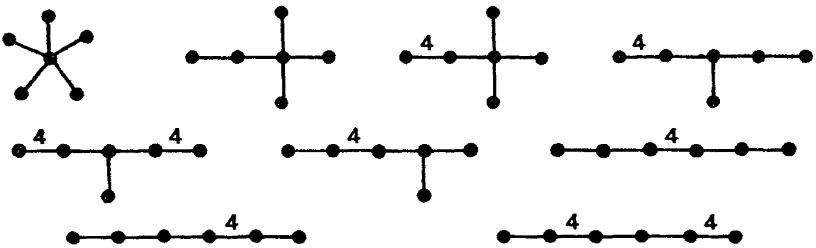
non compacts



Rang 6

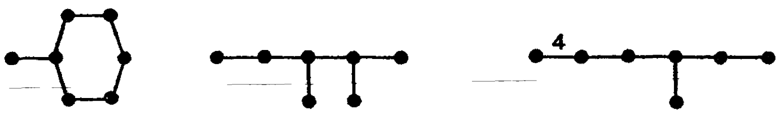
non compacts





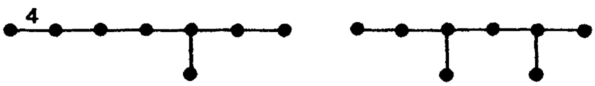
Rang 7

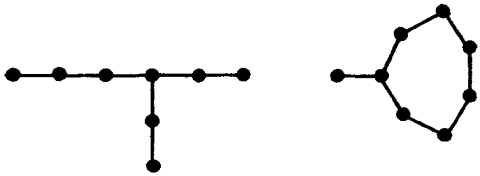
non compacts



Rang 8

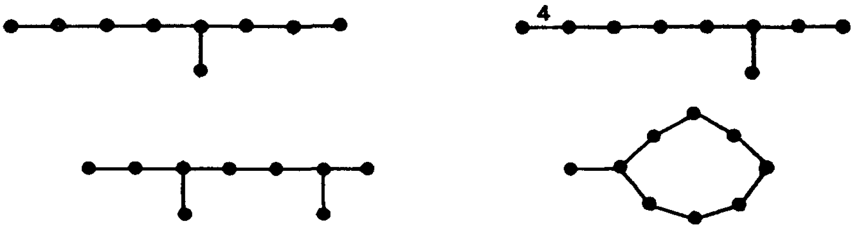
non compacts





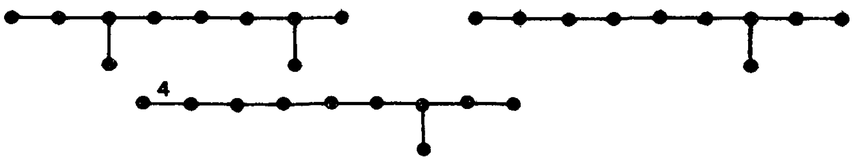
Rang 9

non compacts



Rang 10

non compacts



BIBLIOGRAPHIE

F. LANNER, Sém. Math. Lund, t. 11, 1950.

N. BOURBAKI, « Groupes engendrés par Réflexions », chap. V. *Groupes et Algèbres de Lie* (à paraître).

J. TITS, *Groupes et Géométries de Coxeter*, I.H.E.S., 1961.

E. WITT, *Spiegelungsgruppen und Aufzählung halbeinfacher Liescher Ringe*, Ham. Abhand, 14, 1941, 298-322.

H.S.M. COXETER et W. O. J. MOSER, *Generators and Relations for discrete groups*, Erg. der Math, N.F. 14, Springer, 1957.

E. VINBERG, *Diskretnye gruppy, povozdennye obrarenigami, v prostranstrah Lobacevskogo*, Mat. Sbornik, 72, 1967, 471-488.