Revue française d'informatique et de recherche opérationnelle. Série rouge

B. Germain-Bonne

Calcul de pseudo-inverses

Revue française d'informatique et de recherche opérationnelle. Série rouge, tome 3, nº R2 (1969), p. 3-13

<http://www.numdam.org/item?id=M2AN_1969__3_2_3_0>

R.I.R.O.
(3e année, No R-2/1969, p. 3-14)

CALCUL DE PSEUDO-INVERSES

par B. GERMAIN-BONNE [1]

Résumé. — *Les méthodes décrites dans cet article, qui sont présentées comme une généralisation des méthodes d'inversion, sont bien adaptées au calcul sur ordinateur; des expériences numériques ont par ailleurs montré que les erreurs de calcul sont analogues à celles que l'on obtient en utilisant les méthodes d'inversion.*

INTRODUCTION

Le but de cet article est d'exposer des algorithmes de calcul de pseudo-inverse de matrice; les méthodes décrites dans la section 1 sont inspirées par la méthode d'élimination de Jordan.

Dans la section 2, on montre comment on peut utiliser un algorithme de pseudo-inversion pour résoudre de grands systèmes par relaxation.

SECTION 1

METHODE DE PSEUDO-INVERSION

a) Rappel

On sait (cf. Penrose) que le pseudo-inverse A^+ d'une matrice A_{mn} de rang r est l'unique solution du système matriciel

$$\begin{cases} AA^+A = A \\ A^+AA^+ = A^+ \\ (AA^+)^* = AA^+ \\ (A^+A)^* = A^+A \end{cases}$$

A^* désigne la matrice conjuguée transposée de la matrice A

On peut démontrer le théorème suivant :
(cf. Blattner, Germain-Bonne)

---
(1) Faculté des Sciences de Lille.

Théorème

Si A est une matrice de dimensions (m, n) et de rang r, on peut trouver deux matrices U (de dimensions $(n, n-r)$) et V (de dimensions $(m, m-r)$) telles que :

$$\begin{matrix} AU = 0 \\ V^*A = 0 \end{matrix} \quad \text{et que} \quad \begin{pmatrix} A & V \\ U^* & O \end{pmatrix} \quad \text{soit régulière}$$

Dans ce cas

$$\begin{pmatrix} A & V \\ U^* & O \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A^+ & (U^*)^+ \\ V^+ & O \end{pmatrix}$$

b) **Description de la méthode de pseudo-inversion**

La méthode est basée sur le théorème précédent. Pour se ramener à un calcul d'inverse, il suffit de déterminer deux matrices U et V de rang maximum telles que :

$$\begin{cases} AU = 0 \\ V^*A = 0 \end{cases}$$

Pratiquement, nous considérerons ici des matrices à éléments réels et A^* sera notée A^τ (transposée de A).

Détermination de V telle que $V^\tau A = 0$

La méthode utilisée est fondée sur l'algorithme de Jordan.

La méthode de Jordan, appliquée à une matrice A_{mn} de rang r, consiste à déterminer une matrice régulière Q telle que :

$$QA = \begin{array}{|cc|l} \hline I_r & \Delta & r \\ & 0 & m-r \\ \hline \end{array}$$

Pratiquement, la matrice Q s'obtient à partir d'une matrice unité d'ordre m, dont les lignes suivent la même transformation que les lignes de A. On fait donc la transformation sur un tableau de m lignes et $m + n$ colonnes, ce qui peut se symboliser de la manière suivante :

$$\begin{array}{c|c|c|} & n & m \\ \hline m & A & I \\ \hline \end{array} \longrightarrow \begin{array}{|cc|c|l} \hline I_r & \Delta & Q_1 & r \\ & 0 & Q_2 & m-r \\ \hline \end{array}$$

La sous-matrice Q_2 est une sous-matrice de Q qui est régulière. Elle est telle que $Q_2A = 0$; c'est donc la matrice V^τ qui intervient dans le théorème précédent.

Méthode de pseudo-inversion

Méthode fondamentale

En appliquant la méthode de Jordan aux matrices A et A^τ, on peut déterminer U et V telles que :

$$AU = 0$$

$$V^\tau A = 0$$

Disposition pratique :

On range dans un tableau carré de dimensions $(m + n, m + n)$ les matrices A, A^τ, Im, In et on transforme par la méthode de Jordan les matrices A, Im, In; on obtient les matrices U et V au bout de r étapes.

$$\begin{array}{c|c|c|}
 & n & m \\
\hline
m & A & I_m \\
\hline
n & I_n & A^\tau \\
\hline
\end{array}
\quad \xrightarrow{r \text{ étapes}} \quad
\begin{array}{|cc|c|}
\hline
I_r & \Delta & C \\
0 & 0 & V^\tau \\
\hline
0 & U & A^\tau \\
\hline
\end{array}
\quad m + n - r$$

$$m + n - r$$

On inverse ensuite la matrice

$$\begin{pmatrix} O & V^\tau \\ U & A^\tau \end{pmatrix}$$

Variante

Elle est fondée sur la formule :

$$A^+ = (A^\tau A)^+ A^\tau$$

La détermination du pseudo-inverse de A exige celle de $A^\tau A$, qui est une matrice symétrique, de même rang que A. Le calcul du pseudo-inverse de $A^\tau A$ se fait par la méthode fondamentale, qui se simplifie dans ce cas particulier.

La matrice $A^{\tau}A$ étant symétrique, U et V telles que $A^{\tau}AU = 0$ et $V^{\tau}A^{\tau}A = 0$ sont telles que $U = V$; il suffit donc de chercher V telle que $V^{\tau}(A^{\tau}A) = 0$. On opère comme plus haut :

$$
\begin{array}{c}
\quad\; n \qquad\quad n \\
n \; \left[\begin{array}{c|c} A^{\tau}A & I_n \end{array}\right]
\end{array}
\xrightarrow{r \text{ étapes}}
\left[\begin{array}{cc|c} I_r & B & C \\ \multicolumn{2}{c|}{Q} & V^{\tau} \end{array}\right]
$$

Nous devons maintenant inverser la matrice régulière :

$$
\left[\begin{array}{c|c} A^{\tau}A & V \\ \hline V^{\tau} & O \end{array}\right]
$$

Utilisons la méthode de Jordan; l'inversion complète de cette matrice consisterait à faire la transformation :

$$
\left[\begin{array}{c|c|c|c} A^{\tau}A & V & I_n & O \\ \hline V^{\tau} & O & O & I_{n-r} \end{array}\right]
\longrightarrow
\left[\begin{array}{c|c|c|c} I_n & O & (A^{\tau}A)^{+} & (V^{\tau})^{+} \\ \hline O & I_{n-r} & V^{+} & O \end{array}\right]
$$

Comme nous voulons uniquement $(A^{\tau}A)^{+}$, on peut se borner à déterminer n lignes indépendantes de la matrice :

$$
\left[\begin{array}{c} A^{\tau}A \\ \hline V^{\tau} \end{array}\right]
$$

$$
\left[\begin{array}{c|c} A^{\tau}A & I_n \\ \hline V^{\tau} & O \end{array}\right]
\xrightarrow{\substack{r \\ \text{étapes}}}
\left[\begin{array}{c|c} I_r \;\; B & C \\ O & V^{\tau} \\ \hline V^{\tau} & O \end{array}\right]
\longrightarrow
\left[\begin{array}{c|c} I_r \;\; B & C \\ V^{\tau} & O \\ \hline O & V^{\tau} \end{array}\right]
\xrightarrow{\substack{n-r \\ \text{étapes}}}
\left[\begin{array}{c|c} I_n & (A^{\tau}A)^{+} \\ \hline O & V^{\tau} \end{array}\right]
$$

Dans cette série de transformations, uniquement les n premières lignes du tableau ont été transformées, et on obtient au bout de r étapes la matrice V^τ, qu'il n'était pas nécessaire de calculer préalablement. D'autre part, nous voulons calculer $(A^\tau A)^+ A^\tau$; pour éviter de faire une multiplication après avoir obtenu $(A^\tau A)^+$, il est préférable d'opérer de la manière suivante :

$$\begin{array}{|c|c|c|}\hline A^\tau A & A^\tau & I_n \\ \hline\end{array} \xrightarrow{r \text{ étapes}} \begin{array}{|cc|c|c|}\hline I_r & B & D & C \\ \multicolumn{2}{|c|}{O} & O & V^\tau \\ \hline\end{array} \xrightarrow{n\text{-}r \text{ étapes}} \begin{array}{|c|c|c|}\hline I_n & A^+ & (A^\tau A)^+ \\ \hline\end{array}$$

REMARQUE : Pour obtenir A^+b, meilleure solution du système $Ax = b$, il suffit dans la méthode précédente, de remplacer A^τ par $A^\tau b$.

Nombre d'opérations des deux méthodes

— *Méthode fondamentale :* Détermination de U et V :

$$\left[m + n + 1 - \frac{r+1}{2}\right] nr$$

multiplications; on doit ajouter un nombre de multiplications de l'ordre de $(m + n - r)^3$ pour inverser $\begin{pmatrix} A & V \\ U^\tau & O \end{pmatrix}$

Variante

$$\frac{nm(m+1)}{2} + (m-1)\left[\frac{m(m-1)}{2} + nm + \frac{r(r+1)}{2}\right] \quad \text{multiplications}$$

Pour m, n et r sensiblement égaux, le calcul de A^+ demande environ 2,5 m^3 multiplications, dans les deux cas.

Précision des méthodes

Les méthodes décrites donnent un degré de précision analogue à celui qu'on obtient avec les méthodes d'inversion classiques; nous avons le même problème que celui rencontré avec les méthodes d'inversion : comment apprécier si une ligne est combinaison linéaire des précédentes. Le « rang numérique » d'une matrice est fonction du zéro machine que l'on se fixe.

EXEMPLE : Résolution de $Ax = a$ par la seconde méthode.

$$A = \begin{pmatrix} 0{,}990 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0{,}992 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0{,}994 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0{,}996 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0{,}999 \end{pmatrix} \qquad a = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 5 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Nous avons résolu ce système en faisant varier le zéro machine.

ZERO MACHINE	x (SOLUTION)	RESIDU $a - Ax$
10^{-6} (calcul de $A^{-1}a$)	0,30983671 0,39330913 0,52483740 0,77552250 2,9995336	− 0,00000097 0,000047 0,000050 0,000003 − 0,000099
10^{-5} (calcul de pseudo inverse)	0,55080339 0,71200920 0,98740690 1,5986901 1,1560253	0,0006 0,0008 0,0010 0,0020 − 0,0003
10^{-3} (calcul de pseudo inverse)	1,0003317 1,0007136 1,0011151 1,0015167 1,0021195	0,005 0,003 0,001 − 0,001 − 0,004

SECTION 2

APPLICATION DES METHODES DE PSEUDO-INVERSION A LA RESOLUTION DE GRANDS SYSTEMES PAR RELAXATION

Nous étudions dans cette section la résolution d'un grand système $Ax = a$ par une méthode mixte utilisant une méthode de relaxation et une méthode de pseudo inversion.

Le principe est basé sur un partitionnement de A : $A = \begin{pmatrix} P & Q \\ R & S \end{pmatrix}$, tel que la matrice P soit carrée régulière; si on partitionne également le second membre a en $\begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{pmatrix}$ et le vecteur inconnu x en $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, on se ramène au système matriciel suivant :

$$\begin{pmatrix} P & Q \\ R & S \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} Px_1 + Qx_2 = Q_1 \\ Rx_1 + Sx_2 = Q_2 \end{cases}$$

Pour résoudre un tel système matriciel, on est amené à déterminer l'inverse de P et le pseudo inverse de $(S - RP^{-1}Q)$.

Il faudra déterminer une solution particulière de $Ax = a$ et la solution générale de $Ax = 0$.

Résolution d'un système compatible $Ax = a$

Soient (m, n) les dimensions de A et r son rang.

Le système $Ax = a$ est compatible s'il existe au moins un x_0 tel que $Ax_0 = a$. Soient x_0 une solution particulière de $Ax = a$ et $x_1, x_2 \dots x_{n-r}$, $(n - r)$ vecteurs linéairement indépendants entre eux tels que $Ax_i = 0$ $(i = 1 \dots n - r)$.

Soit X la matrice formée par les vecteurs colonnes x_i $(i = 1 \dots n - r)$; on peut montrer que la solution $z = A^+a$ cherchée s'écrit :

$$z = (I - XX^+)x_0$$

Une telle formule peut être intéressante si les x_i tels que $Ax_i = 0$ et x_0 tel que $Ax_0 = a$ sont faciles à obtenir et peu nombreux (cas d'une matrice de grande dimension et de rang assez élevé).

REMARQUE

Lorsque le système n'est pas compatible, le vecteur a, qui n'appartient pas à l'espace des colonnes de A peut se décomposer :

$$a = (I - XX^+)a + XX^+a$$

$(I - XX^+)a$ appartient à l'espace des colonnes de A.

XX^+a appartient à l'espace orthogonal.

On peut donc se ramener à un système compatible :

$$Ax = (I - XX^+)a, \qquad \text{dont la solution est } z = A^+a$$

Résolution d'un système linéaire compatible $Ax = a$ par utilisation d'une méthode de résolution

Hypothèses :

1) La matrice A est de dimensions (m, n) et de rang r.

2) Le système $Ax = a$ est compatible.

3) La matrice A se décompose en B et D telles que $A = B + D$ et $\rho(D^+B) < 1$, ρ désignant le rayon spectral de la matrice D^+B.

On peut démontrer les propriétés suivantes :

Propriété 1. La matrice D^+A et la matrice D ont même rang.

Propriété 2. La solution générale de $D^+Ax = 0$ peut se déduire de la solution générale de $Dx = 0$.

En effet, si z est tel que $Dz = 0$, la formule itérative $y_{n+1} = z - D^+By_n$ permet d'obtenir y (limite de y_n) tel que $D^+Ay = 0$.

Le nombre de vecteurs linéairement indépendants z tels que $Dz = 0$ est égal au nombre des y tels que $D^+Ay = 0$. On peut donc obtenir la solution générale de $D^+Ax = 0$.

Propriété 3. La solution générale de $Ax = 0$ peut se déduire de la solution générale de $D^+Ax = 0$.

En effet, l'ensemble des x tels que $Ax = 0$ est inclus dans l'ensemble des y tels que $D^+Ay = 0$.

Résolution de $Ax = a$

En utilisant les trois propriétés précédentes, on peut déterminer la solution générale de $Ax = 0$.

Il suffit alors de déterminer une solution particulière de $Ax = a$.

Cette recherche peut se faire en deux étapes :

1) *Solution particulière de $D^+Ax = D^+a$*

Il suffit d'utiliser la formule :

$$y_{n+1} = D^+a - D^+By_n$$

Les y_n convergent vers y tel que $D^+Ay = D^+a$.

2) *Solution particulière de $Ax = a$*

Nous connaissons une solution particulière de $D^+Ax = D^+a$ et la solution générale de $D^+Ax = 0$. Il suffit d'imposer à une solution de $D^+Ax = D^+a$, de vérifier $Ax = a$. C'est un problème de pseudo-inversion.

Ayant une solution particulière de $Ax = a$ et la solution générale de $Ax = 0$, on peut déterminer A^+a par une pseudo-inversion.

Décompte des opérations

r : rang de A

s : rang de D

Détermination de y_0 $D^+Ay_0 = D^+a$	1 relaxation
Détermination de Y tel que $D^+AY = 0$	$(n - s)$ relaxations
Détermination de x_0 $Ax_0 = a$ $x_0 = y_0 + Y(AY)^+(a - Ay_0)$	1 pseudo-inversion matrice $(m, n - s)$
Détermination des x_i $Ax_i = 0$	Utilisation d'une méthode d'élimination
Détermination de A^+a	1 pseudo-inversion matrice $(n, n - r)$

REMARQUES

La méthode décrite n'offre d'intérêt que dans la mesure où le calcul de D^+ est facile.

Ceci peut se produire dans le cas suivant, par exemple :

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} D_1 & O \\ O & O \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{pmatrix} \qquad && B_1 \text{ et } D_1 \text{ carrées} \\ & && D_1 \text{ régulière} \\ &= \quad D \quad + \quad B && \rho(D_1^{-1}B_1) < 1 \end{aligned}$$

$$D^+ = \begin{pmatrix} D^{-1} & O \\ O & O \end{pmatrix}$$

On peut de cette manière améliorer la méthode de Jacobi, en ne gardant dans la matrice D que les éléments dominants.

Exemple

Résolution de

$$\begin{pmatrix} 10 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 10 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 14 \\ 14 \\ 5 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \text{dont la solution est} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Nous avons pris :

$$D = \underset{\text{Cas 1}}{\begin{pmatrix} 10 & & & & \\ & 0 & & & \\ & & 0 & & \\ & & & 0 & \\ & & & & 0 \end{pmatrix}}, \quad \underset{\text{Cas 2}}{\begin{pmatrix} 10 & & & & \\ & 10 & & & \\ & & 0 & & \\ & & & 0 & \\ & & & & 0 \end{pmatrix}}, \quad \underset{\text{Cas 3}}{\begin{pmatrix} 10 & & & & \\ & 10 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 0 & \\ & & & & 0 \end{pmatrix}}$$

	Nombre de relaxations	Solution trouvée
Cas 1	11	1,00000000001 1,00000000004 0,999999999937 0,999999999937 0,999999999937
Cas 2	27	0,999999999988 0,999999999987 1,00000000002 1,00000000002 1,00000000002
Cas 3	73	1,00000000004 1,00000000004 1,00000000008 1,00000000001 1,00000000005

BIBLIOGRAPHIE

BEN-ISRAEL et CHARNES, Contributions to the theory of generalized inverses, *J. Siam*, 1963, vol. 11, n° 3, pp. 667-699.

J. W. BLATTNER, Bordered matrices, *J. Siam*, 1962, vol. 10, n° 3, pp. 528-536.

GERMAIN-BONNE, Méthodes de calcul de pseudo-inverses, Thèse, Faculté des Sciences de Lille.

GREVILLE, The pseudo-inverse of rectangular or regular matrix and its applications to the solution of systems of linear equations, *Siam Rev.*, 1959, vol. 1, pp. 38-43.

A. KORGANOFF et M. PAVEL-PARVU, Méthodes de calcul numérique : tome 2, *Éléments de théorie des matrices carrées et rectangles en analyse numérique*, Dunod, 1967.

PENROSE, A generalized inverse for matrices, *Proc. Cam. Phil. Soc.*, 1955, vol. 51, pp. 406-413.

RHODE, Generalized inverses of partitioned matrices, *J. Siam*, 1965, vol. 13, n° 4, pp. 1033-1035.