REVUE FRANÇAISE D'INFORMATIQUE ET DE RECHERCHE OPÉRATIONNELLE

A. BENSOUSSAN

P. KENNETH

Sur l'analogie entre les méthodes de régularisation et de pénalisation

Revue française d'informatique et de recherche opérationnelle, tome 2, n° R3 (1968), p. 13-25

<http://www.numdam.org/item?id=M2AN_1968__2_3_13_0>

© AFCET, 1968, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Revue française d'informatique et de recherche opérationnelle » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques

http://www.numdam.org/

R.I.R.O.
(2e année, N° 13, 1968, p. 13-26)

SUR L'ANALOGIE ENTRE LES METHODES DE REGULARISATION ET DE PENALISATION

par A. BENSOUSSAN et P. KENNETH (*)

Résumé. — *La méthode de « Régularisation » a été introduite pour la recherche du minimum d'une fonctionnelle* non coercive *sur un espace de Hilbert.*

Elle consiste à approcher le problème initial par une suite de problèmes de minimisation de fonctionnelles coercives.

La méthode de « Pénalisation » permet de rechercher le minimum d'une fonctionnelle (en général coercive) sur un convexe fermé *d'un espace de Hilbert. Elle consiste à approcher le problème initial par une suite de problèmes de minimisation de fonctionnelles* sur tout l'espace.

L'objet du présent article est de montrer que dans un domaine important d'applications, ces deux méthodes sont identiques. On indique ensuite comment cette théorie est utilisable pour le problème du contrôle optimal (en particulier, en considérant les équations d'évolution comme des contraintes).

INTRODUCTION

La méthode de « Régularisation » a été introduite pour la recherche du minimum d'une fonctionnelle non coercive sur un espace de Hilbert (cf. J. L. Lions [3]).

La méthode de « Pénalisation » dont l'idée remonte à Courant [2] a pour objet, par contre, la recherche du minimum d'une fonctionnelle coercive sur un convexe fermé d'un espace de Hilbert.

L'objet de la présente note est de montrer que dans un domaine assez important d'applications, ces deux méthodes sont identiques.

(*) Ingénieurs de Recherche à l'Institut de Recherche d'Informatique et d'Automatique,

1. — LA METHODE DE REGULARISATION

1.1. — Objet et présentation

1.1.1. — Hypothèses. Notations

On se donne un espace de Hilbert V et une fonctionnelle $g(v)$ définie sur V vérifiant

$$g(v) \geqslant 0 \qquad \forall v \in V \tag{1.1}$$

$$g \text{ est semi-continue inférieurement (s.c.i.)} \tag{1.2}$$

$$g \text{ est convexe} \tag{1.3}$$

$$\inf_{V \in v} g(v) = 0 \tag{1.4}$$

Remarque 1.1 : On peut remplacer l'hypothèse (1.4) par

$$\inf_{v \in V} g(v) = K \tag{1.5}$$

où K est une constante donnée.

On introduit le sous-ensemble X de V défini par

$$X = \{ v \mid g(v) = 0 \} \tag{1.6}$$

X est un sous-ensemble convexe et fermé dans V. En effet soit v_1 et v_2 appartenant à X et $\theta \in [0,1]$, on a

$$0 \leqslant g(\theta v_1 + (1 - \theta)v_2) \leqslant \theta g(v_1) + (1 - \theta)g(v_2) = 0 \tag{1.7}$$

donc $\theta v_1 + (1 - \theta) v_2$ appartient à X. Par ailleurs soit v_η une suite d'éléments de X convergent vers un élément v de V. D'après (1.2) on a :

$$0 = \liminf g(v_\eta) \geqslant g(v) \geqslant 0.$$

Donc $v \in X$.

1.1.2. — Le Problème

Si X est l'ensemble vide, le problème consiste à rechercher une suite minimisante de la fonctionnelle g. Si X est non vide, le problème consiste à rechercher *un* élément de X.

1.1.3. — Problème régularisé

On introduit une deuxième fonctionnelle sur V, soit $J(v)$ vérifiant :

$$J(v) \text{ bornée inférieurement.} \tag{1.8}$$

$$J(v) \text{ s.c.i.} \tag{1.9}$$

$$J(v) \text{ est strictement convexe.} \tag{1.10}$$

$$J(v) \to +\infty \text{ lorsque } \|v\| \to +\infty \tag{1.11}$$

On pose :

(1.12) $$g_\varepsilon(v) = g(v) + \varepsilon J(v) \quad ; \quad \varepsilon > 0$$

L'idée de la régularisation consiste à remplacer le problème de la minimisation de $g(v)$ par celui de la minimisation de $g_\varepsilon(v)$.

En effet, $\forall \varepsilon > 0$, il existe un élément et un seul v_ε de V réalisant la borne inférieure de $g_\varepsilon(v)$, i.e.

(1.13) $$g_\varepsilon(v_\varepsilon) = \inf_{v \in V} g_\varepsilon(v)$$

(Pour la démonstration de la propriété (1.13), cf. par exemple J. L. Lions [3]).

L'idée ensuite, est d'étudier ce qui se passe lorsqu'on fait tendre ε vers 0, ce qui est l'objet du numéro 1.2.

1.2. — Passage à la limite

1.2.1. — Le cas « $X = \Phi$ »

Théorème 1.1 : hypothèses et notations de 1.1.1 et de 1.1.3. Alors la suite v_ε définie par (1.13) est une suite minimisante pour la fonctionnelle g.

Démonstration : D'après (1.8) il existe un nombre M tel que

(1.14) $$J(v) \geqslant -M \qquad \forall v \in V$$

Posons

(1.15) $$K_\varepsilon(v) = g_\varepsilon(v) + \varepsilon M$$

Alors

(1.16) $$K_\varepsilon(v) \geqslant 0 \qquad \forall v \in V$$

D'autre part v_ε réalisant la borne inférieure de $g_\varepsilon(v)$ réalise également la borne inférieure de $K_\varepsilon(v)$.

Pour démontrer le théorème il suffit de montrer

(1.17) $$g(v_\varepsilon) \to 0 \qquad \text{lorsque } \varepsilon \to 0$$

Montrons d'abord que $K(v_\varepsilon)$ tend vers 0 lorsque ε tend vers 0. Soit v_ξ une suite minimisante de g. Pour $\delta > 0$ arbitraire, il existe un indice ξ_δ tel que

(1.18) $$g(v_{\xi_\delta}) \leqslant \frac{\delta}{2}$$

On a donc :

(1.19) $$0 \leqslant K_\varepsilon(v_\varepsilon) \leqslant K_\varepsilon(v_{\xi_\delta}) \leqslant \frac{\delta}{2} + \varepsilon(M + J(v_{\xi_\delta}))$$

Donc en prenant :

(1.20) $$\varepsilon < \eta_\varepsilon = \frac{\varepsilon}{2(M + J(v_{\xi_\delta}))}$$

On a :

(1.21) $$0 \leqslant K_\varepsilon(v_\varepsilon) \leqslant \delta$$

ce qui montre bien que $K_\varepsilon(v_\varepsilon) \to 0$ lorsque $\varepsilon \to 0$. Or on a :

(1.22) $$0 \leqslant g(v_\varepsilon) \leqslant K_\varepsilon(v_\varepsilon)$$

d'où il résulte (1.17) et le théorème 1.1.

1.2.2. — Le cas « X non vide »

On a alors :

Théorème 1.2 : Hypothèses et notations de 1.1.1 et 1.1.3. Si de plus X est non vide, alors la suite v_ε définie par (1.13) converge faiblement vers l'élément v_0 de X unique vérifiant :

(1.23) $$J(v_0) = \inf_{v \in X} J(v)$$

Démonstration : Tout d'abord l'élément v_0 est bien unique. En effet X est un convexe fermé d'après (1.7). Les hypothèses (1.8) à (1.11) assurent alors que J atteint de façon unique son minimum sur X (cf. par exemple [3]).

v_ε est borné en norme. En effet on a :

(1.24) $$\varepsilon J(v_\varepsilon) \leqslant g_\varepsilon(v_\varepsilon) \leqslant g(v_0) + \varepsilon J(v_0)$$

donc comme $g(v_0)$ est nul

(1.25) $$J(v_\varepsilon) \leqslant J(v_0)$$

D'après (1.11) il en résulte alors que v_ε est majoré en norme.

On peut donc extraire une sous-suite $v_{\varepsilon'}$, qui converge faiblement vers un élément v^* de V.

Montrons que v^* est un élément de X. En effet g étant convexe et s.c.i., elle est faiblement semi-continue inférieurement. Par conséquent on a :

(1.26) $$\liminf_{\varepsilon' \to 0} g(v_{\varepsilon'}) \geqslant g(v^*) \geqslant 0$$

Or :

(1.27) $$\liminf_{\varepsilon \to 0} g(v_\varepsilon) = 0$$

En effet on a :

(1.28) $$0 \leqslant g(v_\varepsilon) \leqslant \varepsilon[J(v_0) - J(v_\varepsilon)]$$

et d'après (1.14) :

(1.29) $$0 \leqslant g(v_\varepsilon) \leqslant \varepsilon(J(v_0) + M)$$

$J(v_0) + M$ étant un nombre positif.

Il en résulte (1.27) et par conséquent :

(1.30) $$\liminf_{\varepsilon' \to 0} g(v_{\varepsilon'}) = 0$$

De (1.30) et (1.26) on déduit que $g(v^*)$ est nul, donc que v^* appartient à X.

Montrons maintenant que $v^* = v_0$. En effet d'après (1.9) et (1.10) J est faiblement semi-continue inférieurement, donc :

(1.31) $$\liminf_{\varepsilon' \to 0} J(v_{\varepsilon'}) \geqslant J(v^*)$$

et d'après (1.25) on a :

(1.32) $$\limsup_{\varepsilon \to 0} J(v_{\varepsilon'}) \leqslant J(v_0)$$

De (1.31) et (1.32) il résulte que :

(1.33) $$J(v^*) \leqslant J(v_0)$$

ce qui implique que $v^* = v_0$.

En raison de l'unicité de la limite v^*, toute la suite v_ε converge faiblement v_0 lorsque $\varepsilon \to 0$, ce qui démontre le théorème.

Pour avoir un résultat de convergence forte, nous introduisons une forme particulière de la fonctionnelle $J(v)$. Nous prenons :

(1.34) $$J(v) = a(v, v) - 2L(v)$$

où :

(1.35) $a(u, v)$ est une forme bilinéaire et bicontinue sur $V \times V$

(1.36) $L(v)$ une forme linéaire et continue sur V

(1.37) $$a(v, v) \geqslant \alpha \|v\|^2 \qquad \forall v \in V$$

Alors :

Proposition 1.1 : Sous les hypothèses du théorème 1.2 et (1.34) à (1.37) la suite v_ε définie par (1.13) converge fortement vers l'élément v_0 défini par (1.23).

Démonstration : D'après le théorème 1.2 v_ε converge faiblement vers v_0. D'après (1.31) et (1.32) on a :

(1.38) $$\lim_{\varepsilon \to 0} J(v_\varepsilon) = J(v_0)$$

D'après (1.34) il en résulte :

(1.39) $$a(v_\varepsilon, v_\varepsilon) \to a(v_0, v_0) \qquad \text{lorsque} \qquad \varepsilon \to 0$$

D'après (1.37) et la convergence faible, il en résulte la proposition 1.1.

Orientation : Nous allons indiquer maintenant une variante du théorème 1.2.

Théorème 1.3 : La fonctionnelle $g(v)$ vérifie (1.1) à (1.4). La fonctionnelle $J(v)$ vérifie (1.8) à (1.10) et :

$$(1.40) \qquad \begin{cases} \text{Il existe } \lambda > 0 \text{ tel que } g + \lambda J \text{ soit coercive, i.e,} \\ g(v) + \lambda J(v) \to +\infty \text{ lorsque } \|v\| \to +\infty \end{cases}$$

(1.41) X défini en (1.6) est non vide et il existe *un élément et un seul* v_0 réalisant la borne inférieure de J sur X.

Alors $\forall \varepsilon > 0$ et $\leqslant \lambda$ $\exists$ un élément unique v_ε réalisant la borne inférieure de $g_\varepsilon(v) = g(v) + \varepsilon J(v)$ et :

$$(1.42) \qquad g(v_\varepsilon) \to 0 \text{ lorsque } \varepsilon \to 0$$

$$(1.43) \qquad J(v_\varepsilon) \to J(v_0) \text{ lorsque } \varepsilon \to 0$$

(1.44) v_ε converge faiblement vers v_0, lorsque $\varepsilon \to 0$.

Démonstration : Nous avons :

$$(1.45) \qquad g_\varepsilon(v) = \frac{\varepsilon}{\lambda}(g(v) + \lambda J(v)) + \left(1 - \frac{\varepsilon}{\lambda}\right) g(v)$$

donc pour $\varepsilon \leqslant \lambda$

$$(1.46) \qquad g_\varepsilon(v) \geqslant \frac{\varepsilon}{\lambda}[g(v) + \lambda J(v)]$$

Comme $g(v) + \lambda J(v)$ est coercive, il en résulte que $g_\varepsilon(v)$ est aussi coercive.

$g_\varepsilon(v)$ vérifie donc les quatre hypothèses (1.8) à (1.11). Par conséquent il existe un élément unique v_ε tel que :

$$(1.47) \qquad g_\varepsilon(v_\varepsilon) = \inf_{v \in V} g_\varepsilon(v)$$

Nous avons maintenant :

$$(1.48) \qquad g_\varepsilon(v_\varepsilon) \leqslant g_\varepsilon(v_0) = \varepsilon J(v_0)$$

donc :

$$(1.49) \qquad 0 \leqslant g(v_\varepsilon) \leqslant \varepsilon[J(v_0) - J(v_\varepsilon)]$$

soit :

$$(1.50) \qquad 0 \leqslant g(v_\varepsilon) \leqslant \varepsilon(J(v_0) + M)$$

M étant définie en (1.14).

$J(v_0) + M$ étant un nombre positif, il en résulte (1.42).

D'autre part on a :

$$(1.51) \qquad \varepsilon J(v_\varepsilon) \leqslant g_\varepsilon(v_\varepsilon) \leqslant g(v_0) + \varepsilon J(v_0) = \varepsilon J(v_0)$$

donc : $J(v_\varepsilon)$ est borné. Par conséquent $g(v_\varepsilon) + \lambda J(v_\varepsilon)$ est borné également. De (1.40) il en résulte alors que l'on a :

$$\|v_\varepsilon\| \leqslant C. \tag{1.52}$$

On peut donc extraire une sous-suite $v_{\varepsilon'}$ qui converge faiblement vers un élément v^* ; g étant faiblement semi-continue inférieurement on a :

$$0 = \liminf_{\varepsilon' \to 0} g(v_{\varepsilon'}) \geqslant g(v^*) \geqslant 0 \tag{1.53}$$

donc $v^* \in X$.

D'autre part J est aussi faiblement semi-continue inférieurement. On a :

$$J(v^*) \leqslant \liminf_{\varepsilon' \to 0} J(v_{\varepsilon'}) \leqslant \limsup_{\varepsilon' \to 0} J(v_{\varepsilon'}) \leqslant J(v_0) \tag{1.54}$$

donc :

$$v^* = v_0$$

et :

$$J(v_\varepsilon) \to J(v_0)$$

On a donc démontré (1.43) et (1.44).

Remarque 1.1 : Bien entendu si (1.11) est vérifiée alors (1.40) et (1.41) sont vérifiées.

Corollaire 1.1 : Hypothèses et notations du théorème 1.3. Si de plus on a :

$$g(v) + \lambda J(v) = a(v, v) - 2L(v) \tag{1.48}$$

où $a(v, v)$ est une forme bilinéaire et bicontinue sur V vérifiant (1.37) et $L(v)$ une forme linéaire et continue sur V alors :

$$v_\varepsilon \text{ converge fortement vers } v_0 \tag{1.49}$$

Démonstration : Comme $g(v_\varepsilon) \to 0$ et $J(v_\varepsilon) \to J(v_0)$, on a

$$g(v_\varepsilon) + \lambda J(v_\varepsilon) \to \lambda J(v_0) = a(v_0, v_0) - 2L(v_0).$$

Comme v_ε converge faiblement vers v_0, $L(v_\varepsilon)$ converge vers $L(v_0)$. Donc on a :

$$a(v_\varepsilon, v_\varepsilon) \to a(v_0, v_0) \tag{1.50}$$

ce qui, avec la convergence faible, implique (1.49).

1.3. — Quelques remarques

Remarque 1.2 : Les théorèmes 1.2 et 1.3 donnent des indications sur le choix de la fonctionnelle $J(v)$ régularisante. En effet si l'objet initial du problème est de trouver un élément de X, la régularisation donne un moyen de choisir un élément *particulier* parmi tous les éléments possibles. On peut donc introduire un second critère de choix. En conséquence, on a un *critère principal* qui est la fonctionnelle $g(v)$ et un *critère secondaire* qui est la fonctionnelle $J(v)$.

REMARQUE 1.3 : On peut introduire également la régularisation lorsque l'on cherche à minimiser une fonctionnelle $g(v)$ *non coercive* sur un convexe fermé *borné* de V. Dans ce cas, la borne inférieure de $g(v)$ sur le convexe n'est pas connue en général. L'analogie qui est le but de cette note est alors sans objet.

REMARQUE 1.4 : Le corollaire 1.1 reste vrai si l'on a seulement :

(1.51) $$g(v) = g_1(v) + g_2(v)$$

avec :

(1.52) $$g_1(v) \geqslant 0 \quad ; \quad g_2(v) \geqslant 0.$$

(1.53) $$g_1(v) + \lambda J(v) = a(v, v) - 2L(v) \quad ; \quad \lambda > 0.$$

$a(v, v)$ forme bilinéaire continue sur V vérifiant (1.37) et $L(v)$ forme linéaire et continue sur V.

En effet $g_1(v_\varepsilon) + g_2(v_\varepsilon)$ tendent vers 0, ceci entraîne grâce à (1.52) que $g_1(v_\varepsilon)$ tend vers 0. Il s'ensuit la remarque 1.4.

2. — PENALISATION

2.1. — Objet et présentation

2.1.1. — Hypothèses. Notations

On se donne une fonctionnelle $J(v)$ sur V vérifiant les hypothèses (1.8) à (1.10). On se donne également des fonctionnelles $g_1 \dots g_m$ telles que :

(2.1) $$g_j \text{ convexe} \qquad \forall j = 1 \dots m$$

(2.2) $$g_j \text{ s.c.i.} \qquad \forall j = 1 \dots m$$

2.1.2. — Le problème

Le problème consiste à minimiser $J(v)$ sous les contraintes :

(2.3) $$g_j(v) = 0 \qquad j = 1 \dots r$$

(2.4) $$g_j(v) \leqslant 0 \qquad j = r + 1 \dots m$$

où $$0 \leqslant r \leqslant m$$

Soit X le sous-ensemble de V défini par (2.3) et (2.4).

2.1.3. — Problème équivalent

Nous introduisons les fonctions $H_j : V \to R, j = 1, ..., m$ définies par :

(2.5) $$H_j(v) \equiv 1 \qquad \text{pour} \qquad j = 1 \ldots r$$

(2.6) $$H_j(v) = \begin{cases} 1 \text{ si } g_j(v) > 0 \\ 0 \text{ si } g_j(v) \leqslant 0 \end{cases} \qquad \text{pour} \qquad j = r+1, ..., m$$

Posons :

(2.7) $$g(v) = \sum_{j=1}^{m} H_j(v) g_j^2(v)$$

On vérifie que sous les conditions (2.1) et (2.2) la fonctionnelle g est s.c.i. et convexe. De plus g est évidemment non négative.

Nous avons alors :

(2.8) $$X = \{ v \mid g(v) = 0 \}$$

X est un sous-ensemble convexe fermé de V (cf. 1.1.1).

Par conséquent nous avons le problème équivalent suivant :

Trouver $u \in X$ tel que :

(2.9) $$J(u) = \inf_{v \in X} J(v)$$

Si (1.11) est vérifiée (en plus des hypothèses 2.1.1) alors u existe et est unique. Si (1.11) n'est pas vérifiée nous ferons alors l'hypothèse :

(2.10) $\exists$ un élément et un seul de X vérifiant (2.9)

2.2. — Idée de la pénalisation

On pose :

(2.11) $$J_\varepsilon(v) = J(v) + \frac{1}{\varepsilon} g(v) \qquad \varepsilon > 0$$

L'idée de la pénalisation consiste à remplacer le problème de la minimisation de $J(v)$ X par celui de la minimisation de $J_\varepsilon(v)$ sur tout l'espace V, donc à remplacer un problème de minimum *lié* par un problème de minimum *libre*.

Si (1.11) n'est pas vérifiée nous ferons alors l'hypothèse (1.40). Dans les deux cas, pour $\varepsilon > \lambda$, il existe un élément v_ε et un seul tel que :

(2.12) $$J_\varepsilon(v_\varepsilon) = \inf_{v \in V} J_\varepsilon(v)$$

L'idée ensuite consiste à voir ce qui se passe lorsque $\varepsilon \to 0$.

Si nous nous reportons au paragraphe 1.1.3, nous constatons que :

$$g_\varepsilon(v) = \varepsilon J_\varepsilon(v) \tag{2.13}$$

Par conséquent l'élément v_ε qui rend minimum la fonctionnelle $J_\varepsilon(v)$ est le même que celui qui rend minimum la fonctionnelle $g_\varepsilon(v)$.

Les théorèmes 1.2 où 1.3 [selon que l'on a l'hypothèse (1.11) où les hypothèses (2.10) et (1.40)] nous indiquent alors que lorsque $\varepsilon \to 0$ la suite v_ε converge faiblement dans V (fortement dans le cas quadratique) vers l'élément qui réalise la borne inférieure de $J(v)$ sur X, i.e., vers l'élément u cherché.

2.3. — Quelques remarques

REMARQUE 2.1 : Nous constatons ainsi que le problème de la minimisation d'une fonctionnelle *non coercive* et le problème de la minimisation d'une fonctionnelle (coercive ou non) sous des contraintes peuvent avoir une formulation identique.

De plus les méthodes de régularisation et de pénalisation qui avaient été introduites indépendamment se trouvent alors être la même méthode.

REMARQUE 2.2 : Pour les résultats relatifs à la régularisation nous renvoyons à J. L. Lions [3]. Pour les résultats relatifs à la pénalisation nous renvoyons à E. J. Beltrami [1].

REMARQUE 2.3 : La formulation du convexe des contraintes sous la forme :

$$X = \{ v \mid g(v) = 0 \} \tag{2.8}$$

où g est une application de $V \to R$ non négative convexe et s.c.i. est suffisamment générale pour les applications.

EXEMPLE : Soit Ω un ouvert borné de R^n,

$$t \text{ (le temps) } \in]0, T[;\ V = L^2(\Omega \times]0, T[; R)$$

Considérons le convexe X défini par :

$$\xi_0(x, t) \leqslant v(x, t) \leqslant \xi_1(x, t) \qquad p \cdot p \cdot x, t \tag{i}$$

où ξ_0 et ξ_1 appartiennent à $L^\infty(\Omega \times]0, T[; R)$.

X peut se mettre sous la forme (2.8). En effet soit $H(x, t)$ la fonction $\Omega \times]0, T[\to R$ définie par :

$$H(x, t) = \begin{cases} 1 \text{ si } (i) \text{ n'est pas satisfait.} \\ 0 \text{ si } (i) \quad\quad \text{ est satisfait.} \end{cases} \tag{ii}$$

Posons :

$$g(v) = \int_0^T \int_\Omega H(x, t)[(v(x, t) - \xi_0(x, t))(v(x, t) - \xi_1(x, t))]^2 \, dx \, dt \tag{iii}$$

alors X se met sous la forme (2.8).

2.4. — Exemple d'application de la pénalisation à la théorie du contrôle

La méthode de pénalisation a été introduite en théorie du contrôle par J. L. Lions [3], pour le cas où l'on considère les équations comme des contraintes.

Soit H et V deux espaces de Hilbert avec :

(2.14) $V \subset H$ algébriquement et topologiquement; V dense dans H.

On identifie H et son dual. Si V désigne le dual de V, on a alors :

$$V \subset H \subset V' \tag{2.15}$$

Soit l'équation différentielle opérationnelle :

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + A(t)y = Bu + f\,; \qquad t \in]0, T[\tag{2.16}$$
$$y(0) = y_0 \in H$$

où $A(t)$ est une famille d'opérateurs $\in L(V, V')$, pour $t \in]0, T[$ vérifiant :

(2.17) $\langle A(t)y, y \rangle \geqslant \alpha \, \|y\|^2$ (¹) $\quad \alpha > 0 \; \forall t \in]0, T[; \quad \forall y \in V$

et

(2.18) $u \in U$ espace de Hilbert des contrôles.

$$f \in L^2(0, T, H) \tag{2.19}$$

$$B \in \mathcal{L}(U; L^2(0, T; H)) \tag{2.20}$$

On considère le problème :

(2.21) trouver $u \in U$ minimisant

$$K(u) = \int_0^T |y(t; u) - y_d(t)|^2 \, \mathrm{d}t + \nu \, |u|_U^2; \qquad \nu > 0$$

Le problème (2.21) possède une solution et une seule.

Introduisons l'espace Y défini par :

$$Y = \left\{ y \in L^2(0, T; V); \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + A(t)y \in L^2(0, T; H) \right\} \tag{2.22}$$

Y est un espace de Hilbert muni de la norme :

$$|y|_Y^2 = \int_0^T \|y(t)\|^2 \, \mathrm{d}t + \int_0^T \left| \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + A(t)y \right|^2 \mathrm{d}t \tag{2.23}$$

(¹) $\langle\ \rangle$ représente la dualité V, V' — $\|\ \|$ représente la norme dans V et $|\ |$ représente la norme dans H.

Le problème (2.21) est équivalent au problème suivant :

(2.24) trouver $\{ u, y \} \in U \times Y$ appartenant au domaine

$$X = \left\{ (u, y) \in U \times Y \,\middle|\, \int_0^T \left| \frac{dy}{dt} + A(t)y - Bu - f \right|^2 dt + |y(0) - y_0|^2 = 0 \right\}$$

de façon à minimiser :

$$\int_0^T |y(t) - y_d(t)|^2 \, dt + \nu \, |u|_U^2$$

Posons :

(2.25) $$\eta = \{ u, y \} \qquad N = U \times Y$$

$$g(\eta) = \int_0^T \left| \frac{dy}{dt} + A(t)y - Bu - f \right|^2 dt + |y(0) - y_0|^2$$

$$J(\eta) = \int_0^T |y(t) - y_d(t)|^2 \, dt + \nu \, |u|_U^2$$

$g(\eta)$ vérifie sur N les hypothèses (1.1) à (1.4). $J(\eta)$ vérifie (1.8) à (1.10). L'hypothèse (1.41) est vérifiée en raison de l'équivalence des problèmes (2.21) et (2.24). Vérifions l'hypothèse (1.40). Il suffit de vérifier qu'il existe $\lambda > 0$ tel que l'on ait :

(2.26) $$\int_0^T \left| \frac{dy}{dt} + A(t)y - Bu \right|^2 dt + |y(0)|^2 + \lambda \int_0^T |y(t)|^2 \, dt + \lambda\nu \, |u|_U^2 \geqslant C \{ |y|_Y^2 + |u|_U^2 \}$$

où C est une constante > 0.

Pour démontrer (2.26) nous nous appuyons sur les inégalités suivantes :

(2.27) $$|y(0)|^2 \geqslant 2\alpha \int_0^T \|y(t)\|^2 \, dt - 2 \int_0^T \left(y, \frac{dy}{dt} + A(t)y \right) dt$$

(2.28) $$\left| \int_0^T \left(Bu, \frac{dy}{dt} + A(t)y \right) dt \right| \leqslant \frac{1}{2\beta} \int_0^T |Bu|^2 \, dt + \frac{\beta}{2} \int_0^T \left| \frac{dy}{dt} + A(t)y \right|^2 dt$$

(2.29) $$\left| \int_0^T \left(y, \frac{dy}{dt} + A(t)y \right) dt \right| \leqslant \frac{1}{2\gamma} \int_0^T |y|^2 \, dt + \frac{\gamma}{2} \int_0^T \left| \frac{dy}{dt} + A(t)y \right|^2 dt$$

(2.30) $$\int_0^T |Bu|^2 \, dt \leqslant C_1 \, |u|_U^2$$

$\beta, \gamma > 0$ arbitraires.

Si F désigne le premier membre de l'inégalité (2.26) à démontrer, on a :

$$F \geqslant (1-\beta-\gamma)\int_0^T \left|\frac{dy}{dt}+A(t)y\right|^2 dt + \left(\lambda\nu + C_1\left(-\frac{1}{\beta}\right)\right)|u|_U^2$$
$$+ 2\alpha\int_0^T \|y(t)\|^2 dt + \left(\lambda-\frac{1}{\gamma}\right)\int_0^T |y(t)|^2 dt$$

prenons par exemple $\beta = \frac{1}{2}$ $\quad \gamma = \frac{1}{4}$

$$\lambda > \max\left\{4, \frac{2C_1}{\nu}\right\}$$

On obtient alors (2.26) avec $C = \min\left\{\frac{1}{4}, 2\alpha, \lambda\nu - 2C_1\right\}$

Par conséquent le théorème 1.3 et le corollaire 1.1 s'appliquent et nous avons :

Proposition 2.1 : La suite ($\eta_\varepsilon = \{u_\varepsilon, y_\varepsilon\}$) définie par

$$J(\eta_\varepsilon) + \frac{1}{\varepsilon}g(\eta_\varepsilon) = \inf_{\{u,y\}\in U\times Y}\left(J(\eta) + \frac{1}{\varepsilon}g(\eta)\right) \tag{2.31}$$

converge fortement, lorsque $\varepsilon \to 0$, dans $U \times Y$, vers la solution du problème (2.21).

BIBLIOGRAPHIE

[1] E. J. BELTRAMI, *On infinite dimensional convex programming*, Journal of computer and system sciences, à paraître.

[2] R. COURANT, Variational methods for the solution of problems of equilibrium and vibrations, *Bull AMS* 49, p. 1-23, 1943.

[3] J. L. LIONS, *Contrôle des systèmes gouvernés par des équations aux dérivées partielles*, Dunod, 1968.