REVUE FRANÇAISE D'INFORMATIQUE ET DE RECHERCHE OPÉRATIONNELLE

YVES CHERRUAULT

Une méthode directe de minimisation et applications

Revue française d'informatique et de recherche opérationnelle, tome 2, nº R2 (1968), p. 31-52

<http://www.numdam.org/item?id=M2AN_1968__2_2_31_0>

R.I.R.O.
(2e année, N° 10, 1968, p. 31-52)

UNE METHODE DIRECTE DE MINIMISATION ET APPLICATIONS

par Yves CHERRUAULT [1]

Résumé. — *Le but de cet article est l'étude théorique et pratique d'une méthode directe d'optimisation. Nous donnons d'abord quelques résultats théoriques de convergence puis nous appliquons la méthode à la résolution numérique d'équations intégrales et aux dérivées partielles (linéaires et non linéaires).*

Le plan d'étude est le suivant :

1. Hypothèses. Description du procédé.
2. Convergence de la méthode I.
3. La méthode II. Un théorème de convergence.
4. Variantes. Applications.
5. Résultats numériques.

1. HYPOTHESES. DESCRIPTION DU PROCEDE

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbf{R}^n$. Soit V un espace de Banach réflexif composé de fonctions définies sur Ω.

On désigne par $J(v)$ une fonctionnelle non linéaire (application de V dans $\mathbf{R}$) continue, strictement convexe et vérifiant la condition

$$(1.1) \qquad \lim_{\|v\| \to +\infty} J(v) = +\infty$$

(1) Maître de conférences à la Faculté des Sciences de Lille.

On démontre alors facilement :

Théorème 1.1. — *Il existe u, unique, appartenant à V tel que* $J(u) = \operatorname*{Inf}_{v \in V} J(v)$.

(1.2) Soit V_N une suite de sous-espaces (de dimension finie N) contenus dans V et tels que $\bigcup_{N=1}^{\infty} V_N$ soit dense dans V.

Soit $e_1, e_2, \ldots, e_N$ une base de V_N.

Prenons $\rho > 0$ arbitraire et désignons par V_N^ρ l'ensemble des

$$u = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i e_i \in V_N,$$

dont les composantes α_i sont de la forme $m_i \rho$ avec $m_i \in Z$.

Posons enfin

$$\begin{aligned} j &= J(u) = \operatorname*{Inf}_{v \in V} J(v) \\ j_N &= J(u_N) = \operatorname*{Inf}_{v \in V_N} J(v) \qquad (1.3) \\ j_N^\rho &= J(u_N^\rho) = \operatorname*{Inf}_{v \in V_N^\rho} J(v) \end{aligned}$$

Alors nous avons

Proposition 1.1. 1) $j_N \to j$ *lorsque* $N \to \infty$
2) $j_N^\rho \to j_N$ *lorsque* $\rho \to 0$
3) $u_N \to u$ *faiblement lorsque* $N \to \infty$
4) $u_N^\rho \to u_N$ *faiblement lorsque* $\rho \to 0$.

Démonstration

1) et 2) sont évidents d'après la continuité de J et du fait que

$$\bigcup_N V_N \text{ et } \bigcup_\rho V_N^\rho$$

sont denses respectivement dans V et dans V_N.

Montrons 3). Puisque $J_N \to j$ on a $j_N \leqslant k$ où k est une constante indépendante de N. On en déduit $\| u_N \| \leqslant C$ (C constante).

En effet, dans le cas contraire $\| u_N \| \to \infty$ et $J(u_N) \to \infty$ d'après (1.1), ce qui est absurbe puisque $J(u_N) \leqslant k$.

On peut alors extraire une sous-suite, notée encore u_N, qui converge faiblement vers $w \in V$. J étant semi-continue inférieurement pour la topologie faible, on a :

$$\liminf J(u_N) \geqslant J(w)$$

et comme, $\liminf J(u_N) = j$ on a $w = u$.

Même démonstration pour 4).

REMARQUE 1.1 — Supposons $V \subset L^p(\Omega)$, $1 < p < \infty$, $\Omega \subset \mathbf{R}^n$, Ω borné.

De façon précise prenons $V \subset W^{m,p}(\Omega)$, V fermé.

(Pour la définition de $W^{m,p}$ voir [5]).

Soit $h = (h_1, h_2, \ldots, h_n) \in \mathbf{R}^n$, $h > 0$.

Soit V_h un espace de dimension finie $N(h)$. ($N(h)$ = nombre de points d'un réseau discret $\Omega_h \subset \Omega$.)

V_h^ρ désigne l'ensemble des vecteurs de V_h dont les composantes sont de la forme $m_i\rho$, $m_i \in Z$.

Prenons $p_h \in \mathcal{L}(V_h, V)$, $r_h \in \mathcal{L}(V, V_h)$ (cf. [1]).

On démontre alors : (cf. [1])

$$\|p_h v_h\|_V \leqslant S(h)\, \|p_h v_h\|_{L^p} \qquad \text{où} \qquad S(h) \to +\infty \qquad \text{si} \qquad h \to 0.$$

($S(h)$ est la constante de stabilité.)

Dans notre cas particulier on a : $S(h) = C \dfrac{1}{|h|^m}$

Nous avons :

Théorème 1.2. — *Sous l'hypothèse* $\lim\limits_{|h| \to 0} S(h)\rho(h) = 0$.

a) $j_h^\rho = J(p_h u_h^\rho) = \operatorname*{Inf}\limits_{v_h \in V_h^{\rho(h)}} J(p_h v_h)$ tend vers j quand $|h| \to 0$.

b) $p_h u_h^{\rho(h)}$ *tend faiblement vers* u *quand* $|h| \to 0$.

DÉMONSTRATION

On a $\operatorname*{Inf}\limits_{v_h \in V_h^{\rho(h)}} J(p_h v_h) \geqslant \operatorname*{Inf}\limits_{v \in V} J(v) = j$.

Soit u avec $J(u) = j$; nous allons montrer que, pour tout ε, il existe h_ε tel que pour $|h| < h_\varepsilon$ on ait $j_h^\rho \leqslant j + \varepsilon$.

De là résultera

$$\limsup j_h^\rho \leqslant j + \varepsilon \qquad \forall\, \varepsilon > 0$$

d'où

$$\limsup j_h^\rho \leqslant j.$$

Mais comme $\liminf j_h^\rho \geqslant j$ on aura $j_h^\rho \to j$ et la partie *a*) du théorème 1.2 sera démontrée.

Choisissons h tel que

$\| p_h r_h u - u \|_V \leqslant \eta$, le η étant tel que l'on ait : $|J(p_h r_h u) - J(u)| < \frac{\varepsilon}{2}$ ce qui est possible puisque $J(v)$ est continue. Donc :

$$J(p_h r_h u) \leqslant j + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Prenons $u_h = r_h u (\in V_h)$ et soit $u_h^\rho \in V_h^{\rho(h)}$ « voisin » de u_h.

Pour cela on remarque que l'on a

$$u_h = \sum_{M \in \Omega_h} \alpha_M w_M^h,$$

les w_M^h étant des fonctions caractéristiques régularisées (cf. [1]). Prenons alors

$$u_h^\rho = \sum_{M \in \Omega_h} \alpha_M^\rho w_M^h$$

où α_M^ρ est le produit d'un entier par $\rho(h)$, l'entier étant choisi tel que α_M^ρ soit le plus près possible de α_M. On a $u_h^\rho \in V_h^{\rho(h)}$

et $|\alpha_M^\rho - \alpha_M| \leqslant \rho(h)$ pour tout $M \in \Omega_h$.

En utilisant la constante $S(h)$ il vient

$$\|p_h(u_h - u_h^\rho)\|_V \leqslant S(h) \, \|p_h(u_h - u_h^\rho)\|_{L^p}$$

Mais

$$\|p_h(u_h - u_h^\rho)\|_{L^p}^p = \int_\Omega |p_h(u_h - u_h^\rho)|^p \, dx \leqslant C \sum_M \int_{\pi_M^h} |\alpha_M^\rho - \alpha_M|^p \, dx$$

où π_M^h désigne le support de w_M^h.

D'où

$$\|p_h(u_h - u_h^\rho)\|^p \leqslant C \cdot N(h) \cdot (\text{volume de } \pi_M^h)[\rho(h)]^p$$

Mais $N(h) \cdot (\text{volume de } \pi_M^h) \leqslant C$ où C est une constante et donc

$$\|p_h(u_h - u_h^\rho)\|_V \leqslant C \cdot \rho(h) \cdot S(h)$$

On en déduit (en utilisant l'hypothèse $\lim\limits_{|h| \to 0} S(h) \cdot \rho(h) = 0$)

$$j_h^\rho \leqslant J(p_h u_h^\rho)$$

et

$$\|p_h u_h^\rho - p_h u_h\|_V \leqslant \eta$$

pour $|h|$ assez petit

d'où

$$J(p_h u_h^\rho) \leqslant J(p_h u_h) + \frac{\varepsilon}{2}$$

Soit

$$_h \leqslant J(p_h u_h) + \frac{\varepsilon}{2} \leqslant j + \varepsilon.$$

La partie *b*) du théorème se démontre comme suit.

On sait qu'il existe $u_h \in V_h^{\rho(h)}$ unique tel que $J(p_h u_h) = j_h^\rho$.

Puisque j_h^ρ tend vers j, on a, $j_h^\rho \leqslant C$ et alors

$$\|p_h u_h\|_V \leqslant C \qquad \text{(en utilisant 1.1).}$$

Il existe donc une sous-suite, notée encore $p_h u_h$, telle que $p_h u_h \rightarrow w$ faiblement.

La semi-continuité inférieure de J pour la topologie faible entraîne

$$\liminf J(p_h u_h) \geqslant J(w)$$

et comme $\liminf J(p_h u_h) = j$ on a $w = u$.

Alors la suite $p_h u_h$, elle-même, converge faiblement vers u.

Pour les problèmes de minimisation avec contraintes on a un théorème analogue (cf. [4]).

Principe de la méthode I

Cette méthode est un procédé pour trouver une approximation de u_N. Posons

$$\text{(1.4)} \qquad K(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_N) = J(\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + ... + \alpha_N e_N)$$

Nous sommes ainsi ramenés à la minimisation d'une fonction K de $\mathbf{R}^N$ dans $\mathbf{R}$:

$$\operatorname*{Inf}_{\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_N} K(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_N) = \operatorname*{Inf}_{v \in V_N} J(v)$$

Choisissons une valeur initiale $(\alpha_1^0, \alpha_2^0, ..., \alpha_N^0)$ et une valeur ρ. Posons

$$\text{(1.5)} \qquad \begin{cases} \nabla_i \;= K(\alpha_1^0, ..., \alpha_{i-1}^0, \alpha_i^0, \alpha_{i+1}^0, ..., \alpha_N^0) \\ \nabla_i^+ = K(\alpha_1^0, ..., \alpha_{i-1}^0, \alpha_i^0 + \rho, \alpha_{i+1}^0, ..., \alpha_N^0) \\ \nabla_i^- = K(\alpha_1^0, ..., \alpha_{i-1}^0, \alpha_i^0 - \rho, \alpha_{i+1}^0, ..., \alpha_N^0) \end{cases}$$

Soit α_1^ρ le point de l'ensemble $\{ \alpha_1^0, \alpha_1^0 + \rho, \alpha_1^0 - \rho \}$ qui réalise le minimum de l'ensemble $\{ \nabla_1, \nabla_1^+, \nabla_1^- \}$ Pour ce qui suit, on remplace α_1^0 par α_1^ρ dans $\nabla_2, \nabla_2^+, \nabla_2^-$. Alors α_2^ρ désigne le point de $\{ \alpha_2^0, \alpha_2^0 + \rho, \alpha_2^0 - \rho \}$ qui réalise le minimum de $\{ \nabla_2, \nabla_2^+, \nabla_2^- \}$ et l'on remplace dans $\nabla_3, \nabla_3^+, \nabla_3^-$, α_1^0 par α_1^ρ et α_2^0 par α_2^ρ. Et ainsi de suite jusqu'à l'obtention de α_N^ρ. On a alors le vecteur

$$(\alpha_1^\rho, \alpha_2, ..., \alpha_N^\rho)$$

et l'on répète le processus ci-dessus (qui consiste à faire des variations sur chaque composante, en prenant comme valeur initiale $(\alpha_1^\rho, ..., \alpha_N^\rho)$ et ce jusqu'à ce que l'on parvienne à la stationnarité, c'est-à-dire jusqu'à obtenir un vecteur $(\alpha_1^\rho, \alpha_2^\rho, \ldots, \alpha_N^\rho)$ tel que :

$$
(1.6) \qquad \left\{\begin{array}{l}
\nabla_1^+ \geqslant \nabla_1 \\
\nabla_1^- \geqslant \nabla_1 \\
\vdots \\
\nabla_i^+ \geqslant \nabla_i \\
\\
\nabla_i^- \geqslant \nabla_i \\
\vdots \\
\nabla_N^+ \geqslant \nabla_N \\
\nabla_N^- \geqslant \nabla_N
\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}
K(\alpha_1^\rho \pm \rho, \alpha_2^\rho, \ldots, \alpha_N^\rho) \geqslant K(\alpha_1^\rho, \alpha_2^\rho, \ldots, \alpha_N^\rho) \\
\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\
\\
\\
\\
\\
K(\alpha_1^\rho, \alpha_2^\rho, \ldots, \alpha_N^\rho \pm \rho) \geqslant K(\alpha_1^\rho, \alpha_2^\rho, \ldots, \alpha_N^\rho)
\end{array}\right.
$$

La stationnarité est justifiée par le

Lemme 1.1. — *Pour N et ρ fixés, la méthode I conduit, au bout d'un nombre fini de variations, à l'existence d'un vecteur $(\alpha_1^\rho, \ldots, \alpha_N^\rho)$ vérifiant* (1.6.).

DÉMONSTRATION

Désignons par v_N^ρ les points de V_N^ρ de composantes $(\alpha_1^\rho, \ldots, \alpha_N^\rho)$ qui interviennent dans le processus précédent. Alors on a nécessairement $\| v_N \| \leqslant C$. En effet, si l'on avait $\|v_N^\rho\| \to +\infty$ alors on aurait $\lim J(v_N) = +\infty$ de qui est absurde car $J(v_N^\rho)$ décroît.

De $\|v_N^\rho\| \leqslant C$ on déduit,

$$|\alpha_i^\rho| \leqslant K \qquad i = 1, 2, \ldots, N \qquad \text{d'où le lemme.}$$

Une fois la stationnarité atteinte, on divise ρ par 2 et l'on répète tout le processus précédent. Nous allons voir, dans le paragraphe suivant, un théorème de convergence de la méthode.

2. CONVERGENCE

Désignons par $u_N^{*\rho} = (\alpha_1^\rho, \ldots, \alpha_N^\rho)$ le point obtenu par la méthode I [et vérifiant (1.6)].

Posons $j_N^{*\rho} = J(u_N^{*\rho})$ alors, en supposant l'existence et la continuité des dérivées partielles de K (ce qui n'est pas une restriction, dans la pratique), nous avons :

Théorème 2.1. — 1) $j_N^{*\rho}$ *tend vers* j_N *lorsque* $\rho \to 0$

2) $u_N^{*\rho}$ *tend fortement vers* u_N *lorsque* $\rho \to 0$.

DÉMONSTRATION

La démonstration ne dépend pas de N et, pour simplifier l'écriture, nous allons la donner avec $N = 2$. Considérons le problème :

$$\operatorname*{Inf}_{\alpha_1, \alpha_2} K(\alpha_1, \alpha_2)$$

La méthode I nous fournit $(\alpha_1^\rho, \alpha_2^\rho)$ vérifiant (1.6), d'où

$$(2.1) \qquad 0 \leqslant K(\alpha_1^\rho + \rho, \alpha_2^\rho) - K(\alpha_1^\rho, \alpha_2^\rho) = \rho K'_{\alpha_1}(\alpha_1^\rho + \theta_1\rho, \alpha_2^\rho)$$

avec

$$0 < \theta_1 = \theta_1(\rho) < 1$$

Par conséquent :

$$(2.2) \qquad K'_{\alpha_1}(\alpha_1^\rho + \theta_1\rho, \alpha_2^\rho) \geqslant 0$$

L'inégalité (2.1) est valable en remplaçant ρ par $-\rho$ et θ_1 par θ'_1 avec

$$0 < \theta'_1 < 1$$

D'où l'on tire

$$(2.3) \qquad K'_{\alpha_1}(\alpha_1^\rho - \theta'_1\rho, \alpha_2^\rho) \leqslant 0$$

De la même façon, en utilisant

$$(2.4) \qquad 0 \leqslant K(\alpha_1^\rho, \alpha_2^\rho + \rho) - K(\alpha_1^\rho, \alpha_2^\rho) = \rho K'_{\alpha_2}(\alpha_1^\rho, \alpha_2^\rho + \theta_2\rho)$$

Il vient :

$$(2.5) \qquad \begin{cases} K'_{\alpha_2}(\alpha_1^\rho, \alpha_2^\rho + \theta_2\rho) \geqslant 0 \\ \\ K'_{\alpha_2}(\alpha_1^\rho, \alpha_2^\rho - \theta'_2\rho) \leqslant 0 \end{cases} \qquad \text{avec} \qquad \begin{cases} 0 < \theta_2 < 1 \\ 0 < \theta'_2 < 1. \end{cases}$$

Quand $\rho \to 0$, la suite $J(u_N^{*\rho})$ décroît et, par conséquent (en utilisant le raisonnement du lemme 1.1)

(2.6) $\|u_N^{*\rho}\| \leqslant C$, où C est une constante indépendante de ρ. De là, on déduit :

$$(2.7) \begin{cases} |\alpha_1^\rho| \leqslant C_1 \\ \\ |\alpha_2^\rho| \leqslant C_2 \qquad \text{où} \qquad C_1 \text{ et } C_2 \text{ sont des constantes indépendantes de } \rho \end{cases}$$

Des deux suites numériques bornées α_1^ρ et α_2^ρ, on peut extraire deux sous-suites (encore notées α_1^ρ, α_2^ρ) qui convergent vers β_1, β_2 (resp.)

$$\alpha_1^\rho \to \beta_1 \quad ; \quad \alpha_2^\rho \to \beta_2$$

En utilisant la continuité des dérivées partielles de K, on obtient :

$$K'_{\alpha_1}(\alpha_1^\rho + \theta_1 \rho, \alpha_2^\rho) \underset{\rho \to 0}{\longrightarrow} K'_{\alpha_1}(\beta_1, \beta_2)$$

$$K'_{\alpha_1}(\alpha_1^\rho - \theta'_1 \rho, \alpha_2^\rho) \underset{\rho \to 0}{\longrightarrow} K'_{\alpha_1}(\beta_1, \beta_2)$$

$$K'_{\alpha_2}(\alpha_1^\rho, \alpha_2^\rho + \theta_2 \rho) \underset{\rho \to 0}{\longrightarrow} K'_{\alpha_2}(\beta_1, \beta_2)$$

$$K'_{\alpha_2}(\alpha_1^\rho, \alpha_2^\rho + \theta'_2 \rho) \underset{\rho \to 0}{\longrightarrow} K'_{\alpha_2}(\beta_1, \beta_2)$$

Compte tenu de (2.2), (2.3) et (2.5) et par passage à la limite, on a

$$\text{(2.9)} \qquad \begin{cases} K'_{\alpha_1}(\beta_1, \beta_2) = 0 \\ \\ K'_{\alpha_2}(\beta_1, \beta_2) = 0 \end{cases}$$

Puisque $J(v)$ admet un point critique unique et que ce point critique est un minimum, on a :

$$(\beta_1, \beta_2) = u_N$$

Par un raisonnement classique, on déduit que la suite $(\alpha_1^\rho, \alpha_2^\rho)$ elle-même converge vers u_N. D'où :
$u_N^{*\rho}$ converge vers u_N quand $\rho \to 0$.

Puisque J est une fonctionnelle continue, il en résulte que :
$J(u_N^{*\rho}) = j_N^{*\rho}$ converge vers $J(u_N) = j_N$ lorsque $\rho \to 0$.

3. LA METHODE II. UN THEOREME DE CONVERGENCE

La méthode précédente donne une approximation en deux temps du problème

$$\text{(3.1)} \qquad \operatorname*{Inf}_{v \in V} J(v)$$

Dans un premier stade on remplace le problème (3.1) par :

$$\text{(3.2)} \qquad \operatorname*{Inf}_{v \in V_N} J(v) = J(u_N)$$

et la méthode I nous donne une approximation de u_N. On peut se proposer de résoudre directement le problème (3.1). Pour cela, au lieu de fixer N et de faire tendre ρ vers 0 pour cette valeur de N, on peut choisir ρ fonction de N: $\rho = \rho(N)$. C'est ce procédé que l'on appellera méthode II.

Supposons que J vérifie, en plus des hypothèses du paragraphe 1, les conditions suivantes :

a) J admet une dérivée Fréchet (grad J) $(x) = F(x)$
(F est une application de V dans V'). On a alors
$J(x + u) - J(u) = F(x) \cdot u + w(x, u)$ [1]. On suppose que w vérifie :

$$|w(x, u)| \leqslant k(x) \|u\|_V^\alpha \quad \text{avec} \quad \alpha > 1 \tag{3.3}$$

et $k(x)$ fonction indépendante de u qui transforme les suites bornées en ensemble bornés.

b) Si v_n tend *faiblement* vers v dans V et si u_n tend *fortement* vers u dans V alors :

$$F(v_n) \cdot u_n \text{ tend vers } F(v) \cdot u$$

c) Pour calculer $u_N^{*\rho(N)}$ par la méthode I on choisit comme valeur initiale $u_{N-1}^{*\rho(N-1)}$. Alors nous avons :

Théorème 3.1. — *Si* $\alpha(N) = \operatorname*{Sup}_{i=1,\dots,N} (\|e_1\|, \|e_2\|, \dots, \|e_N\|)$, *si J vérifie les hypothèses du § 1 et a), b) et c), et enfin si :*

(3.4) $\lim\limits_{N \to \infty} N[\rho(N)]^{\alpha-1}[\alpha(N)]^\alpha = 0$, *alors la méthode II converge.*

De façon précise, et avec des notations évidentes, nous avons :

1) $\lim\limits_{N = \infty} u_N^{*\rho(N)} = u$ dans V *faible*

2) Si, de plus, J est *faiblement continue* alors : $\lim\limits_{N \to \infty} j_N^{*\rho(N)} = j$

REMARQUE 3.1. D'après *c*) la suite $J(u_N^{*\rho(N)})$ est décroissante et minorée, elle admet donc une limite 1 :

$\lim\limits_{N = \infty} J(u_N^{*\rho(N)}) = 1$ et d'après la semi-continuité inférieure de J pour la topologie faible

$\lim\limits_{N = \infty} u_N^{*\rho(N)} = u \Rightarrow 1 \geqslant j$. C'est le seul résultat que l'on puisse obtenir si l'on ne suppose pas la continuité faible de J.

Par contre, si J est faiblement continue alors :

$$\lim_{N = \infty} u_N^{*\rho(N)} = u \;\Rightarrow\; \lim_{N = \infty} J(u_N^{*\rho(N)}) = J(u)$$

et l'assertion 2) est une conséquence de 1).

---

[1] On note $F(x) \cdot u$ la valeur de la forme linéaire $F(x)$ au point $u \in V$.

Démonstration du théorème 3.1.

De $J(u_N^{*\rho(N)})$ borné on déduit (raisonnement analogue à celui du lemme 3.1)

(3.5) $\|u_N^{*\rho(N)}\| \leqslant C$; C constante indépendante de N.

On peut donc extraire de la suite $u^{*\rho(N)} [= u_N^{*\rho(N)}]$ une sous-suite, encore notée $u^{*\rho(N)}$, qui converge faiblement vers un élément $s \in V$.

Mais d'après le § 2 nous avons :

$$\text{(3.6)} \qquad \begin{cases} 0 \leqslant J(u_N^{*\rho(N)} + \rho e_i) - J(u_N^{*\rho(N)}) \\ 0 \leqslant J(u^{*\rho} - \rho e_i) - J(u^{*\rho}) \qquad i = 1, 2, \dots, N \end{cases}$$

D'où

$$\text{(3.7)} \begin{cases} 0 \leqslant J(u^{*\rho} + \rho e_i) - J(u^{*\rho}) = \rho F(u^{*\rho}) \cdot e_i + w(u^{*\rho}, \rho e_i) \\ 0 \leqslant J(u^{*\rho} - \rho e_i) - J(u^{*\rho}) = -\rho F(u^{*\rho}) \cdot e_i + w(u^{*\rho}, -\rho e_i) \end{cases}$$

Soit encore

$$\text{(3.8)} \qquad \frac{-w(u^{*\rho}, \rho e_i)}{\rho} \leqslant F(u^{*\rho}) \cdot e_i \leqslant \frac{w(u^{*\rho}, -\rho e_i)}{\rho}$$

Compte tenu de (3.3) il vient

$$\text{(3.9)} \qquad |F(u^{*\rho}) \cdot e_i| \leqslant k(u^{*\rho}) \rho^{\alpha-1} \|e_i\|^\alpha$$

Mais $\| u^{*\rho} \| \leqslant C$ donc $| k(u^{*\rho}) | \leqslant C_1$ et

$$\text{(3.10)} \qquad |F(u^{*\rho}) \cdot e_i| \leqslant C_1 \rho^{\alpha-1} [\alpha(N)]^\alpha$$

Soit $v \in V$ quelconque, alors il existe (C_i) tels que $| C_i | \leqslant C$ (C constante) avec :

$$\lim_{N=\infty} \left\| v - \sum_{i=1}^{N} C_i e_i \right\| = 0$$

Par conséquent

(3.11)

$$|F(u^{*\rho}) \cdot v| \leqslant \sum_{i=1}^{N} |C_i| \, |F(u^{*\rho}) \cdot e_i| + \left| F(u^{*\rho}) \cdot \left(v - \sum_{i=1}^{N} C_i e_i \right) \right|$$
$$\leqslant C \cdot N \cdot C_1 \cdot \rho^{\alpha-1} \cdot [\alpha(N)]^\alpha + \left| F(u^{*\rho}) \cdot \left(v - \sum_{i=1}^{N} C_i e_i \right) \right|$$

L'hypothèse $b)$ entraîne $\lim\limits_{N=\infty} \left| F(u^{*\rho}) \cdot \left(v - \sum_{i=1}^{N} C_i e_i \right) \right| = 0.$

Si l'on a (3.4) alors

$$\lim_{N=\infty} |F(u^{*\rho(N)}) \cdot v| = 0 \tag{3.12}$$

L'hypothèse *b*) entraîne encore (puisque $u^{*\rho(N)} \rightharpoonup s$ faiblement)

$$\lim_{N=\infty} (F(u^{*\rho(N)}) \cdot v) = F(s) \cdot v$$

Et nous obtenons

$$F(s) \cdot v = 0 \qquad \forall\, v \in V$$

Donc : $F(s) = \theta$, θ désignant la fonction nulle;

s est donc un point critique et par conséquent s est le point qui réalise le minimum; $s = u$.

On conclut de là que la suite $u^{*\rho(N)}$ elle-même converge faiblement vers u d'où la partie 1) du théorème.

Nous avons vu, dans la remarque 3.1 que J faiblement continue entraîne $\lim\limits_{N=\infty} j_N^{*\rho(N)} = j$ d'où le théorème.

Remarque 3.2. — Les théorèmes 2.1 et 3.1 sont valables si, à l'espace V, on associe un espace V_h, de dimension finie $N(h)$, et

$$p_h \in \mathcal{L}(V_h, V) \quad \text{tel que :}$$

$\bigcup\limits_h \{ p_h V_h \}$ soit dense dans V. Des exemples de telles approximations V_h, p_h, sont développées dans [1].

Pour le théorème 2.1, on est amené à considérer la fonction de $N(h)$ variables, définie par : $K(v_h) = J(p_h v_h)$, $v_h \in V_h$, et la démonstration est identique.

Le théorème 3.1 est valable ($u_h^{*\rho(h)}$ tend faiblement vers u dans V, $j_h^{*\rho(h)}$ tend vers j si J est faiblement continue) si J vérifie les hypothèses du § 1 et *a*), *b*), *c*) et si l'on a $\lim\limits_{h=0} N(h) \cdot (\rho(h))^{\alpha-1}(S(h))^{\alpha} = 0$.

4. VARIANTES. APPLICATIONS

On peut imaginer des variantes de la méthode I. En particulier, tous les théorèmes de convergence qui précèdent sont valables si les variations sont opérées comme suit. On ajoute $\pm\ \rho$ à la première composante de $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_N)$ et l'on continue le processus sur cette composante jusqu'à l'obtention de la stationnarité. Ensuite on passe à la seconde composante et on lui applique le processus, etc... jusqu'à la N-ième composante. On répète alors le procédé jusqu'à l'obtention de la stationnarité complète définie par (1.6).

Les deux procédés peuvent d'ailleurs être « mélangés ». Pour un ρ on peut utiliser la méthode I et pour la valeur de ρ suivante on peut utiliser la variante.

Concernant la méthode II, il semble que la façon la plus judicieuse de l'utiliser soit la suivante :

Par la méthode II on calcule $u_N^{*\rho(N)}$ jusqu'à la valeur N au-delà de laquelle la machine utilisée manquerait de mémoires. Pour cette valeur de N on fait tendre ρ vers 0 à partir de la valeur initiale $\rho(N)$.

De plus, si N est très grand, les temps de calculs vont être longs et il peut être utile de considérer la méthode I « par blocs ». Cela consiste, si $N = np$, à ajouter $+\rho$ puis $-\rho$ à des blocs (en nombre n) de p composantes.

Applications

1) Résolution de l'équation

$$Au = f \tag{4.1}$$

où $A \in \mathcal{L}(H, H)$, H espace de Hilbert, A^{-1} continue

On prend alors :

$$J(v) = \|Av - f\|_H^2 \tag{4.2}$$

Démontrons les hypothèses du § 1.

On vérifie facilement que :

a) La fonctionnelle J est continue.

b) J est strictement convexe.

c) On a

$$\lim_{\|v\| = \infty} J(v) = \infty.$$

Les résultats du § 2 sont donc applicables.

Vérifions maintenant les hypothèses du § 3.

a_1) Nous avons :

$$F(x) \cdot u = 2(Ax - f, Au)_H$$

a_2) De

$$\|A(v+u) - f\|^2 - \|Av - f\|^2 = 2(Av - f, Au) + \|Au\|^2$$

on tire :

$$w(v, u) = \|Au\|^2 \leqslant \|A\|^2 \cdot \|u\|^2$$

La condition (3.3) est vérifiée avec $k(x) = \|A\|^2 =$ constante et $\alpha = 2$.

a_3) La condition b du § 3 est également vérifiée car si

$$\begin{aligned} &x_n \to x \text{ faiblement et } u_n \to u \text{ fortement alors} \\ &Ax_n \to Ax \text{ faiblement car } A \in \mathcal{L}(H, H) \\ &Au_n \to Au \text{ fortement et donc} \end{aligned}$$

$$F(x_n) \cdot u_n = 2(Ax_n - f, Au_n) \to F(x) \cdot u = 2(Ax - f, Au)$$

d'où

Lemme 4.1. — La méthode II s'applique à la résolution de $Au = f$ avec $A \in \mathcal{L}(H, H)$, A^{-1} continue, H Hilbert.

2) Résolution de l'équation

(4.2) $Au = f$ où A est un opérateur *non-linéaire* de H dans lui-même, (H = Hilbert).

On prend alors

$$J(v) = \|Av - f\|^2 \tag{4.3}$$

et l'on suppose que A est tel que $J(v)$ soit strictement convexe et que

$$\lim_{\|v\| \to \infty} \|Av\|^2 = +\infty \tag{4.4}$$

alors

Lemme 4.2. — La méthode I converge.

Supposons de plus :

b_1) A est faiblement continue et le $w(v, u)$ de la formule

$$A(v + u) = Av + F(v) \cdot u + w(v, u)$$

vérifie

$$\|w(v, u)\| \leqslant C \|u\|^2 \tag{4.5}$$

(au lieu de l'exposant 2, on peut prendre α avec $\alpha > 1$) alors

Lemme 4.3. — On peut appliquer la méthode II au problème (4.3).

Il suffit de vérifier que les hypothèses du § 3 sont satisfaites.

A faiblement continue et w vérifiant (4.5) entraîne F fortement continu et compact [6].

Calculons grad $J(v)$.

$$\begin{aligned} \|A(v + u) - f\|^2 &- \|Av - f\|^2 \\ &= (A(v + u) - f, A(v + u) - f) - \|Av - f\|^2 \end{aligned} \tag{4.5}$$

Or $A(v + u) = Av + F(v) \cdot u + w(v, u)$.

(4.5) peut alors s'écrire :

$$\begin{aligned} \|F(v) \cdot u\|^2 + \|w(v, u)\|^2 &+ 2(Av - f, F(v) \cdot u) \\ &+ 2(Av - f, w(v, u)) + 2(F(v) \cdot u, w(v, u)) \end{aligned} \tag{4.6}$$

D'où

$$\text{grad } J(v) \cdot u = G(v) \cdot u = 2(Av - f, F(v) \cdot u)$$

D'autre part, nous avons

$$J(v + u) - J(v) = G(v) \cdot u + \Omega(v, u)$$

De (4.6), on déduit :

$$(4.7) \qquad \|\Omega(v, u)\| \leqslant \|F(v)\|^2 \|u\|^2 + \|w(v, u)\|^2 + 2\,\|Av - f\| \cdot \|w(v, u)\| \\ + 2\,\|F(v)\| \cdot \|u\| \cdot \|w(v, u)\|$$

Puisque $G(v) \cdot u = 2(Av - f, F(v) \cdot u)$, la continuité faible de A et la continuité forte de F entraînent la propriété suivante :

Si $v_n \to v$ faiblement et si $u_n \to u$ fortement alors

$$G(v_n) \cdot u_n \to G(v) \cdot u$$

La condition *b*) du § 3 est donc vérifiée.

Enfin, d'après (4.7)

$$(4.8) \qquad \|\Omega(v, u)\| \leqslant C\,\|u\|^2 \qquad \text{pour} \qquad v = u_N^{*\rho(N)}$$

En effet F étant compact l'ensemble des $F(u_N^{*\rho(N)})$ est borné ; la continuité faible de A montre que $\|Au_N^{*\rho(N)} - f\|$ est borné. Par suite, tous les termes de (4.7) sont majorés par une expression de la forme $C\,\|u\|^r$ avec $r \geqslant 2$.

On a donc bien (4.8).

De plus, la condition (4.4) entraîne

$$\lim_{\|v\| = \infty} J(v) = +\infty$$

et le lemme 4.3 est démontré.

5. RESULTATS NUMERIQUES

a) Résolution de l'équation intégrale singulière

$$u(x) + vp \int_{-1}^{1} \frac{u(t)}{x - t}\,\mathrm{d}t = f(x)$$

$f \in L^2(-1, 1)$, on cherche $u \in L^2(-1, 1)$.

On utilise les espaces V_h et l'on se ramène à la minimisation de la fonctionnelle

$$J_h(v) = h \sum_{p=-N+1}^{N-1} \left| u(ph) + \sum_{\alpha=-N+1}^{N-1} u(\alpha h) \cdot \mathrm{Log}\left[1 + \frac{1}{\left(\alpha - p - \frac{1}{2}\right)}\right] - f(ph) \right|^2$$

en prenant pour $p_h u_h$ la fonction constante par morceaux, égale à $u_h(\alpha h)$ sur l'intervalle $\left[\left(\alpha - \frac{1}{2}\right)h, \left(\alpha + \frac{1}{2}\right)h\right]$; ($u_h = (u_h(\alpha h))_{\alpha=-N+1}^{N-1}$ désigne un élément de V_h).

N = nb. de points sur $[-1, +1]$
Valeur initiale de $J = J(u^0) = 4{,}75$
Valeur initiale de ρ pour h fixé $= h$.

		$N = 16$	$N = 32$	$N = 64$	$N = 128$	$N = 256$
$\rho = 1/8$	$J(v)$	$6 \cdot 10^{-3}$				
	$\lvert u - v \rvert$	$4 \cdot 10^{-3}$				
	Ité.	11				
$\rho = 1/16$	$J(v)$	$1{,}4 \cdot 10^{-3}$	$2 \cdot 10^{-3}$			
	$\lvert u - v \rvert$	$3 \cdot 10^{-3}$	$2 \cdot 10^{-3}$			
	Ité.	2	2			
$\rho = 1/32$	$J(v)$	$1 \cdot 10^{-3}$	$6 \cdot 10^{-4}$	$6 \cdot 10^{-4}$		
	$\lvert u - v \rvert$	$3 \cdot 10^{-3}$	$1 \cdot 10^{-3}$	$6 \cdot 10^{-4}$		
	Ité.	2	3	2		
$\rho = 1/64$	$J(v)$	$1{,}7 \cdot 10^{-4}$	$2 \cdot 10^{-4}$	$1 \cdot 10^{-4}$	$2 \cdot 10^{-4}$	
	$\lvert u - v \rvert$	$3 \cdot 10^{-3}$	$8 \cdot 10^{-4}$	$3 \cdot 10^{-4}$	$1 \cdot 10^{-4}$	
	Ité.	4	4	3	2	
$\rho = 1/128$	$J(v)$	$6 \cdot 10^{-5}$	$3 \cdot 10^{-5}$	$5 \cdot 10^{-5}$	$5 \cdot 10^{-5}$	$5 \cdot 10^{-5}$
	$\lvert u - v \rvert$	$2 \cdot 10^{-3}$	$6 \cdot 10^{-4}$	$1 \cdot 10^{-4}$	$7 \cdot 10^{-5}$	$3 \cdot 10^{-5}$
	Ité.	2	3	4	3	2
$\rho = 1/256$	$J(v)$	$7 \cdot 10^{-6}$	$1 \cdot 10^{-5}$	$1 \cdot 10^{-5}$	$1 \cdot 10^{-5}$	$1 \cdot 10^{-5}$
	$\lvert u - v \rvert$	$2 \cdot 10^{-3}$	$6 \cdot 10^{-4}$	$1 \cdot 10^{-4}$	$5 \cdot 10^{-5}$	$2 \cdot 10^{-5}$
	Ité.	6	2	4	3	2
$\rho = 1/512$	$J(v)$	$1 \cdot 10^{-6}$	$3 \cdot 10^{-6}$	$3 \cdot 10^{-6}$	$3 \cdot 10^{-6}$	$2 \cdot 10^{-6}$
	$\lvert u - v \rvert$	$2 \cdot 10^{-3}$	$6 \cdot 10^{-4}$	$1 \cdot 10^{-4}$	$4 \cdot 10^{-5}$	$1 \cdot 10^{-5}$
	Ité.	3	5	3	4	4
$\rho = 1/1024$	$J(v)$	$4{,}6 \cdot 10^{-6}$	$6 \cdot 10^{-7}$	$8 \cdot 10^{-7}$	$8 \cdot 10^{-7}$	$8 \cdot 10^{-7}$
	$\lvert u - v \rvert$	$2 \cdot 10^{-3}$	$6 \cdot 10^{-4}$	$1 \cdot 10^{-4}$	$4 \cdot 10^{-5}$	$1 \cdot 10^{-5}$
	Ité.	3	5	3	3	3
$\rho = 1/2048$	$J(v)$	$2 \cdot 10^{-7}$	$3 \cdot 10^{-8}$	$1 \cdot 10^{-7}$	$2 \cdot 10^{-7}$	$1 \cdot 10^{-7}$
	$\lvert u - v \rvert$	$2 \cdot 10^{-3}$	$6 \cdot 10^{-4}$	$1 \cdot 10^{-4}$	$4 \cdot 10^{-5}$	$1 \cdot 10^{-5}$
	Ité.	3	3	3	3	3
$\rho = 1/4096$	$J(v)$				$4 \cdot 10^{-8}$	$1 \cdot 10^{-8}$
	$\lvert u - v \rvert$				$4 \cdot 10^{-5}$	$1 \cdot 10^{-5}$
	Ité.				4	3

Durée totale : 5 minutes sur 3 600 C.D.C.

On lira les résultats obtenus dans les tableaux. Pratiquement, on constate que les temps de calcul et les précisions sont sensiblement les mêmes que ceux obtenus par d'autres méthodes [3].

Les essais numériques ont été réalisés avec :

$$f(x) = 1 - x^2 + 2x + (x^2 - 1) \operatorname{Log} \left| \frac{x-1}{x+1} \right|$$

ce qui donne $u(x) = x^2 - 1$.

Notons que :

i) Si 90 % des composantes du vecteur u_h^ρ restent stationnaires alors on a considéré dans le programme que l'on a obtenu le point u_h^ρ de la méthode I.

ii) Pour h fixé, on arrête la décroissance de ρ (la décroissance de ρ est obtenue en divisant par 2) lorsque la différence entre deux valeurs successives de la fonctionnelle est inférieure ou égale à 10^{-8}.

iii) Pour chaque valeur de N et de ρ on donne

— la valeur de la fonctionnelle à minimiser notée $J(v)$;

— la norme de l'erreur notée $|u - v| = h \sum_\alpha |u_\alpha - v_\alpha|^2$ où u_α est la solution exacte calculée en αh et v_α la solution calculée au même point;

— le nombre d'itérations (notée Ité) nécessaires pour parvenir à la stationnarité dans les composantes.

(Voir tableau page 45).

b) Résolution de l'équation intégrale non linéaire

$$u(x) + \int_0^1 (x - y)(1 + e^{u(y)} \sin^2 y) \, dy = 0$$

En utilisant le même p_h que précédemment on ramène ce problème à la minimisation de

$$J_h(u) = \sum_{p=1}^{N-1} S_p^2$$

avec

$$S_p = u(ph) + ph \cdot L - M$$

où

$$L = 1 + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{N-1} e^{u(jh)} (h - \sin h \cos 2jh)$$

$$M = \frac{1}{2} + \sum_{j=1}^{N-1} e^{u(jh)} \left[\frac{jh^2}{2} - \frac{h}{4} (2j \sin h \cos 2jh + \sin 2jh \cdot \cos h) + \frac{\sin h \cdot \sin 2jh}{4} \right]$$

— N = nb. de points sur [0, 1]
— Valeur initiale de $J = J(u^0) = 1 \cdot 10^{-2}$.
— Valeur initiale de ρ pour h fixé $= h$.
— Stationnarité à 90 % dans les composantes et à 10^{-7} près pour la fonctionnelle.

	$N = 4$	$N = 8$	$N = 16$	$N = 32$	$N = 64$	$N = 128$
$\rho = 1/4$ $\mid \Delta_1 - \Delta_2 \mid$ $J(v)$ Ité.	 0 $1 \cdot 10^{-3}$ 2					
$\rho = 1/8$ $\mid \Delta_1 - \Delta_2 \mid$ $J(v)$ Ité.	 0 $1 \cdot 10^{-3}$ 3	 $1 \cdot 10^{-1}$ $1 \cdot 10^{-3}$ 2				
$\rho = 1/16$ $\mid \Delta_1 - \Delta_2 \mid$ $J(v)$ Ité.		 $1 \cdot 10^{-1}$ $3 \cdot 10^{-4}$ 2	 $5 \cdot 10^{-4}$ $1 \cdot 10^{-4}$ 2			
$\rho = 1/32$ $\mid \Delta_1 - \Delta_2 \mid$ $J(v)$ Ité.		 $1 \cdot 10^{-2}$ $8 \cdot 10^{-5}$ 2	 $7 \cdot 10^{-4}$ $5 \cdot 10^{-4}$ 3	 $2 \cdot 10^{-4}$ $7 \cdot 10^{-5}$ 2		
$\rho = 1/64$ $\mid \Delta_1 - \Delta_2 \mid$ $J(v)$ Ité.		 $1 \cdot 10^{-2}$ $1 \cdot 10^{-5}$ 3	 $3 \cdot 10^{-4}$ $3 \cdot 10^{-5}$ 2	 $2 \cdot 10^{-4}$ $6 \cdot 10^{-5}$ 1	 $4 \cdot 10^{-5}$ $1 \cdot 10^{-5}$ 1	
$\rho = 1/128$ $\mid \Delta_1 - \Delta_2 \mid$ $J(v)$ Ité.		 $1 \cdot 10^{-3}$ $3 \cdot 10^{-6}$ 2	 $3 \cdot 10^{-4}$ $2 \cdot 10^{-5}$ 1	 $1 \cdot 10^{-4}$ $3 \cdot 10^{-5}$ 2	 $1 \cdot 10^{-5}$ 8 1	 $5 \cdot 10^{-6}$ $7 \cdot 10^{-6}$ 3
$\rho = 1/256$ $\mid \Delta_1 - \Delta_2 \mid$ $J(v)$ Ité.		 $5 \cdot 10^{-4}$ $8 \cdot 10^{-7}$ 2	 $3 \cdot 10^{-4}$ $3 \cdot 10^{-6}$ 4	 $5 \cdot 10^{-5}$ $2 \cdot 10^{-5}$ 3	 $9 \cdot 10^{-6}$ $4 \cdot 10^{-6}$ 2	 $4 \cdot 10^{-6}$ $1 \cdot 10^{-6}$ 2
$\rho = 1/512$ $\mid \Delta_1 - \Delta_2 \mid$ $J(v)$ Ité.		 $5 \cdot 10^{-4}$ $3 \cdot 10^{-7}$ 2	 $2 \cdot 10^{-4}$ $1 \cdot 10^{-6}$ 3	 $6 \cdot 10^{-5}$ $1 \cdot 10^{-5}$ 4	 $8 \cdot 10^{-6}$ $3 \cdot 10^{-6}$ 2	 $2 \cdot 10^{-6}$ $2 \cdot 10^{-7}$ 2
$\rho = 1/1024$ $\mid \Delta_1 - \Delta^z \mid$ $J(v)$ Ité.			 $2 \cdot 10^{-4}$ $7 \cdot 10^{-7}$ 2	 $1 \cdot 10^{-5}$ $5 \cdot 10^{-6}$ 17	 $8 \cdot 10^{-6}$ $1 \cdot 10^{-6}$ 6	
				$1 \cdot 10^{-5}$ $4 \cdot 10^{-6}$ 5	$7 \cdot 10^{-6}$ $2 \cdot 10^{-7}$ 8	

La solution de l'équation est une droite mais, ne connaissant pas son équation, exacte, nous avons introduit, pour la vérification, les expressions

$$\Delta_j u = \frac{1}{h}(u((j+1)h) - u(jh)) \qquad j = 1, 2, \ldots, N-2$$

Ces quantités doivent être égales.

On pose aussi :

$$\Delta_1 = \operatorname*{Max}_j \Delta_j u$$

$$\Delta_2 = \operatorname*{Min}_j \Delta_j u$$

et l'on calcule $|\Delta_2 - \Delta_1|$ qui donne une idée de la valeur de l'approximation.

c) Résolution de l'équation aux dérivées partielles.

$$\begin{cases} u^m - \Delta u = f & \text{sur} \quad \Omega =]-1, 1[\times]-1, 1[\\ & \phantom{\text{sur} \quad} m \text{ impair} \\ u|_\Gamma = 0 & \end{cases}$$

avec

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

L'opérateur Δ est approché par

$$\Delta u \sim \frac{1}{h^2}(u_{i+1,j} + u_{i-1,j} + u_{i,j-1} + u_{i,j+1} - 4u_{ij})$$

$u_{i,j}$ est une approximation de $u(ih, jh)$.

Le problème se ramène à la minimisation de la fonctionnelle

$$J_h(u) = h^2 \sum_{i,j} \left| u_{ij}^m - \frac{1}{h^2}[u_{i+1,j} + u_{i-1,j} + u_{i,j-1} + u_{i,j+1} - 4u_{ij}] - f_{ij} \right|^2$$

avec $f_{ij} = f(ih, jh)$.

Remarques sur les résultats

D'une façon générale les essais ont été réalisés avec

i) stationnarité à 100 % dans les composantes (c'est-à-dire application complète de la méthode I);

ii) pour h fixé, on arrête la décroissance de ρ lorsque deux valeurs successives de la fonctionnelle diffèrent de 10^{-3} au plus.

$u(x) = (x^2 - 1)(y^2 - 1)$
Valeur initiale de $J = J(u^0) = 37 \cdot 5$
$m = 1$

		$N = 9$	$N = 49$	$N = 225$	$N = 961$
$\rho = 1/8$	$\lvert u - v \rvert$	$0 \cdot 1$			
	ΔJ	$3 \cdot 10^{-1}$			
	Ité.	8			
$\rho = 1/16$	$\lvert u - v \rvert$	$0 \cdot$	$7 \cdot 10^{-3}$		
	ΔJ	$3 \cdot 10^{-1}$	$1 \cdot 10^{-1}$		
	Ité.	2	4		
$\rho = 1/32$	$\lvert u - v \rvert$	$2 \cdot 10^{-2}$	$5 \cdot 10^{-3}$		
	ΔJ	$3 \cdot 10^{-0}$	$1 \cdot 10^{0}$		
	Ité.	9	4		
$\rho = 1/64$	$\lvert u - v \rvert$	$4 \cdot 10^{-3}$	$5 \cdot 10^{-3}$	$8 \cdot 10^{-4}$	
	ΔJ	$4 \cdot 10^{-1}$	$1 \cdot 10^{0}$	$1 \cdot 10^{1}$	
	Ité.	6	4	4	
$\rho = 1/128$	$\lvert u - v \rvert$	$1 \cdot 10^{-3}$	$4 \cdot 10^{-3}$	$7 \cdot 10^{-4}$	
	ΔJ	$1 \cdot 10^{-1}$	$2 \cdot 10^{-1}$	$2 \cdot 10^{0}$	
	Ité.	6	7	5	
$\rho = 1/256$	$\lvert u - v \rvert$	$2 \cdot 10^{-4}$	$4 \cdot 10^{-3}$	$7 \cdot 10^{-4}$	$7 \cdot 10^{-5}$
	ΔJ	$2 \cdot 10^{-2}$	$1 \cdot 10^{-1}$	$8 \cdot 10^{-1}$	10^{1}
	Ité.	6	9	6	7
$\rho = 1/512$	$\lvert u - v \rvert$	$6 \cdot 10^{-5}$	$3 \cdot 10^{-3}$	$6 \cdot 10^{-4}$	$6 \cdot 10^{-5}$
	ΔJ	$6 \cdot 10^{-3}$	$2 \cdot 10^{-2}$	$9 \cdot 10^{-3}$	$2 \cdot 10^{0}$
	Ité.	6	6	40	9
$\rho = 1/1024$	$\lvert u - v \rvert$	$2 \cdot 10^{-5}$	$2 \cdot 10^{-3}$	$5 \cdot 10^{-4}$	$6 \cdot 10^{-5}$
	ΔJ	$2 \cdot 10^{-3}$	$7 \cdot 10^{-2}$	$9 \cdot 10^{-3}$	$2 \cdot 10^{-2}$
	Ité.	6	43	116	7
$\rho = 1/2048$	$\lvert u - v \rvert$	$4 \cdot 10^{-6}$	$4 \cdot 10^{-4}$	$4 \cdot 10^{-4}$	$6 \cdot 10^{-5}$
	ΔJ	$4 \cdot 10^{-4}$	$4 \cdot 10^{-2}$	$5 \cdot 10^{-3}$	$3 \cdot 10^{-2}$
	Ité.	6	64	270	15
$\rho = 1/4096$	$\lvert u - v \rvert$		$1 \cdot 10^{-4}$	$9 \cdot 10^{-5}$	$6 \cdot 10^{-5}$
	ΔJ		$1 \cdot 10^{-2}$	$1 \cdot 10^{-2}$	$2 \cdot 10^{-3}$
	Ité.		57	1066	176
$\rho = 1/8192$	$\lvert u - v \rvert$		$2 \cdot 10^{-5}$	$5 \cdot 10^{-6}$	$5 \cdot 10^{-5}$
	ΔJ		$3 \cdot 10^{-3}$	$2 \cdot 10^{-3}$	$7 \cdot 10^{-4}$
	Ité.		76	1094	655

$m = 1$
$u(x) = \sin \pi x \cdot \sin \pi y$

Valeur initiale de $J = J(u^0) = 230$
Stationnarité totale dans les composantes
Stationnarité à 10^{-3} près pour la fonctionnelle.

		$N = 9$	$N = 49$	$N = 225$	$N = 961$
$\rho = 1$	$\lvert u - v \rvert$	$0 \cdot 0$			
	ΔJ	200			
	Ité.	2			
$\rho = 1/2$	$\lvert u - v \rvert$		$7 \cdot 10^{-2}$		
	ΔJ	Ne varie pas	$6 \cdot 10^{-1}$		
	Ité.		2		
$\rho = 1/4$	$\lvert u - v \rvert$	$6 \cdot 10^{-1}$	$4 \cdot 10^{-2}$		
	ΔJ	$1 \cdot 10^{1}$	$6 \cdot 10^{1}$		
	Ité.	2	4		
$\rho = 1/8$	$\lvert u - v \rvert$		$2 \cdot 10^{-2}$	$4 \cdot 10^{-3}$	
	ΔJ	Ne varie pas	$7 \cdot 10^{1}$	$4 \cdot 10^{0}$	
	Ité.		3	2	
$\rho = 1/16$	$\lvert u - v \rvert$		$2 \cdot 10^{-2}$	$3 \cdot 10^{-3}$	
	ΔJ	Ne varie pas	$1 \cdot 10^{-1}$	$1 \cdot 10^{2}$	
	Ité.		2	5	
$\rho = 1/32$	$\lvert u - v \rvert$	$5 \cdot 10^{-2}$	$8 \cdot 10^{-3}$	$2 \cdot 10^{-3}$	$2 \cdot 10^{-4}$
	ΔJ	$2 \cdot 10^{-1}$	$7 \cdot 10^{0}$	$6 \cdot 10^{1}$	$2 \cdot 10^{1}$
	Ité.	2	3	4	4
$\rho = 1/64$	$\lvert u - v \rvert$		$2 \cdot 10^{-3}$	$2 \cdot 10^{-3}$	$9 \cdot 10^{-5}$
	ΔJ	Ne varie pas	$4 \cdot 10^{0}$	$9 \cdot 10^{0}$	$1 \cdot 10^{2}$
	Ité.		4	6	5
$\rho = 1/128$	$\lvert u - v \rvert$		$9 \cdot 10^{-4}$	$1 \cdot 10^{-3}$	$7 \cdot 10^{-5}$
	ΔJ	Ne varie pas	$3 \cdot 10^{0}$	$1 \cdot 10^{0}$	$3 \cdot 10^{1}$
	Ité.		15	8	6
$\rho = 1/256$	$\lvert u - v \rvert$		$2 \cdot 10^{-3}$	$1 \cdot 10^{-4}$	$6 \cdot 10^{-5}$
	ΔJ	Ne varie pas	$2 \cdot 10^{-1}$	$5 \cdot 10^{-1}$	$3 \cdot 10^{0}$
	Ité.		14	91	4
$\rho = 1/512$	$\lvert u - v \rvert$	$5 \cdot 10^{-2}$	$2 \cdot 10^{-3}$	$1 \cdot 10^{-4}$	$3 \cdot 10^{-6}$
	ΔJ	$1 \cdot 10^{-4}$	$4 \cdot 10^{-4}$	$8 \cdot 10^{-4}$	$3 \cdot 10^{-3}$
	Ité.	2	20	156	1074
$\rho = 1/1024$	$\lvert u - v \rvert$				$3 \cdot 10^{-6}$
	ΔJ				$8 \cdot 10^{-4}$
	Ité.				1609

$m = 3$ stationnarité totale dans les composantes

$u(x) = (x^2 - 1)(y^2 - 1)$ stationnarité à 10^{-3} près pour la fonctionnelle

		$N = 0$	$N = 49$	$N = 225$
$\rho = 1/24$	$\lvert u - v \rvert$	$1 \cdot 10^{-1}$	$7 \cdot 10^{-3}$	
	ΔJ	$3 \cdot 10^{1}$	$1 \cdot 10^{1}$	
	Ité.	12	4	
$\rho = 1/32$	$\lvert u - v \rvert$	$3 \cdot 10^{-2}$	$5 \cdot 10^{-3}$	
	ΔJ	$3 \cdot 10^{0}$	$1 \cdot 10^{0}$	
	Ité.	6	3	
$\rho = 1/64$	$\lvert u - v \rvert$	$5 \cdot 10^{-4}$	$4 \cdot 10^{-3}$	$8 \cdot 10^{-4}$
	ΔJ	$1 \cdot 10^{0}$	$8 \cdot 10^{-1}$	$1 \cdot 10^{0}$
	Ité.	10	3	2
$\rho = 1/128$	$\lvert u - v \rvert$	$1 \cdot 10^{-4}$	$4 \cdot 10^{-3}$	$7 \cdot 10^{-4}$
	ΔJ	$2 \cdot 10^{-2}$	$1 \cdot 10^{-1}$	$2 \cdot 10^{0}$
	Ité.	4	7	5
$\rho = 1/256$	$\lvert u - v \rvert$	$3 \cdot 10^{-5}$	$3 \cdot 10^{-3}$	$7 \cdot 10^{-4}$
	ΔJ	$5 \cdot 10^{-3}$	$7 \cdot 10^{-2}$	$8 \cdot 10^{-1}$
	Ité.	4	15	6
$\rho = 1/512$	$\lvert u - v \rvert$	$9 \cdot 10^{-6}$	$8 \cdot 10^{-4}$	$6 \cdot 10^{-4}$
	ΔJ	$1 \cdot 10^{-3}$	$8 \cdot 10^{-2}$	$2 \cdot 10^{-2}$
	Ité.	4	45	30
$\rho = 1/1024$	$\lvert u - v \rvert$	$2 \cdot 10^{-6}$	$2 \cdot 20^{-4}$	$5 \cdot 10^{-4}$
	ΔJ	$3 \cdot 10^{-4}$	$3 \cdot 10^{-2}$	$1 \cdot 10^{-2}$
	Ité.	4	43	49
$\rho = 1/2048$	$\lvert u - v \rvert$		$7 \cdot 10^{-5}$	$5 \cdot 10^{-4}$
	ΔJ		$7 \cdot 10^{-3}$	$9 \cdot 10^{-3}$
	Ité.		41	97
$\rho = 1/4096$	$\lvert u - v \rvert$		$2 \cdot 10^{-5}$	$2 \cdot 10^{-4}$
	ΔJ		$1 \cdot 10^{-3}$	$1 \cdot 10^{-2}$
	Ité.		56	538
$\rho = 1/8192$	$\lvert u - v \rvert$		$5 \cdot 10^{-6}$	$6 \cdot 10^{-5}$
	ΔJ		$5 \cdot 10^{-4}$	$7 \cdot 10^{-3}$
	Ité.		36	686
$\rho = 1/16384$	$\lvert u - v \rvert$			$2 \cdot 10^{-5}$
	ΔJ			$2 \cdot 10^{-3}$
	Ité.			790

Cas $m = 1$. Pour les essais numériques, nous avons pris deux valeurs f_1 et f_2 de f, de façon à trouver les solutions correspondantes :

$$u_1 = (x^2 - 1)(y^2 - 1)$$

$$u_2 = \sin \pi x \cdot \sin \pi y$$

C'est le cas le moins intéressant car on résout une équation linéaire. On constate que la méthode donne de bons résultats mais les temps de calculs (5′ sur 3 600 C.D.C.) sont nettement plus longs qu'avec une méthode classique.

Cas $m = 3$. On résout une équation aux dérivées partielles non linéaire. La méthode dans ce cas est *particulièrement justifiée* car les résultats sont bons et les temps de calculs raisonnables (mêmes temps que pour l'équation linéaire).

D'une façon générale l'application de ces méthodes n'est intéressante que si le problème à résoudre est non linéaire.

Dans les trois tableaux qui suivent figurent, pour chaque valeur de ρ

— la quantité $|u - v|$ déjà décrite;

— ΔJ qui indique la diminution de J_h d'une valeur de ρ à la suivante;

— le nombre d'itérations (Ité) nécessaires à l'obtention de la stationnarité.

CONCLUSION

Pour les *équations* où des méthodes « traditionnelles » pourraient être malaisées, (équations non linéaires, par exemple) les méthodes somme toute rudimentaires mais *très directes* présentées ici, et qui sont de simples variantes ou adaptation de [2] mais appliquées à des situations différentes, conduisent à des résultats souvent « compétitifs » avec des méthodes « sophistiquées ».

BIBLIOGRAPHIE

[1] J. P. Aubin, Thèse, Paris, 1966.

[2] N. V. Banitchouk, V. M. Petrov, F. L. Tchernoussko, Résolution numérique de problèmes aux limites variationnels par la méthode des variations locales. *Journal de Calcul numérique et de Physique mathématique*, tome 6, n° 6, Moscou, 1966, pages 947 à 961.

[3] Y. Cherruault, Thèse, Paris, 1966.

[4] Y. Haugazeau, Thèse, Paris, 1968.

[5] J. L. Lions, *Équations différentielles opérationnelles* (Springer Verlag).

[6] Vainberg, *Variational methods for the study of non linear operators* (Holden Day).