REVUE FRANÇAISE D'INFORMATIQUE ET DE RECHERCHE OPÉRATIONNELLE

MICHEL VIOT

Théorème d'optimalité pour des systèmes stochastiques où la commande est adaptée à l'état

Revue française d'informatique et de recherche opérationnelle, tome 2, nº R2 (1968), p. 115-127

<http://www.numdam.org/item?id=M2AN_1968__2_2_115_0>

R.I.R.O.
(2e année, N° 10, 1968, p. 115-128)

THEOREME D'OPTIMALITE POUR DES SYSTEMES STOCHASTIQUES OU LA COMMANDE EST ADAPTEE A L'ETAT

par Michel VIOT [1]

Résumé. — *L'objet de ce travil est d'obtenir un critère d'optimalité du type Pontryagin pour des systèmes dynamiques continus perturbés par un bruit additif et où les commandes sont définies par une classe de processus aléatoires adaptés à l'état du système. Cette formulation permet de généraliser des résultats connus sur le contrôle optimal des systèmes linéaires perturbés par un bruit blanc.*

NOTATIONS

On désigne par $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$ un espace probabilisé. Une v.a. ξ sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$ sera une classe de fonctions $\mathcal{A}_-$ mesurables pour la relation d'équivalence $\underline{\underline{p.s.}}$ On pose $H = L^2_{\mathbf{R}}(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$: muni du produit scalaire $\xi, \eta \rightarrow \mathbf{E}(\xi\eta)$, H est un espace hilbertien réel. L'espace produit H^n sera muni de la structure hilbertienne produit.

Soit un élément A de $\mathcal{L}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^p)$. Il lui est associé un élément $A \otimes Id$ de $\mathcal{L}(H^n, H^p)$, Id étant l'application identique de H (identifier H^n à $R^n \otimes H$). Si X^i $(i = 1 \dots n)$ sont les composantes de l'élément X de H^n,

$$A_i^j (i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, p)$$

les composantes de A, les composantes de $Y = (A \otimes Id)X$ sont $Y^j = \sum_{i=1}^{n} A_i^j X^i$.

Par abus de notation $A \otimes Id$ sera noté A.

On supposera que toutes les sous-tribus $\mathcal{B}$ de $\mathcal{A}$ considérées par la suite contiennent la classe $\mathcal{N}$ des mesurables $\mathcal{P}$ — négligeables de $\mathcal{A}$.

(1) Faculté des Sciences de Caen et Institut de Recherche d'Informatique et d'Automatique.

Soit ξ une v.a. et $\mathcal{B}$ une sous-tribu de $\mathcal{A}$; on dit que ξ est $\mathcal{B}$ — mesurable si tous les représentants de ξ sont des fonctions $\mathcal{B}$ — mesurables.

De manière générale, si $X : t \in I \rightarrow X(t)$ est un processus fonction à valeurs dans H^n et si $(\mathcal{B}_t)_{t \in I}$ désigne une famille croissante de sous-tribus de $\mathcal{A}$, on dit que le processus X est adapté à cette famille de sous-tribus, si :

$$\forall\, t \in I, \qquad \forall\, i = 1 \dots n, \qquad \text{la v.a. } X^i(t) \text{ est } \mathcal{B}_t \text{ — mesurable.}$$

En particulier si $\mathcal{B}_t = \sigma(X(s), s \leqslant t)$ désigne la sous-tribu de $\mathcal{A}$ engendrée par les v.a. $X^i(s)$ pour $s \in I$ et $s \leqslant t$, le processus X est adapté à $(\mathcal{B}_t)_{t \in I}$.

Enfin, si $X : t \in I \rightarrow X(t)$, et $U : t \in I \rightarrow U(t)$ sont deux processus fonctions à valeurs respectivement dans H^n et H^p, on dit que le processus U est adapté au processus X, si le processus U est adapté à la famille de sous-tribus $\mathcal{B}_t = \sigma(X(s), s \leqslant t)$.

§ 1. — SYSTEMES STOCHASTIQUES ETUDIES

On désigne par I un intervalle de $\mathbf{R}$ contenant $[0, T]$; par $(\mathcal{A}_t)_{t \in I}$ une famille croissante de sous-tribus de $\mathcal{A}$; et par $t \rightarrow Q(t)$ un processus fonction, continu de I dans H^n, adapté à la famille $(\mathcal{A}_t)$ et vérifiant $Q(0) = 0$.

On considère un système stochastique dont l'état $X(t)$ à l'instant t vérifie l'équation :

$$\text{(I-1)} \qquad \frac{\mathrm{d}[X(t) - Q(t)]}{\mathrm{d}t} \overset{(H^n)}{=\!=} f(X(t), U(t), t)$$

Avec les hypothèses suivantes :

a) L'application $f : x, u, t \rightarrow f(x, u, t)$ est une application continue et continûment dérivable en x, de $H^n \times H^p \times I$ dans H^n.

b) Pour tout $t \in I$ et toute sous-tribu $\mathcal{B}$ de $\mathcal{A}_t$ on a : x et u, $\mathcal{B}$ - mesurables, entraînent $f(x, u, t)\mathcal{B}$ - mesurable.

c) On suppose donnée une fois pour toute une condition initiale $X(0) = X_0$ $\mathcal{A}_0$ — mesurable, au système $(I — 1)$.

Exemple : Soit $t \in I \rightarrow W(t)$ un mouvement brownien de dimension n, adapté à la famille de sous-tribu $(\mathcal{A}_t)$ et vérifiant $W(0) = 0$.

Soit par ailleurs $t \rightarrow A(t)$ et $t \rightarrow B(t)$ des applications continues de I dans respectivement $\mathcal{L}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n)$ et $\mathcal{L}(\mathbf{R}^p, \mathbf{R}^p)$.

L'équation différentielle stochastique au sens d'Ito :

$$\mathrm{d}X(t) = [A(t)X(t) + B(t)U(t)]\,\mathrm{d}t + \mathrm{d}W(t)\,; \qquad X(0) = X_0$$

peut encore se mettre sous la forme :

$$\frac{\mathrm{d}[X(t) - W(t)]}{\mathrm{d}t} \overset{(H^n)}{=} A(t)X(t) + B(t)U(t) \,; \qquad X(0) = X_0$$

Dans l'équation (I-1) le terme $Q(t)$ représentera donc le *bruit du système.* Jusqu'à maintenant, on a surtout étudié les cas où $Q(t)$ était un mouvement brownien ou une intégrale stochastique par rapport à un mouvement brownien [par exemple [1]].

Définition des Commandes

Le modèle proposé s'applique notamment à certains systèmes dynamiques à valeurs dans $\mathbf{R}^n$ perturbés par un bruit aléatoire $Q(t)$. Pour contrôler de tels systèmes, on est amené à introduire des commandes qui seront des processus fonctions $t \to U(t)$, soumis aux deux restrictions techniques suivantes :

a) Le bruit $Q(t)$ étant le seul générateur d'événements aléatoires du système, les commandes ne devront dépendre au plus, que *des informations initiales* connues de l'observateur et des *événements aléatoires liés au bruit.*

b) Dans la pratique, les propriétés statistiques du bruit sont inconnues de l'observateur. On ne dispose que de mesures faites sur l'état du système, ce qui impose un contrôle du type *contrôle en boucle fermé.*

Ces remarques nous conduisent aux définitions suivantes :

Pour $t \in [0, T]$ posons $\mathcal{B}_t = \sigma\{X_0 ; Q(s), 0 \leqslant s \leqslant t\}$.

$\mathcal{B}_t$ représente l'information maximum dont peut disposer l'observateur à l'instant t.

Définition 1 :

On appelle commande du système (I-1), *tout processus fonction* $t \to U(t)$ *continu par morceaux de* $[0, T]$ *dans* H^p *et adapté à la famille de sous-tribus,* $(\mathcal{B}_t)_{t \in [0,T]}$.

Une commande U *est dite admissible, si la solution correspondante* $X(t)$ *du système* (I-1), *est définie sur l'intervalle* $[0, T]$.

En tout instant t_0 de discontinuité d'une commande U, on suppose que les limites à droite et à gauche de $U(t)$ existent et sont $\mathcal{B}_{t_0}$ — mesurables.

Par convention, on pose :

$$\text{(I-2)} \qquad \begin{cases} U(t_0) = U(t_0^+) = \lim\limits_{\substack{t \to t_0 \\ t > t_0}} U(t) \\[2ex] U(T) = U(T^-) = \lim\limits_{\substack{t \to T \\ t < T}} U(t) \end{cases}$$

Définition 2 :

Soit (X, U) le couple formé d'une commande U et de la solution correspondante $X(t)$ du système (I-1).

On dit que le couple (X, U) est adapté jusqu'à l'instant t_0 $(0 < t_0 \leqslant T)$, si $X(t)$ est défini sur l'intervalle $[0, t_0]$ *et si le processus $U(t)$ est adapté au processus $X(t)$ sur cet intervalle; c'est-à-dire si on a :*

$\forall\ t \in [0, t_0]$: *$U(t)\ \mathfrak{X}_t$ — mesurable où $\mathfrak{X}_t = \sigma(X(s); 0 \leqslant s \leqslant t)$*

Le couple (X, U) est dit, adapté, s'il est adapté jusqu'à l'instant T.

La notion de couple adapté représente une généralisation de la notion de contrôle en boucle fermé pour les systèmes stochastiques.

Lemme 1. — *Soit U une commande telle que la solution $X(t)$ correspondante du système* (I-1), *soit définie sur l'intervalle* $[0, t_0] \subset [0, T]$.

Le processus fonction $X(t)$ est alors adapté à la famille de sous-tribus $(\mathfrak{B}_t)_{t \in [0, t_0]}$.

Cette propriété découle sans difficulté de l'hypothèse *b*) faite sur l'application $x, u, t \to f(x, u, t)$.

Lemme 2. — *Soit U une commande telle que la solution $X(t)$ correspondante du système* (I-1), *soit définie sur l'intervalle* $[0, t_0] \subset [0, T]$.

Pour que le couple (X, U) soit adapté jusqu'à l'instant t_0, il faut et il suffit que l'on ait $\mathfrak{X}_t = \mathfrak{B}_t$ pour tout $t \in [0, t_0]$, avec :

$$\mathfrak{X}_t = \sigma(X(s), 0 \leqslant s \leqslant t)$$

Démonstration :

La condition est évidemment suffisante. D'après le lemme 1, on a de manière générale : $\mathfrak{X}_t \subset \mathfrak{B}_t$.

Par ailleurs, on peut écrire pour $0 \leqslant t \leqslant t_0$:

$$X(t) = X_0 + \int_0^t f(X(s), U(s), s)\, ds + Q(t)$$

Donc, si on suppose le couple (X, U) adapté jusqu'à l'instant t_0, le vecteur aléatoire $f(X(s), U(s), s)$ est $\mathfrak{X}_t$ — mesurable pour $0 \leqslant s \leqslant t$; ce qui implique que $Q(t)$ est $\mathfrak{X}_t$ — mesurable. D'où l'inclusion inverse : $\mathfrak{X}_t \supset \mathfrak{B}_t$, $\forall\ t \in [0, t_0]$.

Remarque

Il existe toujours des couples adaptés : il suffit par exemple de considérer le couple (X, U) où U est une commande déterministe, c'est-à-dire une application $t \to U(t)$ de $[0, T]$ dans $\mathbf{R}^p$.

Par contre, tous les couples (X, U) ne sont pas nécessairement adaptés, comme le montre le contre-exemple suivant. On prend pour équation du système :

$$\frac{\mathrm{d}[X(t) - Q(t)]}{\mathrm{d}t} \overset{(H)}{=\!=} U(t)$$

avec

$$\begin{cases} X_0 = 0 \\ Q(t) \text{ continûment dérivable de } [O, T] \text{ dans } H \end{cases}$$

Cette équation peut encore s'écrire :

$$\frac{\mathrm{d}X(t)}{\mathrm{d}t} \overset{(H)}{=\!=} U(t) + Q'(t)$$

où $Q'(t)$ est la dérivée de $Q(t)$.

Si on prend $U(t) = - Q'(t)$, le processus $U(t)$ est adapté à $Q(t)$, donc définit bien une commande.

Et comme $X(t) = 0$ pour tout t, le couple (X, U) ainsi obtenu, n'est pas adapté.

§ II. — THEOREME DE DENSITE POUR LES COUPLES ADAPTES

On désigne par $\Gamma(T)$ (respectivement $\Gamma^*(T)$) l'ensemble des états du système (I-1), accessibles à l'instant T, à partir de X_0 et d'une commande admissible (respectivement d'un couple adapté).

L'objet de ce paragraphe est de démontrer le théorème suivant :

Théorème 1 :

$\Gamma^*(T)$ est dense dans $\Gamma(T)$ muni de la topologie induite par H^n.

La démonstration de ce théorème repose sur l'étude de la modification d'une commande admissible, que nous allons introduire maintenant :

On désigne par $\tilde{U}$ une commande admissible du système (I-1), par

$$t_1 < t_2 < \dots < t_k,$$

l'ensemble des instants de discontinuité de $\tilde{U}$. On pose de plus $t_0 = 0$ et $t_{k+1} = T$.

Soit par ailleurs $\theta > 0$ tel que $\theta < \inf \{ t_{i+1} - t_i \mid i = 1 \dots k \}$

On note U_θ la commande définie par :

$$\text{(II-1)} \quad U_\theta(t) = \begin{cases} \tilde{U}(t_i) & \text{si} \quad t_i \leqslant t < t_i + \theta \\ \tilde{U}(t - \theta) & \text{si} \quad t_i + \theta \leqslant t < t_{i+1} \end{cases} \qquad \text{pour} \qquad i = 0, 1, \dots, k$$

On rappelle que $\tilde{U}(t_i)$ est donné par la relation (I-2).

Par construction, la commande U_θ admet les mêmes instants de discontinuité que la commande $\tilde{U}$; de plus U_θ tend uniformément sur [0, T vers $\tilde{U}$, lorsque θ tend vers 0.

On dira que U_θ est la commande $\tilde{U}$ modifiée par le temps de retard θ.

Lemme 3. — *Soit $\tilde{U}$ une commande admissible et $\tilde{X}(t)$ la solution du système* (I-1) *associée à $\tilde{U}$. Soit par ailleurs, U_θ la commande $\tilde{U}$ modifiée par le temps de retard* $\theta > 0$, *et $X_\theta(t)$ la solution correspondante de* (I-1).

Il existe $\eta > 0$ *tel que pour* $0 < \theta \leqslant \eta$, $X_\theta(t)$ *soit défini sur l'intervalle* $[0, T]$. *De plus, on a pour tout* $t \in [0, T]$:

$$\lim_{\theta \downarrow 0} X_\theta(t) \overset{(Hn)}{=\!=} \tilde{X}(t) \tag{II-2}$$

Démonstration

Soit L l'espace des commandes admettant les mêmes instants de discontinuité que $\tilde{U}$. Muni de la norme uniforme $\|U\|_\infty = \sup_{t \in [0,T]} \|U(t)\|_{H^p}$, L est un espace de Banach.

Pour $y \in H^n$, $U \in L$ et $t \in [0, T]$, posons :

$$F(y, U, t) = f(y + Q(t), U(t), t)$$

L'application $y, U, t \to F(y, U, t)$ est continue par morceaux sur

$$H^n \times L \times [0, T],$$

et de plus continûment dérivable par morceaux, par rapport à y. Considérons l'équation différentielle dépendant du paramètre $U \in L$:

$$y' \overset{(H^n)}{=\!=} F(y, U, t) \tag{II-3}$$

Dire que $Y(t)$ est solution de (II-3) pour les conditions initiales $(0, X_0)$ et la valeur $U \in L$, du paramètre, est équivalent à dire que $X(t) = Y(t) + Q(t)$, est solution de (I-1) pour les conditions initiales $(0, X_0)$ et la commande $U(t)$.

En particulier $\tilde{Y}(t) = \tilde{X}(t) - Q(t)$ est la solution de (II-3) pour les conditions initiales $(0, X_0)$ et la valeur $\tilde{U}$ du paramètre. De plus $\tilde{Y}(t)$ est défini sur $[0, T]$ car $\tilde{U}$ est par hypothèse une commande admissible.

On sait alors d'après des résultats connus sur les équations différentielles dépendant d'un paramètre que :

Il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $U \in B_\varepsilon = \{ U \in L \mid \|U - \tilde{U}\|_\infty < \varepsilon \}$, la solution $Y(t, U)$ de (II-3) pour les conditions initiales (O, X_0) et la valeur U du paramètre, est également définie sur $[O, T]$. De plus, l'application $t, u \to Y(t, U)$ est alors continue sur $[O, T] \times B_\varepsilon$.

Comme par construction $\|U_0 - \tilde{U}\|_\infty$ tend vers 0 pour $\theta \downarrow 0$, il existe $\eta > 0$ tel que pour $0 < \theta \leqslant \eta$ on ait $U_\theta \in B_\varepsilon$.

Dans ces conditions $X_\theta(t) = Y(t, U_\theta) + Q(t)$ est également défini sur $[O, T]$. Enfin la continuité de l'application $t, U \to Y(t, U)$ implique :

$$\lim_{\theta \downarrow 0} X_\theta(t) = \lim_{\theta \downarrow 0} [Y(t, U_\theta) + Q(t)] = \tilde{Y}(t) + Q(t) = \tilde{X}(t).$$

pour tout $t \in [O, T]$.

Lemme 4. — *Soit $\tilde{U}$ une commande admissible et U_θ la commande $\tilde{U}$ modifiée par le temps de retard $\theta > 0$. Désignons par $X_\theta(t)$ la solution du système* (I-1) *associée à la commande U_θ.*

Il existe $\eta > 0$ tel que pour $0 < \theta \leqslant \eta$, le couple (X_θ, U_θ) soit adapté.

Démonstration

D'après le lemme 3, il existe $\eta_1 > 0$ tel que pour $0 < \theta \leqslant \eta_1$, U_θ soit une commande admissible.

Posons

$$\eta = \min \left\{ \eta_1 ; \frac{t_{i+1} - t_i}{2}, i = 0, 1 \dots k \right\}$$

Il s'agit de montrer que le processus $U_\theta(t)$ est adapté au processus $X_\theta(t)$ pour $0 < \theta \leqslant \eta$.

Comme pour $0 \leqslant t \leqslant \theta$; $U_\theta(t) = \tilde{U}(0)$, le couple (X_θ, U_θ) est au moins adapté jusqu'à l'instant θ.

Supposons ce couple adapté jusqu'à l'instant τ où $\theta \leqslant \tau \leqslant T - \theta$. Nous allons montrer que cela entraîne que (X_θ, U_θ) est en fait adapté jusqu'à l'instant $\tau + \theta$, ce qui terminera la démonstration du lemme.

Supposons τ compris entre les instants t_i et t_{i+1} de discontinuité de $\tilde{U}$, avec tout d'abord

a) $t_i + \theta \leqslant \tau < t_{i+1} - \theta$.

Posons $\mathcal{X}_t = \sigma(X_\theta(s), 0 \leqslant s \leqslant t)$. On sait alors que :

$$\begin{cases} U_\theta(t) = \tilde{U}(t - \theta) & \text{pour} \quad \tau \leqslant t \leqslant \tau + \theta \\ \mathcal{X}_s \quad = \mathcal{B}_s & \text{pour} \quad 0 \leqslant s \leqslant \tau \qquad \text{(lemme 2)} \end{cases}$$

En conséquence si $\tau \leqslant t \leqslant \tau + \theta$; $U_\theta(t)$ est $\mathcal{B}_{t-\theta}$-mesurable donc $\mathcal{X}_{t-\theta}$ -mesurable (car $t - \theta \leqslant \tau$)

Et *a fortiori* $U_\theta(t)$ est $\mathcal{X}_t$-mesurable.

(b) $t_{i+1} - \theta \leqslant \tau < t_{i+1} + \theta$.

Le même raisonnement que précédemment montre que le couple (X_θ, U_θ) est en fait adapté jusqu'à l'instant t_{i+1}.

Par ailleurs si $t_{i+1} \leqslant t < t_{i+1} + \theta$ on a par construction :

$$U_\theta(t) = \tilde{U}(t_{i+1})$$

Et ces 2 résultats entraînent que le couple (X_θ, U_θ) est adapté jusqu'à l'instant $t_{i+1} + \theta$.

Démonstration du théorème 1

Désignons par $\tilde{U}$ une commande admissible, par $\tilde{X}(t)$ la solution correspondante du système (I-1), par U_θ la commande $\tilde{U}$ modifiée par le temps de retard $\theta > 0$ et par $X_\theta(t)$ la solution correspondante du système (I-1).

D'après le lemme 4, il existe $\eta > 0$ tel que pour $0 < \theta \leqslant \eta$, le couple (X_θ, U_θ) soit adapté.

Par ailleurs, d'après (II-2) on a :

$$\lim_{\theta \downarrow 0} X_\theta(T) = \tilde{X}(T)$$

Ce qui montre que $\Gamma^*(T)$ est dense dans $\Gamma(T)$ muni de la topologie induite par H^n.

§ III. — CRITERES D'OPTIMALITE

1. Critère d'optimalité d'une commande admissible

Soit g une fonction de classe C^1 sur H^n. Une commande admissible $\tilde{U}$ à laquelle est associée la trajectoire $\tilde{X}(t)$ est dite maximale pour le critère final g, si g admet un maximum global sur $\Gamma(T)$ au point $\tilde{X}(t)$.

Soit $\tilde{U}$ une commande admissible maximale vérifiant de plus $g'(X(T)) \neq 0$. On désigne par $\tilde{P}(t)$ la solution du système adjoint :

$$\text{(III-1)} \qquad \begin{cases} d\dfrac{\tilde{P}(t)}{dt} = -f_1'^*(\tilde{X}(t), \tilde{U}(t), t)\tilde{P}(t) \\ \tilde{P}(T) = g'(\tilde{X}(T)). \end{cases}$$

Théorème 2 :

Pour qu'une commande admissible $\tilde{U}$ soit maximale, il est nécessaire qu'en tout point t de continuité de $\tilde{U}$ on ait :

(III-2)

$$\langle f(\tilde{x}(t), \tilde{U}(t), t), \tilde{P}(t) \rangle_{H^n} = \max \left\{ \langle f(\tilde{X}(t), u, t), \tilde{P}(t) \rangle_{H^n} \;\middle|\; \begin{array}{l} u \in H^p \\ u\ \mathcal{B}_t\text{-mesurable} \end{array} \right\}$$

Démonstration

Soit t_0 un instant de continuité de $\tilde{U}$, différent de 0. On se donne $\varepsilon > 0$, tel que $t_0 - \varepsilon$ soit positif et que $\tilde{U}$ soit continue dans l'intervalle $[t_0 - \varepsilon, t_0]$.

Pour $u \in H^p$, $u\ \mathcal{B}_{t_0-\varepsilon}$-mesurable et pour $0 < \tau \leqslant \varepsilon$, on pose :

$$U_\tau(t) = \begin{cases} u & \text{si} \quad t \in [t_0 - \tau, t_0[\\ \tilde{U}(t) & \text{si} \quad t \in [0, t_0 - \tau[\cup [t_0, T] \end{cases}$$

Le processus $U_\tau(t)$ définit encore une commande et par un raisonnement analogue à [2] p. 375-378 on obtient :

$$\langle f(\tilde{X}(t_0), \tilde{U}(t_0), t_0), \tilde{P}(t_0) \rangle_{H^n} \geqslant \langle f(\tilde{X}(t_0), u, t_0), \tilde{P}(t_0) \rangle_{H^n}$$

pour tout $u \in H^p$, $u\ \mathcal{B}_{t_0-\varepsilon}$-mesurable.

Soit maintenant $u \in H^p$, $u\ \mathcal{B}_{t_0}$-mesurable : u est limite dans H^p de la suite

$$u_n = E^{\mathcal{B}_{t_n}}(u) \text{ où } t_n = t - \frac{1}{n}\cdot$$

Et par continuité, on obtient ainsi le critère III-2.

2. Critère d'optimalité pour un couple adapté

Soit g un critère final : un couple adapté $(\tilde{X}, \hat{U})$ est dit maximal si $g(\tilde{X}(T))$ est un maximum global de la fonction g sur $\Gamma^*(T)$.

D'après le théorème 1, si $(\tilde{X}, \tilde{U})$ est un couple adapté maximal, la commande admissible $\tilde{U}$ est également maximale pour le critère final g.

D'où le critère :

Théorème 3 :

Pour qu'un couple adapté $(\tilde{X}, \tilde{U})$ vérifiant de plus $g'(\tilde{X}(T)) \neq 0$, soit maximal, il est nécessaire qu'en tout instant t de continuité de $\tilde{U}$ on ait :

$$\langle f(\tilde{X}(t), \tilde{U}(t), t), \tilde{P}(t) \rangle_{H^n} = \max \left\{ \langle f(\tilde{X}(t), u, t), \tilde{P}(t) \rangle_{H^n} \;\middle|\; \begin{array}{l} u \in H^p \\ u\ \mathcal{X}_t\text{-mesurable} \end{array} \right\}$$

où $\mathcal{X}_t = \sigma(\tilde{X}(s), 0 \leqslant s \leqslant t)$.

§ IV. — APPLICATION AUX SYSTEMES STOCHASTIQUES LINEAIRES

Dans ce paragraphe, on considère des systèmes stochastiques dont l'état vérifie l'équation :

$$\text{(IV-1)} \qquad \frac{\mathrm{d}[X(t) - Q(t)]}{\mathrm{d}t} = A(t)X(t) + B(t)U(t)\,; \qquad X(0) = X_0$$

où les applications $t \rightarrow A(t)$ et $t \rightarrow B(t)$ sont continues de $[O, T]$ dans respectivement $\mathcal{L}(\mathbf{R}^p, \mathbf{R}^n)$ et $\mathcal{L}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n)$.

De tels systèmes vérifient les conditions du § 1. De plus la solution de (IV-1) est donnée par :

$$\text{(IV-2)} \quad X(t) = \Phi(t, 0)X_0 + \int_0^t \Phi(t, s) \left\{ A(s)Q(s) + B(s)U(s) \right\} \mathrm{d}s + Q(t)$$

où $\Phi(t, t_0)$ est la résolvante du système linéaire dans $\mathbf{R}^n$:

$$d\frac{x(t)}{\mathrm{d}t} = A(t)x(t)$$

Dans le cas particulier où le bruit $Q(t)$ est une martingale, la relation (IV-2) peut encore s'écrire :

$$\text{(IV-2')} \quad X(t) = \Phi(t, 0)X_0 + \int_0^t \Phi(t, s)B(s)U(s)\,\mathrm{d}s + \int_0^t \Phi(t, s)\,\mathrm{d}Q(s)$$

avec :

$$\left(\int_0^t \Phi(t, s)\,\mathrm{d}Q(s)\right)^i = \sum_{j=1}^n \int_0^t \Phi_j^i(t, s)\,\mathrm{d}Q^j(s).$$

Par la suite, on cherchera des conditions pour qu'un couple adapté du système (IV-1) minimise la fonction de coût :

$$\text{(IV-3)} \qquad C(U) = \int_0^T \mathbf{E}\{X(t)'\, M(t)X(t)\} + \mathbf{E}\{U(t)'\, N(t)U(t)\}\,\mathrm{d}t$$

Les applications $t \to M(t)$ et $t \to N(t)$ sont supposées continues de $[O, T]$ dans respectivement $\mathcal{L}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n)$ et $\mathcal{L}(\mathbf{R}^p, \mathbf{R}^p)$ avec de plus pour tout t :

$$\begin{cases} M(t) \text{ semi-définie positive et symétrique} \\ N(t) \text{ définie positive} \end{cases}$$

Pour simplifier les notations, on pose :

$$\text{(IV-4)} \qquad \begin{cases} \|X(t)\|_M^2 = \mathbf{E}(X(t)'\, M(t)X(t)) \\ \|U(t)\|_N^2 = \mathbf{E}(U(t)'\, N(t)U(t)) \\ \langle X(t), \delta X(t) \rangle_M = \mathbf{E}(X(t)'\, M(t)\delta X(t)) \end{cases}$$

Proposition 1

Pour qu'un couple adapté $(\tilde{X}, \tilde{U})$ du système (IV-1) *minimise $C(U)$ il faut et il suffit qu'en tout point de continuité de $\tilde{U}$ on ait :*

$$\langle B(t)\tilde{U}(t), \tilde{P}(t) \rangle - \|\tilde{U}(t)\|_N^2$$
$$= \max \left\{ \langle B(t)u, \tilde{P}(t) \rangle - \|u\|_N^2 \;\Big|_{u\,\mathcal{B}_t-\text{mesurable}}^{u \in H^p} \right\}$$

où $P(t)$ est la solution du système adjoint :

$$d\frac{\tilde{P}(t)}{dt} = -A(t)'\,\tilde{P}(t) + 2M(t)\,\tilde{X}(t)\,; \qquad \tilde{P}(T) = 0$$

Démonstration. — La condition est nécessaire :

On considère le système défini dans H^{n+1} (en identifiant **R** à un sous-espace fermé de H), par les équations :

$$\text{(IV-5)} \qquad \begin{cases} d\dfrac{[X(t) - Q(t)]}{dt} = A(t)X(t) + B(t)U(t)\,; & X(0) = X_0 \\[2ex] d\dfrac{Y(t)}{dt} = \|X(t)\|_M^2 + \|U(t)\|_N^2\,; & Y(0) = 0 \end{cases}$$

Le couple $(\tilde{X}, \tilde{U})$ minimise $C(U)$ si et seulement si $(\tilde{X}, \tilde{U})$ est un couple adapté pour le système (IV-5), optimal pour le critère final $W \overset{H^{n+1}}{=\!=} \left[\dfrac{0}{-\mathbf{1}}\right]$ ($\mathbf{1}$ élément unité de H).

La condition nécessaire s'obtient alors par application du théorème 3 au système (IV-5).

La condition est suffisante :

Soit $(\tilde{X}, \tilde{U})$ et $(\tilde{X} + \delta X, \tilde{U} + \delta U)$ deux couples adaptés. On a :

$$\langle \tilde{P}(t), A(t)\delta X(t) + B(t)\delta U(t) \rangle =$$

$$= \langle \tilde{P}(t), \frac{d}{dt}\delta X(t) \rangle$$

$$= \frac{d}{dt}\langle \tilde{P}(t), A(t)\delta X(t) \rangle - \langle \frac{d\tilde{P}(t)}{dt}, \delta X(t) \rangle$$

$$= \frac{d}{dt}\langle \tilde{P}(t), A(t)\delta X(t) \rangle + \langle \tilde{P}(t), A(t)\delta X(t) \rangle - 2\langle \tilde{X}(t), \delta X(t) \rangle_M$$

En utilisant la relation :

$$\|\tilde{X}(t) + \delta X(t)\|_M^2 - \|\tilde{X}(\ )\|_M^2 = 2\langle \tilde{X}(t), \delta X(t) \rangle_M + \|\delta X(t)\|_M^2$$

On obtient la majoration :

$$\langle \tilde{P}(t), B(t)\delta U(t) \rangle \geqslant \frac{d}{dt}\langle \tilde{P}(t), \delta X(t) \rangle - [\|\tilde{X}(t) + \delta X(t)\|_M^2 - \|\tilde{X}(t)\|_M^2]$$

Posons

$$H(U, t) = \langle B(t)U(t), \tilde{P}(t) \rangle - \|U(t)\|_N^2.$$

On a dans ces conditions :

$$\|\tilde{X} + \delta X(t)\|_M^2 - \|\tilde{X}(t)\|_M^2 + \|\tilde{U}(t) + \delta U(t)\|_N^2 - \|\tilde{U}(t)\|_N^2 \geqslant$$

$$\geqslant \frac{d}{dt}\langle \tilde{P}(t), \delta X(t) \rangle - [H(\tilde{U} + \delta U, t) - H(\tilde{U}, t)]$$

Ce qui donne par intégration de O à T :

$$C(\tilde{U}+\partial U)-C(\tilde{U}) \geqslant \int_0^T [-H(\tilde{U}+\delta U, t)+H(\tilde{U}, t)]\,\mathrm{d}t$$

Donc si $(\tilde{X}, \tilde{U})$ est un couple vérifiant les hypothèses de la proposition 1, on a pour tout autre couple adapté $(\tilde{X}+\delta U, \tilde{U}+\delta U)$:

$$C(\tilde{U}+\delta U)-C(\tilde{U}) \geqslant 0 \qquad \text{c.q.f.d.}$$

Proposition 2

Si le bruit $Q(t)$ est une martingale par rapport à la famille $(\mathcal{B}_t)$, il existe un couple adapté $(\tilde{X}, \tilde{U})$ et un seul qui minimise $C(U)$. La commande $\tilde{U}$ est alors liée à l'état $\tilde{X}$ par la relation :

(IV-6) $$\tilde{U}(t) = N(t)^{-1}B(t)'\,K(t)\,\tilde{X}(t)$$

où la matrice $K(t)$ vérifie l'équation différentielle :

(IV-7) $$\frac{d}{\mathrm{d}t}K(t)+K(t)A(t)+A(t)'K(t) + K(t)B(t)\,N(t)^{-1}\,B(t)'K(t)-M(t)=0\,; \qquad K(T)=0$$

Remarque

La relation linéaire entre $\tilde{U}$ et $\tilde{X}$ est la même que celle obtenue dans le problème déterministe correspondant.

Démonstration

Unicité :

Soit $(\tilde{X}, \tilde{U})$ un couple adapté minimisant $C(U)$.

D'après la proposition 1, en tout point t de continuité de $\tilde{U}$ on a :

$$\langle B(t)\tilde{U}(t), \tilde{P}(t)\rangle - \|\tilde{U}(t)\|_N^2 = \max\{\langle B(t)u, P(t)\rangle - \|u\|_N^2 \;|_{u\,\mathcal{B}_t-\text{mesurable}}^{u\in H^n}\}$$

Étant donné que $N(t)$ est définie positive cette relation est vérifiée si et seulement si :

$$\tilde{U}(t) = N(t)^{-1}B(t)'R(t)$$

où

$$R(t) = \tfrac{1}{2}\,\mathbf{E}^{\mathcal{B}_t}(\tilde{P}(t))$$

Soit un instant t_0 $(0 \leqslant t_0 < T)$ et posons :

$$R_{t_0}(t) = \mathbf{E}^{\mathcal{B}_{t_0}}(R(t))$$

$$\hat{X}_{t_0}(t) = \mathbf{E}^{\mathcal{B}_{t_0}}(\tilde{X}(t)).$$

Le bruit $Q(t)$ étant une martingale :

$$\tilde{X}(t) = \Phi(t, t_0)\tilde{X}(t_0) + \int_{t0}^{t} \Phi(t, s)B(s)\tilde{U}(s)\, \mathrm{d}s + \int_{t0}^{t} \Phi(t, s)\, \mathrm{d}Q(s)$$

Ce qui donne :

$$\hat{X}_{t0}(t) = \Phi(t, t_0)\tilde{X}(t_0) + \int_{t0}^{t} \Phi(t, s)B(s)N(s)^{-1}B(s)'R_{t0}(s)\, \mathrm{d}s$$

Les processus R_{t0} et $\hat{X}_{t0}$ vérifient donc le système linéaire défini dans H^{2n} et pour $t_0 \leqslant t \leqslant T$ par les équations :

$$\begin{cases} \dfrac{d}{\mathrm{d}t} R_{t0}(t) = -A(t)'R_{t0}(t) + M(t)\hat{X}_{t0}(t) & ; \quad R_{t0}(T) = 0 \\[2ex] \dfrac{d}{\mathrm{d}t} \hat{X}_{t0}(t) = A(t)\hat{X}_{t0}(t) + B(t)N(t)^{-1}B(t)'R_{t0}(t) ; & \quad \hat{X}_{t0}(t_0) = \tilde{X}(t_0) \end{cases}$$

On en déduit la relation $R_{t0}(t) = K(t)\hat{X}_{t0}(t)$ où $K(t)$ est donné par l'équation (IV-7). En particulier pour $t = t_0$ on obtient : $R(t_0) = K(t_0)\tilde{X}(t_0)$, d'où on tire la relation (IV-6) :

$$U(t_0) = N(t_0)^{-1}B(t_0)'K(t_0)\tilde{X}(t_0).$$

L'unicité du couple $(\tilde{X}, \tilde{U})$ découle alors de l'unicité de la solution de l'équation différentielle :

$$\frac{\mathrm{d}[\tilde{X}(t) - Q(t)]}{\mathrm{d}t} = [A(t) + B(t)N(t)^{-1}B(t)'K(t)]\tilde{X}(t) ; \qquad \tilde{X}(t_0) = X_0$$

Existence

Le couple adapté obtenu en faisant $\tilde{U} = N^{-1}B'K\tilde{X}$, maximise, d'après ce qui précède, l'hammiltonien $H(U, t)$.

D'après la proposition 1, cette condition suffit pour que $(\tilde{X}, \tilde{U})$ minimise $C(U)$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] W. M. Wonham, *Lectures Notes ou stochastic control*, Brown University, février 1967.

[2] R. Pallu de la Barriere, *Cours d'Automatique théorique*, Dunod, 1966.