Revue française d'informatique et de recherche opérationnelle

Pierre Robert
Jacques Ferland

Généralisation de l'algorithme de Warshall

Revue française d'informatique et de recherche opérationnelle, tome 2, nº R1 (1968), p. 71-85

<http://www.numdam.org/item?id=M2AN_1968__2_1_71_0>

R.I.R.O.
(2e année, N° 7, 1968, p. 71-85)

GENERALISATION DE L'ALGORITHME DE WARSHALL

par Pierre ROBERT et Jacques FERLAND*

Résumé. — *Étant donné une matrice booléenne A de dimension $n \times n$, l'algorithme de Warshall permet de calculer la matrice $W = A + A^2 + \ldots + A^n$, en effectuant au plus $2n^3$ opérations booléennes. L'utilité et la rapidité de cette méthode nous a incité à en étudier la généralisation aux matrices définies sur une structure plus générale que l'algèbre booléenne* [0, 1].

Nous montrons, par des exemples, l'application de cet algorithme de Warshall généralisé à la résolution de certains problèmes d'optimisation.

INTRODUCTION

Étant donné une matrice booléenne A de dimension $n \times n$, l'algorithme de Warshall [5] permet de calculer la matrice booléenne

$$A^{(n)} = A + A^2 + \ldots + A^n$$

en effectuant au plus un nombre d'opérations booléennes égal à $2n^3$, c'est-à-dire au plus égal au nombre d'opérations nécessaires pour le calcul du produit de deux matrices.

L'utilité et la rapidité d'exécution de l'algorithme de Warshall nous a incité à étudier sa généralisation aux matrices définies sur une structure algébrique que nous appelons « Q-semi-anneau » (d'après M. Yoeli [6]) et dont l'algèbre booléenne $B(0, 1)$ est un cas particulier.

Dans la section I, nous définissons les Q-semi-anneaux et donnons quelques propriétés des matrices dont les éléments appartiennent à un Q-semi-anneau. Ces propriétés sont reliées à une relation d'ordre $\succ$ définie sur le Q-semi-anneau.

(*) Cette étude a été faite alors que les auteurs étaient titulaires, respectivement, d'une subvention de recherche (n° A-4093) et d'une bourse du Conseil National des recherches du Canada.

La généralisation de l'algorithme de Warshall est faite à la section II. Les justifications sont établies à l'aide de notions et de résultats de la théorie des graphes.

Il existe une relation bi-univoque entre les matrices définies sur un Q-semi-anneau et certains graphes orientés et complets. Si la relation d'ordre $\succ$ (définie à la section I) est totale alors on peut définir des « chemins optimaux » d'un sommet du graphe à un autre. A la section III cette notion est présentée et nous suggérons un algorithme permettant de déterminer les chemins optimaux; cet algorithme doit être appliqué, étape par étape, en parallèle avec l'algorithme de Warshall généralisé.

La section IV est consacrée à quelques exemples d'applications. Les quatre premiers problèmes sont des problèmes d'optimisation dans lesquels les relations d'ordre des Q-semi-anneaux considérés sont totales : existence d'un chemin d'un sommet d'un graphe à un autre, nombre minimum d'arcs à emprunter pour aller d'un sommet à un autre, détermination des distances minimales, détermination de la capacité maximum de transport d'un sommet à un autre. Dans tous ces cas l'algorithme de Warshall généralisé permet de résoudre le problème plus efficacement que les méthodes actuellement en usage. Nous concluons le travail par l'étude d'un problème en théorie des machines séquentielles qui illustre l'utilisation de l'algorithme généralisé dans le cas où la relation d'ordre n'est pas totale.

I. Q-SEMI-ANNEAU ET MATRICES SUR UN Q-SEMI-ANNEAU

1º Q-semi-anneau

Définition 1-1. — *Un* semi-anneau associatif *est un triplet* $(Q, \oplus, *)$ *où* Q *est un ensemble non-vide,* $\oplus$ *et* $*$ *sont des opérations binaires définies et fermées sur* Q *et satisfaisant pour tout* $a, b, c \in Q$:

$$a \oplus b = b \oplus a \qquad (\textit{commutativité de } \oplus);$$
$$(a \oplus b) \oplus c = a \oplus (b \oplus c) \qquad (\textit{associativité de } \oplus);$$
$$(a*b)*c = a*(b*c) \qquad (\textit{associativité de } *);$$
$$\left.\begin{array}{l} a*(b \oplus c) = (a*b) \oplus (a*c) \\ (b \oplus c)*a = (b*a) \oplus (c*a) \end{array}\right\} \qquad (\textit{distributivité de } * \textit{ sur } \oplus).$$

Définition 1-2. — *Un* Q-semi-anneau *est un semi-anneau associatif contenant deux éléments distincts,* z *et* e, *tels que pour tout* $a \in Q$:

$$a \oplus z = a, \qquad a*z = z*a = z, \qquad a*e = e*a = a,$$
$$a \oplus e = e \tag{1-0}$$

(Ces éléments sont alors uniques.)

Par la suite nous ferons référence aux Q-semi-anneaux suivants :

Exemple 1.1. — $(B(0, 1), \vee, \wedge)$, l'algèbre booléenne habituelle sur $\{ 0, 1 \}$. Dans ce cas, $z = 0$ et $e = 1$.

Exemple 1.2. — $(R_+^\infty, \min, +)$ où R_+^∞ est l'ensemble des nombres réels non négatifs, plus l'élément $\{ \infty \}$. Alors $z = \infty$ et $e = 0$.

Exemple 1.3. — $([0, 1], \max, \times)$ où $[0, 1]$ est l'intervalle fermé sur les réels correspondant à l'ensemble $\{ a \mid 0 \leqslant a \leqslant 1 \}$ et où $\times$ est la multiplication habituelle. $z = 0$ et $e = 1$.

Exemple 1.4. — $(R_+^\infty, \max, \min)$ où R_+^∞ est tel que défini à l'exemple 1-2. On vérifie alors aisément que $z = 0$ et $e = \infty$.

Exemple 1.5. — $(A, \cup, \cap)$ où A est une famille d'ensembles, $\cup$ est la réunion et $\cap$ est l'intersection des ensembles. On suppose que l'ensemble vide $\varnothing \in A$ et que $E = \bigcup_{a \in A} a \in A$. Alors $z = \varnothing$ et $e = E$.

Si $(Q, \oplus, *)$ est un Q-semi-anneau, alors pour tout $a, b \in Q$, les propriétés suivantes sont vérifiées :

(1-1) $$a \oplus (a * b) = a * (e \oplus b) = a * e = a\,;$$

(1-2) $$a \oplus (b * a) = (e \oplus b) * a = e * a = a\,;$$

(1-3) $$a \oplus (e * a) = a \oplus (a * e) = a \oplus a = a.$$

Définition 1.3. — *On définit sur* $(Q, \oplus, *)$ *la relation binaire* $\succ$ *par :*

$$a \succ b \textit{ si et seulement si } a \oplus b = a.$$

On vérifie aisément que la relation $\succ$ est une relation d'ordre partiel. A partir de cette définition et de la propriété (1-3), on peut vérifier les propriétés suivantes, pour tout a, b, c, d, a_i et $b_i \in Q$ (voir [6]) :

(1-4) $$a \succ z \textit{ et } e \succ a.$$

(1-5) $$a \succ b \textit{ implique } a \oplus c \succ b \oplus c,\quad a*c \succ b*c,\quad \text{et } c*a \succ c*b.$$

(1-6) $$a \succ a*b.$$

(1-7) $$a \succ b \text{ et } c \succ d \textit{ implique } a \oplus c \succ b \oplus d \textit{ et } a*c \succ b*d.$$

(1-8) $$a_1 * a_2 * \dots a_k \succ b_1 * a_1 * b_2 * a_2 * \dots b_k * a_k.$$

2° Matrices sur un Q-semi-anneau

Dénotons par $M_n(Q)$ l'ensemble des matrices carrées de dimension n sur un Q-semi-anneau $(Q, \oplus, *)$.

Nous emploierons par la suite :

$$\sum_{i=1}^{k} a_i \text{ pour symboliser } a_1 \oplus a_2 \oplus \dots \oplus a_k,$$

$$\prod_{i=1}^{k} a_i \text{ pour } a_1 * a_2 * \dots * a_k.$$

Étant donné $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij})$ dans $M_n(Q)$, définissons :

$$A \oplus B = (a_{ij} \oplus b_{ij}),$$

$$A * B = \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik} * b_{kj} \right) \cdot$$

Alors on vérifie facilement le théorème suivant :

Théorème 1.1. — *L'ensemble des matrices $M_n(Q)$ définies sur un Q-semi-anneau $(Q, \oplus, *)$, muni des opérations binaires $\oplus$ et $*$ telles que définies précédemment, constitue un semi-anneau associatif.*

Définissant :

$$Z = (z),$$

$$I = (m_{ij}) \qquad \text{ou} \qquad m_{ij} = \begin{cases} e \text{ si } i = j, \\ z \text{ si } i \neq j, \end{cases}$$

$(M_n(Q), \oplus, *)$ remplit toutes les conditions d'un Q-semi-anneau sauf la proposition (1-0) puisque $A \oplus I \neq I$.

On peut enfin faire une extension de l'ordination partielle $\succ$ définie sur Q, aux matrices de $M_n(Q)$ de la façon suivante : on pose $A \succ B$ *si et seulement si* $a_{ij} \succ b_{ij}$ *pour tout i et j.* Alors, aux propriétés (1-3), (1-4), (1-5) et (1-7) correspondent les propriétés suivantes, satisfaites pour tout A, B, C et $D \in M_n(Q)$:

(1-9) $\quad A \oplus (I*A) = A \oplus (A*I) = A \oplus A = A.$

(1-10) $\quad A \succ Z$ *et* $E \succ A$ où $E = (e)$.

(1-11) $\quad A \succ B$ *implique* $A \oplus C \succ B \oplus C,$

$$A*C \succ B*C$$

$$\text{et } C*A \succ C*B.$$

(1-12) $\quad A \succ B$ et $C \succ D$ *implique* $A \oplus C \succ B \oplus D$

$$\text{et } A*C \succ B*D.$$

Théorème 1.2. — *$A \succ I$ si et seulement si $a_{ii} = e$ pour $i = 1, 2, \dots, n$.*

II. GENERALISATION DE L'ALGORITHME DE WARSHALL

1° Graphe associé à une matrice A de $M_n(Q)$

A chaque matrice A de $M_n(Q)$ on peut associer un graphe orienté et complet $G(A)$ dont les sommets sont $P_1, P_2, \ldots, P_n$; à chaque paire ordonnée (P_i, P_j) on associe un arc unique, b_{ij}, orienté de P_i à P_j. Le *poids d'un arc* b_{ij} est égal, par définition, à l'élément a_{ij} de A.

Dans un graphe $G(A)$, *un chemin b de P_i à P_j, de longueur l,* est une suite d'arcs de la forme :

$$(2\text{-}1) \quad b = (b_{k_0k_1}, b_{k_1k_2}, \ldots, b_{k_{l-1}k_l}) \qquad \text{ou} \qquad k_0 = i \quad \text{et} \quad k_l = j.$$

Les points P_{k_1}, P_{k_2}, ... $P_{k_{l-1}}$ sont alors appelés *points intermédiaires du chemin b.* Un chemin de la forme (2-1) est dit *propre* si les indices satisfont la condition :

$$k_p \neq k_q \qquad \text{si} \qquad p \neq q$$

sauf possiblement dans le cas : $p = 0$ et $q = l$. Un chemin qui n'est pas propre est dit *redondant.*

Le poids d'un chemin b de P_i à P_j est le produit $w(b)$ des poids des arcs qui définissent ce chemin, dans l'ordre où ces arcs apparaissent. Ainsi, pour le chemin (2-1) :

$$w(b) = a_{k_0k_1} * a_{k_1k_2} * \ldots * a_{k_{l-1}k_l} = \prod_{r=1}^{l} a_{k_{r-1}k_r}.$$

Si b' est un chemin de P_i à P_k de la forme :

$$b' = (b_{k_0k_1}, b_{k_1k_2}, \ldots, b_{k_{l-1}k_l}) \qquad \text{ou} \qquad k_0 = i \quad \text{et} \quad k_l = k$$

et b'', un chemin de P_k à P_j de la forme :

$$b'' = (b_{j_0j_1}, b_{j_1j_2}, \ldots, b_{j_{t+1}j_t}) \qquad \text{ou} \qquad j_0 = k \quad \text{et} \quad j_t = j,$$

alors on définit un chemin b de P_i à P_j, *concaténation de b' et b''* par :

$$b = b' \circ b'' = (b_{k_0k_1}, \ldots, b_{k_{l-1}k_l}, b_{j_0j_1}, \ldots, b_{j_{t-1}j_t})$$

Le poids $w(b)$ de b est alors :

$$w(b) = w(b' \circ b'') = w(b') * w(b'').$$

Si le chemin b de P_i à P_j, de longueur l, est redondant, alors il existe certainement au moins un chemin propre b' de P_i à P_j, de longueur strictement inférieure à l, qu'on obtient à partir de b en éliminant certains arcs de ce dernier. Tout chemin propre b' ainsi obtenu par élimination d'arcs de b sera appelé une *réduction de b.* De même le poids $w(b')$ de b' est obtenu en éliminant les facteurs correspondants $a_{k_{r-1}k_r}$ de $w(b)$. Par conséquent, de (1-8) on déduit que :

Lemme 2.1. *Si un chemin b' est une réduction du chemin b, alors $w(b') \succ w(b)$.*

Pour $l \geqslant 1$, dénotons par $B_{ij}^{(l)}$ l'ensemble de tous les chemins de P_i à P_j, de longueur l, et par A^l, le produit de l matrices égales à A. Par définition du produit de matrices, on obtient pour $l \geqslant 1$ et $r \geqslant 1$:

$$A^l = (a_{ij}^{(l)}), \quad a_{ij}^{(l)} = \sum_{b \in B_{ij}^{(l)}} w(b),$$

$$\sum_{l=1}^{r} A^l = \sum_{l=1}^{r} a_{ij}^{(l)} = (s_{ij}^{(r)}),$$

$$s_{ij}^{(r)} = \sum_{l=1}^{r} \sum_{b \in B_{ij}^{(l)}} w(b).$$

Ainsi $s_{ij}^{(r)}$ est égal à la somme des poids de tous les chemins de P_i à P_j, de longueur inférieure ou égale à r.

Lemme 2.2. *$s_{ij}^{(r)}$ est égal à la somme des poids de tous les chemins* propres *de P_i à P_j de longueur inférieure ou égale à r.*

Preuve : Soit b un chemin redondant de P_i à P_j, de longueur inférieure ou égale à r. Alors il existe un chemin propre b' de P_i à P_j, réduction de b, dont la longueur est inférieure à r.

Or le lemme 2-1 assure que :

$$w(b') \oplus w(b) = w(b').$$

Donc en effectuant la somme des poids de tous les chemins de P_i à P_j, de longueur plus petite ou égale à r, on peut éliminer $w(b)$. La conclusion suit.

Lemme 2.3. *Si $A \succ I$, alors $\sum_{l=1}^{n} A^l = A^n$.*

Preuve : En appliquant la propriété (1-11) :

$$A \succ I \text{ implique } A^2 \succ A, A^3 \succ A^2, ..., A^n \succ A^{n-1}.$$

Par conséquent :

$$A \oplus A^2 = A^2$$
$$A^2 \oplus A^3 = A^3$$
$$\vdots$$

Donc $A \oplus A^2 \oplus ... \oplus A^n = A^n$.

2° Algorithme de Warshall généralisé

Soit la matrice $A = (a_{ij})$ élément de $M_n(Q)$ et $G(A)$ le graphe qui lui est associé. Définissons $t(0)$ et $t(k)$ comme suit :

$$t(0) = \varnothing \text{ (l'ensemble vide)}$$

$$t(k) = \{ P_1, P_2, ..., P_k \}, \qquad k = 1, 2, ..., n.$$

Dénotant par $R_{ij}^{(k)}$ l'ensemble de tous les chemins propres de P_i à P_j dont les intermédiaires appartiennent à $t(k)$, nous pouvons démontrer le lemme suivant à l'aide d'une preuve semblable à celle du lemme 2-2 :

Lemme 2.4. *Soit T un ensemble de chemins de P_i à P_j dont les intermédiaires appartiennent à $t(k)$ et tel que $T \supset R_{ij}^{(k)}$. Alors :*

$$\sum_{b \in T} w(b) = \sum_{b \in R_{ij}^{(k)}} w(b).$$

Théorème 2.1. (Algorithme de Warshall généralisé)

La suite des matrices $A^{(k)} \in M_n(Q)$ définies par :

$$A^{(0)} = A$$

$$\text{(2-2)} \qquad A^{(k)} = (a_{ij}^{(k)}), \quad a_{ij}^{(k)} = a_{ij}^{(k-1)} \oplus (a_{ik}^{(k-1)} * a_{kj}^{(k-1)})$$

pour tout $k = 1, 2, ..., n$, est telle que :

$$A^{(n)} = \sum_{l=1}^{n} A^l = (s_{ij}^{(n)}).$$

Preuve : Prouvons par induction sur k que, pour tout i et j :

$$\text{(2-3)} \qquad a_{ij}^{(k)} = \sum_{b \in R_{ij}^{(k)}} w(b)$$

et alors, d'après le lemme 2-2, on aura :

$$a_{ij}^{(n)} = \sum_{b \in R_{ij}^{(n)}} w(b) = s_{ij}^{(n)}.$$

1° $a_{ij}^{(0)} = a_{ij}$ est le poids de l'unique chemin propre de P_i à P_j dont les intermédiaires appartiennent à $t(0) = \varnothing$.

2° Supposons la propriété (2-3) vérifiée pour $k = r - 1$. On a évidemment que :

$$R_{ij}^{(r)} \supset R_{ij}^{(r-1)}$$

et :

$$R_{ij}^{(r)} = R_{ij}^{(r-1)} \cup [R_{ij}^{(r)} - R_{ij}^{(r-1)}]$$

Or $[R_{ij}^{(r)} - R_{ij}^{(r-1)}]$ est l'ensemble des chemins propres dont les intermédiaires sont P_r et possiblement des éléments de $t(r-1)$. Évidemment un tel chemin b s'obtient en concaténant $b' \in R_{ir}^{(r-1)}$ et $b'' \in R_{rj}^{(r-1)}$. D'où :

$$w(b) = w(b' \circ b'') = w(b') * w(b'')$$

Inversement, l'ensemble des concaténations $b' \circ b''$ où $b' \in R_{ir}^{(r-1)}$ et $b'' \in R_{rj}^{(r-1)}$ contient tous les éléments de $[R_{ij}^{(r)} - R_{ij}^{(r-1)}]$. On a d'après l'hypothèse d'induction :

$$\begin{aligned} a_{ij}^{(r)} &= a_{ij}^{(r-1)} \oplus (a_{ir}^{(r-1)} * a_{rj}^{(r-1)}) \\ &= \sum_{b \in R_{ij}^{(r-1)}} w(b) \oplus \sum_{b' \in R_{ij}^{(r-1)}} w(b') * \sum_{b'' \in R_{ir}^{(r-1)}} w(b'') \end{aligned}$$

$$a_{ij}^{(r)} = \sum_{b \in R_{ij}^{(r-1)}} w(b) \oplus \sum_{\substack{b' \circ b'' \\ b' \in R_{ir}^{(r-1)} \\ b'' \in R_{rj}^{(r-1)}}} w(b' \circ b'') \tag{2-4}$$

Dans la formule (2-4), les sommations sont prises sur deux ensembles dont la réunion contient tous les chemins propres de P_i à P_j dont les intermédiaires appartiennent à $t(r)$. Alors le lemme 2-4 nous assure que :

$$a_{ij}^{(r)} = \sum_{b \in R_{ij}^{(r)}} w(b).$$

3° Efficacité de l'algorithme de Warshall généralisé

Il convient d'insister sur l'efficacité de l'algorithme de Warshall généralisé.

Pour évaluer la matrice :

$$A^{(n)} = A \oplus A^2 \oplus \ldots \oplus A^n$$

en calculant successivement les puissances de A, le nombre d'opérations $\oplus$ et d'opérations $*$ qu'on doit effectuer peut être très grand.

Pour multiplier deux matrices le nombre « d'additions » et le nombre de « produits » sont chacun égaux à n^3. En conséquence, pour évaluer $A^2, A^3, \ldots, A^n$ puis $A^{(n)}$, il faudra donc $(2n-1)n^3$ opérations.

D'après le lemme 2-3, si $A \succ I$, alors $A^{(n)} = A^n$. Si $[\log_2 n]$ représente la partie entière de $\log_2 n$, le nombre p de produits de matrices à effectuer satisfait :

$$[\log_2 n] \leqslant p \leqslant (n-1)\,;$$

le nombre d'opérations sera donc compris entre :

$$2n^3[\log_2 n] \qquad \text{et} \qquad 2n^3(n-1).$$

D'après la formule (2-2), seulement $2n^3$ opérations sont nécessaires pour déterminer $A^{(n)}$ par l'algorithme de Warshall. Le calcul est donc équivalent à une seule multiplication de matrices.

A la section IV nous indiquerons l'applicabilité de cet algorithme pour la résolution de certains problèmes d'optimisation. L'algorithme de Warshall apparaît, dans tous ces problèmes, plus efficaces que les algorithmes généralement utilisés (voir, par exemple [1], [2], [3], [4]).

4° Matrice associée à un graphe

Pour faciliter la présentation des applications de l'algorithme de Warshall que nous faisons à la section IV, nous définissons un processus permettant d'associer une matrice à un graphe. Ce processus est le processus inverse de celui défini au 1° ci-dessus et qui associe un graphe orienté et complet à une matrice sur un Q-semi-anneau.

Soit $(Q, \oplus, *)$ un Q-semi-anneau et G un graphe quelconque dont les points sont $P_1, P_2, \ldots, P_n$. On suppose que, pour toute paire de points (P_i, P_j), il ne peut exister plus d'un arc de P_i à P_j. Si l'arc (P_i, P_j) existe on suppose qu'il lui est associé un *poids* égal à $a_{ij} \in Q$.

Du graphe G considéré on peut déduire un nouveau graphe $G(A)$, orienté et complet, en ajoutant les arcs manquants et en leur attachant un poids égal à $z \in Q$. Alors pour tout (i, j) l'élément a_{ij} est défini. La matrice $A = (a_{ij})$ sera dite matrice associée au graphe G.

III. CHEMIN OPTIMAL

1° Définition d'un chemin optimal

Soit A une matrice sur un Q-semi-anneau $(Q, \oplus, *)$ et $G(A)$ le graphe associé dont les points sont $P_1, P_2, \ldots, P_n$.

Nous disons qu'un chemin b de P_i à P_j est *préférable* à un autre chemin b' de P_i à P_j si $w(b) \succ w(b')$.

Si un chemin b de P_i à P_j est redondant, le lemme 2-1 assure qu'il existe un chemin b' de P_i à P_j qui lui est préférable.

Pour le reste de cette section III nous faisons l'hypothèse :

Hypothèse : *La relation d'ordre* $\succ$ *est* totale *sur* $(Q, \oplus, *)$, c'est-à-dire que l'on a :

$$a \oplus b = a \quad \text{ou} \quad a \oplus b = b \quad \text{pour tout} \quad a, b \in Q.$$

Sous cette hypothèse, $a_{ij}^{(k)}$, défini par (2-2) ou (2-3), est égal au poids d'un chemin b de P_i à P_j, dont les points intermédiaires appartiennent à $t(k)$ et qui est préférable à tout autre chemin de P_i à P_j ainsi constitué. En effet,

$$w(b) = \sum_{b' \in R_{ij}^{(k)}} w(b')$$

si et seulement si $w(b) \succ w(b')$ pour tout $b' \in R_{ij}^{(k)}$. On dira d'un tel chemin b qu'il est un *chemin optimal* de P_i à P_j *à l'étape* k.

On voit que $a_{ij}^{(n)}$ est alors égal au poids d'un chemin de P_i à P_j préférable à tout autre chemin de P_i à P_j. On dit alors que b est un *chemin optimal* de P_i à P_j (il peut en exister plusieurs).

2° Détermination d'un chemin optimal

Sous l'hypothèse que Q est totalement ordonné par la relation $\succ$, il est possible de définir un chemin optimal de P_i à P_j, de la façon suivante, qu'on pourra comparer à celle de Dragomirescu [3].

En parallèle à la construction des matrices $A^{(k)}$ de l'algorithme de Warshall, construisons des matrices $D^{(k)}$ comme suit :

$$d_{ij}^{(0)} = \begin{cases} j & \text{si} \quad a_{ij}^{(0)} \neq z \\ 0 & \text{si} \quad a_{ij}^{(0)} = z \end{cases}$$

et pour $k = 1, 2, ..., n$:

$$d_{ij}^{(k)} = \begin{cases} d_{ij}^{(k-1)} & \text{si} \quad a_{ij}^{(k)} = a_{ij}^{(k-1)} \\ d_{ik}^{(k-1)} & \text{si} \quad a_{ij}^{(k)} \neq a_{ij}^{(k-1)} \end{cases}$$

Théorème 3.1. — *Pour i et j donnés, $d_{ij}^{(k)}$ a pour valeur l'indice du premier point intermédiaire sur un chemin optimal de P_i à P_j à l'étape k, pourvu qu'un chemin de P_i à P_j existe. S'il n'existe pas de chemin de P_i à P_j n'empruntant d'intermédiaires que dans $t(k)$, alors $d_{ij}^{(k)} = 0$.*

Preuve : La preuve est faite par induction sur k.

1° La proposition est évidemment satisfaite pour $k = 0$.

2° Supposons la proposition satisfaite pour $k = r - 1$.

Notons que si $d_{ij}^{(r-1)} = 0$ alors $a_{ij}^{(r-1)} = z$.

Si $a_{ij}^{(r)} = a_{ij}^{(r-1)} = z$, alors il n'existe pas de chemin de P_i à P_j avec intermédiaire dans $t(k)$. On a donc $d_{ij}^{(r)} = 0 = d_{ij}^{(r-1)}$.

Si $a_{ij}^{(r)} = a_{ij}^{(r-1)} \neq z$, alors le chemin optimal de P_i à P_j à l'étape $r - 1$ est encore un chemin optimal à l'étape r. Le théorème est alors satisfait si on retient $d_{ij}^{(r)} = d_{ij}^{(r-1)}$.

D'autre part, si $a_{ij}^{(r)} \neq a_{ij}^{(r-1)}$ on a $a_{ij}^{(r)} = a_{ir}^{(r-1)} * a_{rj}^{(r-1)} \neq z$ et tout chemin optimal de P_i à P_j à l'étape r est la concaténation d'un chemin optimal de P_i à P_r et d'un chemin optimal de P_r à P_j à l'étape $r - 1$. La réciproque est vraie. En conséquence le premier point intermédiaire d'un chemin optimal de P_i à P_j à l'étape r sera le premier point intermédiaire d'un chemin optimal de P_i à P_r à l'étape $r - 1$. Un tel point a pour indice $d_{ir}^{(r-1)}$ et l'on pourra prendre $d_{ij}^{(r)} = d_{ir}^{(r-1)}$.

Ceci complète la preuve du théorème.

Corollaire 3.1. *Pour tout i, j, $d_{ij}^{(n)}$ représente l'indice du premier point intermédiaire d'un chemin optimal de P_i à P_j, pourvu qu'un chemin de P_i à P_j existe. S'il n'existe pas de chemin de P_i à P_j, alors $d_{ij}^{(n)} = 0$.*

A partir de la matrice $D^{(n)}$ il est clair que l'on peut facilement obtenir un chemin optimal de P_i à P_j de la façon suivante. On détermine d'abord la valeur

$$j_1 = d_{ij}^{(n)}.$$

Ensuite on détermine successivement les points $j_2 = d_{j_1 j}^{(n)}$, $j_3 = d_{j_2 j}^{(n)}$ et ainsi de suite jusqu'à ce que l'un des indices j_l soit égal à j. Alors le chemin optimal indiqué par la matrice $D^{(n)}$ sera constitué des points $P_i, P_{j_1}, P_{j_2}, ..., P_{j_l}$. Si $d_{ij}^{(n)} = 0$, c'est qu'il n'y a pas de chemin de P_i à P_j.

Remarquons que dans le cas où plusieurs chemins sont optimaux de P_i à P_j, la matrice $D^{(n)}$ ne nous indique qu'un seul de ces chemins. Pour connaître tous ces chemins, il suffirait de définir $d_{ij}^{(k)}$ comme une famille d'indices satisfaisant la relation :

$$d_{ij}^{(0)} = \begin{cases} j & \text{si} \quad a_{ij}^{(0)} \neq z, \\ 0 & \text{si} \quad a_{ij}^{(0)} = z, \end{cases}$$

et pour $k = 1, 2, ..., n$:

$$d_{ij}^{(k)} = \begin{cases} d_{ij}^{(k-1)} & \text{si} \quad a_{ij}^{(k)} = a_{ij}^{(k-1)} \neq a_{ik}^{(k-1)} * a_{kj}^{(k-1)}, \\ d_{ij}^{(k-1)} \cup d_{ik}^{(k-1)} & \text{si} \quad a_{ij}^{(k)} = a_{ij}^{(k-1)} = a_{ik}^{(k-1)} * a_{kj}^{(k-1)}, \\ d_{ik}^{(k-1)} & \text{si} \quad a_{ij}^{(k)} = a_{ik}^{(k-1)} * a_{kj}^{(k-1)} \neq a_{ij}^{(k-1)}. \end{cases}$$

Si $D^{(k)}$ est définie par ces dernières formules, alors on peut déterminer aisément si un chemin propre donné :

$$b = (b_{k_0 k_1}, b_{k_1 k_2}, ..., b_{k_{l-1} k_l})$$

est un chemin optimal de p_{k_0} à p_{k_l}. En effet, il suffit de vérifier que :

$$k_t \in d_{k_{t-1} k_l}^{(n)} \qquad \text{pour} \qquad t = 1, 2, ..., l.$$

On pourra comparer cette méthode à celle proposée par M. Dragomirescu [3].

IV. EXEMPLES D'APPLICATIONS

1° Résolution de certains problèmes d'optimisation

Dans cette section nous présentons quatre applications de l'algorithme de Warshall généralisé. Les quatre exemples se situent dans le contexte d'un graphe G dont les points $P_1, P_2, ..., P_n$ sont interprétés comme n points géographiques. Les arcs du graphe sont interprétés comme des routes (terrestres, aériennes, canalisées, ...) entre ces différents points. Les relations d'ordre considérées sont totales.

Problème 1. — *Existence d'une route joignant P_i à P_j.*

Le premier problème est de déterminer s'il existe un chemin joignant deux points donnés P_i et P_j.

Pour résoudre le problème on attribue à chaque arc du graphe (route) un poids égal à « 1 ».

On peut alors associer à G une matrice A (de poids) dont les éléments font partie du Q-semi-anneau $(B(0, 1), \vee, \wedge)$. z est alors égal à « 0 ». L'élément $a_{ij}^{(n)}$ obtenu après l'application de l'algorithme de Warshall généralisé est tel que :

$$a_{ij}^{(n)} = \begin{cases} 1 \text{ s'il existe un chemin de } p_i \text{ à } p_j, \\ 0 \text{ autrement.} \end{cases}$$

C'est l'application originale de Warshall [1].

Problème 2. — *Nombre minimum de routes empruntées pour aller de P_i à P_j.*

On associe aux routes du graphe G un poids égal à 1. On interprète la matrice A associée à G dans le Q-semi-anneau $(R_+^\infty, \min, +)$. Alors $z = \infty$. L'élément $a_{ij}^{(n)}$ obtenu après l'application de l'algorithme de Warshall généralisé est égal au nombre minimum de tronçons de routes pour aller de P_i à P_j; si $a_{ij}^{(n)} = \infty$ c'est qu'il n'y a pas de chemin permettant d'aller de P_i à P_j. La matrice $D^{(n)}$, construite parallèlement, indique un chemin de P_i à P_j où le nombre de routes empruntées est minimum.

Problème 3. — *Détermination de la distance minimum entre P_i et P_j.*

On suppose qu'à chacune des routes du graphe G est associé un nombre réel positif représentant la longueur de cette route. On interprète le graphe dans le Q-semi-anneau $(R_+^\infty, \min, +)$ avec $z = \infty$. L'application de l'algorithme de Warshall généralisé engendrera une matrice dont l'élément en position (i, j) représente la distance minimum entre le point P_i et le point P_j; cette distance sera égale à ∞ s'il n'y a pas de chemin allant de P_i à P_j.

La construction de la matrice $D^{(n)}$ permet de déterminer un chemin de longueur minimum.

Note : Il est intéressant de noter que l'algorithme récemment proposé par T. C. Hu [4] pour déterminer la distance minimum entre deux points nécessite approximativement $4n^3$ opérations. L'algorithme proposé par M. Dragomirescu [3] est au mieux équivalent à l'algorithme de Hu.

On a vu à la section II que l'algorithme de Warshall généralisé n'exige que $2n^3$ opérations pour résoudre le problème de la distance minimale.

Pour la détermination des chemins optimaux, nous mentionnons la possibilité de construire les matrices $D^{(k)}$ pour $k = 0, 1, ..., n$. La méthode proposée par M. Dragomirescu utilise seulement la matrice initiale $A = A^{(0)}$ et la matrice $A^{(n)}$ des distances minimales; toutefois des manipulations (simples) sur ces deux matrices doivent être faites pour chaque triplet d'indices (i, j, k). Nous n'avons pas fait d'expériences précises permettant de déterminer si l'une de ces deux méthodes est préférable à l'autre.

Problème 4. *Détermination du chemin à densité de « traffic » maximum entre P_i et P_j.*

On suppose qu'à chacune des routes du graphe G est associé un nombre réel positif que l'on interprète comme la densité maximum de « traffic » qui peut emprunter la route. La matrice A associée au graphe est alors interprétée dans le Q-semi-anneau $(R_+^\infty, \max, \min)$. L'absence de route se traduit par une densité égale à 0. L'application de l'algorithme de Warshall donnera alors la densité de « traffic » maximum entre les points P_i et P_j.

La matrice $D^{(n)}$, obtenue parallèlement à la matrice $A^{(n)}$, déterminera un chemin à densité de « traffic » maximum entre P_i et P_j.

2° Un problème en théorie des machines séquentielles

Nous concluons ce chapitre par un exemple d'application de l'algorithme de Warshall généralisé dans un Q-semi-anneau où la relation d'ordre $\succ$ n'est pas totale. C'est le cas de l'exemple 1-5 du chapitre I, où étant donné deux éléments $B, C \in Q$, $B \succ C$ si et seulement si l'ensemble C est contenu dans l'ensemble B.

On considère une machine séquentielle M, composée d'un ensemble fini d'états $Q = \{ q_1, q_2, ..., q_n \}$ et d'un ensemble fini d'entrées $S = \{ s_1, s_2, ..., s_r \}$. Soit λ la fonction de passage d'un état à un autre par une entrée donnée :

$$\lambda : (Q \times S) \to Q.$$

Conformément à l'usage nous étendons aux chaînes d'éléments de S la définition de λ par la définition :

$$\lambda(q, s\sigma) = \lambda(\lambda(q, \sigma), s)$$

pour toute chaîne non-vide σ. De même, nous désignons par s^p, $s \in S$, la chaîne composée de p entrées identiques à s.

Nous nous proposons de résoudre le problème suivant : pour chaque paire ordonnée d'états (q_i, q_j), déterminer tous les éléments $s \in S$ tels qu'il existe un entier $p(s) \geqslant 1$ satisfaisant :

$$\lambda(q_i, s^{p(s)}) = q_j ;$$

c'est-à-dire toutes les entrées s, telles que la répétition de l'entrée s puisse conduire éventuellement de l'état q_i à l'état q_j.

Notons d'abord la proposition suivante qui est facile à démontrer :

Proposition 3.1. *S'il existe un entier $p' \geqslant 1$ tel que :*

$$\lambda(q_i, s^{p'}) = q_j,$$

alors il existe un entier $p(s)$, $1 \leqslant p(s) \leqslant n$ tel que

$$\lambda(q_i, s^{p(s)}) = q_j.$$

Pour résoudre le problème, nous représentons la machine M par une matrice $A = (a_{ij})$, $1 \leqslant i, j \leqslant n$ où la i-ième ligne (colonne) est associée à l'état q_i et où a_{ij} est le sous-ensemble de S défini par :

$$a_{ij} = \{ s \in S \mid \lambda(q_i, s) = q_j \}$$

La machine M est entièrement caractérisée par cette matrice.

La matrice A est une matrice sur le Q-semi-anneau $(\mathcal{T}(S), \cup, \cap)$ défini à l'exemple 1-5 du chapitre I, où $\mathcal{T}(S)$ représente l'ensemble des parties de S.

On peut vérifier, par récurrence sur k que l'entrée s appartient à l'élément de position (i, j) de la matrice $A^{(k)}$, $(k = 1, 2, ..., n)$, si et seulement si

$$[\lambda(q_i, s) = q_j] \quad \text{ou} \quad [\lambda(q_i, s^2) = q_j] \quad \text{ou ... ou} \quad [\lambda(q_i, s^k) = q_j].$$

On déduit de ce fait et de la proposition 3-1 ci-dessus que, pour chaque paire (q_i, q_j), le sous-ensemble de S cherché est l'élément de position (i, j) de la matrice :

$$\sum_{i=1}^{n} A^i = A \cup A^2 \cup ... \cup A^n \in (\mathcal{T}(s), \cup, \cap)$$

On pourra donc employer l'algorithme de Warshall généralisé pour déterminer en pratique la solution du problème.

Ainsi, par exemple, si M a 5 états, 4 entrées et est définie par la matrice de passage :

	s_1	s_2	s_3	s_4
q_1	q_1	q_2	q_4	q_1
q_2	q_2	q_3	q_3	q_2
q_3	q_2	q_3	q_2	q_3
q_4	q_1	q_3	q_1	q_5
q_5	q_5	q_5	q_5	q_4

on aura :

$$A = A^{(0)} \begin{bmatrix} \{s_1, s_4\} & \{s_2\} & \varnothing & \{s_3\} & \varnothing \\ \varnothing & \{s_1, s_4\} & \{s_2, s_3\} & \varnothing & \varnothing \\ \varnothing & \{s_1, s_3\} & \{s_2, s_4\} & \varnothing & \varnothing \\ \{s_1, s_3\} & \varnothing & \{s_2\} & \varnothing & \{s_4\} \\ \varnothing & \varnothing & \varnothing & \{s_4\} & \{s_1, s_2, s_3\} \end{bmatrix}$$

et en appliquant l'algorithme :

$$a_{ij}^{(k)} = a_{ij}^{(k-1)} \cup [a_{ik}^{(k-1)} \cap a_{kj}^{(k-1)}], \qquad k = 1, 2, ..., n,$$

on trouve finalement :

$$A^{(4)} = A^{(5)} = \begin{bmatrix} \{s_1, s_3, s_4\} & \{s_2\} & \{s_2\} & \{s_3\} & \varnothing \\ \varnothing & \{s_1, s_3, s_4\} & \{s_2, s_3\} & \varnothing & \varnothing \\ \varnothing & \{s_1, s_3\} & \{s_2, s_3, s_4\} & \varnothing & \varnothing \\ \{s_1, s_3\} & \varnothing & \{s_2\} & \{s_3\} & \{s_4\} \\ \varnothing & \varnothing & \varnothing & \{s_4\} & S \end{bmatrix}$$

On vérifie aisément, par exemple, qu'aucune puissance de s_1, s_2, s_3 ou s_4 ne permet de passer de q_2 à q_4; qu'aucune puissance de s_2 ne permet de passer de q_1 à q_1 tandis que :

$$\lambda(q_1, s_1) = \lambda(q_1, s_3^2) = \lambda(q_1, s_4) = q_1.$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] Bellman R., *On a Routing Problem*, Quat. Appl. Math., 16 (1958), pp. 87-90.

[2] Berge C. et Ghouila-Houri A., *Programmes, jeux et réseaux de transports*, Dunod, Paris, 1962.

[3] Dragomirescu M., *L'algorithme de min-addition et les chemins critiques dans un graphe*, Rev. Roum. Math. Pures et Appl., t. XII, n° 8 (1967), pp. 1045-1051.

[4] Hu T. C., *Revised Matrix Algorithms for Shortest Paths*, Siam J. on App. Math., 15 (1967), pp. 207-218.

[5] Warshall S., *A Theorem of Boolean Matrices*, J. A. C. M., 9 (1962), pp. 11-13.

[6] Yoeli M., *A Note on a Generalization of Boolean Matrix Theory*, American Math., Monthly, 68 (1961), pp. 552-557.