Revue française d'informatique et de recherche opérationnelle

M. Chein

Graphe régulièrement décomposable

Revue française d'informatique et de recherche opérationnelle, tome 2, nº R1 (1968), p. 27-42

<http://www.numdam.org/item?id=M2AN_1968__2_1_27_0>

R.I.R.O.
(2e année, N° 7, 1968, p. 27-42)

GRAPHE REGULIEREMENT DECOMPOSABLE

par M. CHEIN [1]

Résumé. — On introduit dans cet article la notion de graphe régulièrement décomposable. Un algorithme de reconnaissance des graphes régulièrement décomposables est proposé à partir de la démonstration de deux propriétés caractéristiques.

On montre ensuite comment cette nouvelle notion permet notamment :

— d'étudier simplement, sans utiliser le théorème de Menger, les graphes inarticulés ;

— de simplifier la recherche de toutes les décompositions d'un graphe connexe en k sous-graphes connexes.

La notion de graphe régulièrement décomposable permet :

— de retrouver simplement (sans utiliser le théorème de Menger de démonstration délicate [4]) les propriétés caractéristiques habituelles des graphes inarticulés (sans charnière),

— de simplifier la recherche de toutes les décompositions d'un graphe connexe en k sous-graphes connexe.

1. — GRAPHE REGULIEREMENT DECOMPOSABLE

1. — Définitions

1.1. — R étant un graphe connexe de m sommets $(a_1, a_2, ..., a_m)$ nous appellerons *hypercoupure* de R toute bipartition $(A; A')$ de l'ensemble des sommets. Une hypercoupure est dite *simple* si les deux sous-graphes engendrés par A et A' sont connexes. L'ensemble des hypercoupures muni de l'opération $\oplus$ définie par $(A; A') \oplus (B; B') = (A \cap B') \cup (A' \cap B);\ (A \cap B) \cup (A' \cap B'))$ est un groupe abélien qui admet notamment pour système générateur l'ensemble des hypercoupures simples (HS) (voir [3] et [5]).

(1) Laboratoire de Calcul de Grenoble.

1.2. — Un graphe connexe R de m sommets est dit *régulièrement décomposable* si on peut ordonner ses sommets de telle sorte que :

$$\left.\begin{array}{l}(a_1\,;\,...)\\(a_1a_2\,;\,...)\\(a_1\,...\,a_{m-1}\,;\,a_m)\end{array}\right\}\ \text{soient des hypercoupures simples } (HS) \text{ de } R$$

Voir [5].

1.3. — Étant donné une décomposition $(R_i)_{i=1,2,\ldots,k}$ d'un graphe connexe R en k sous-graphes connexes obtenue en supprimant certaines arêtes (graphe partiel ayant k composantes connexes) on appelle *graphe condensé* associé à la décomposition, le graphe ayant R_i pour sommets, R_i et R_j étant liés si au moins un sommet de R_i est lié à un de R_j.

1.4. — *La puissance* d'un sous-graphe est égale au nombre de composantes connexes engendrées lorsqu'on le supprime.

1.5. — Une charnière c *sépare* deux sommets, s'ils sont dans des composantes connexes distinctes lorsqu'on supprime c.

1.6. — Un graphe connexe R de m sommets est dit *totalement décomposable* si quel que soit $k < m$ on peut trouver un graphe partiel p_{q+1} ayant $(c_i)_{i=1,\ldots,q+1}$ pour composantes avec :

$$\left\{\begin{array}{ll}r < k & m = k \cdot q + r\\ |c_i| = k & \\ |c_{q+1}| = r & \end{array}\right.$$

plus généralement si E est un ensemble d'entiers $0 < e < m \,\|\, R$ est dit *E-décomposable* s'il vérifie la propriété ci-dessus quel que soit $e \in E$.

2. — Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un graphe soit régulièrement décomposable

Théorème 1

Une CNS pour qu'un graphe connexe R soit régulièrement décomposable est qu'il existe un couple de sommets (a, b) tel que : quel que soit $m \in R$ il existe une chaîne élémentaire (amb).

La condition est nécessaire. En effet supposons que R soit régulièrement décomposable entre les sommets (a, b) et qu'il existe $m \in R$ tel qu'il n'existe pas de chaîne élémentaire (amb). Considérons la liste des HS :

$$\left\{\begin{array}{l}(a\,;\,...\,b)\\(ac\,;\,...\,b)\\ \cdots\\(ac\,...\,m\,;\,...\,d\,...\,b) = H\\ \cdots\\(ac\,...\,m\,...\,;\,b)\end{array}\right.$$

le sous-graphe engendré par le 1er membre de H est connexe il existe donc une chaîne élémentaire $(am) = \mu$, soit d un élément du 2e membre de H adjacent à m il existe une chaîne élémentaire $(db) = \nu$ constitué uniquement d'éléments du 2e membre de H : $\mu\nu$ est une chaîne élémentaire de R joignant a à b en passant par m il y a donc contradiction.

La condition est suffisante : soit (a, b) un couple satisfaisant à la condition.

1) $(a; ...)$ est une HS sinon : soient C_1 et C_2 deux composantes connexes engendrées par la suppression de a, C_1 contenant b par exemple. Si m est un sommet de C_2 il n'existe pas de chaîne élémentaire (amb) il y a donc contradiction (fig. 1).

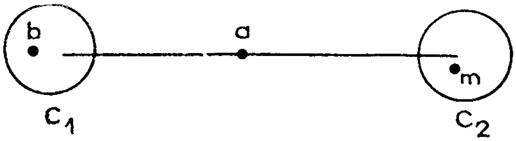


Figure 1

2) Considérons une hypercoupure simple $H = (\underbrace{a \ldots}_{C_1} ; \underbrace{\ldots b}_{C_2})$ nous allons montrer qu'il existe $\alpha \in C_2$ et adjacent à un élément de C_1 tel que l'on puisse joindre tout élément $c \in C_2$ à b dans C_2 sans passer par α, c'est-à-dire que l'hypercoupure $(C_1\alpha;\ C_2 - \alpha)$ est simple.

Considérons $\alpha \in C_2$, adjacent à C_1 avec $d_{C_2}(\alpha, b)$ maximum ($d_{C_2}(x, y)$ représentant la longueur d'une plus courte chaîne de C_2 joignant x à y).

Si toutes les chaînes joignant c à b dans C_2 passent par α il existe une chaîne $\mu = (ac)$ qui ne passe pas par α puisque, par hypothèse, il existe une chaîne élémentaire (acb). Soit α' le premier sommet de C_2 sur $\mu = (ac)$, on note ν la sous-chaîne $(\alpha' c)$ de μ. Il existe une chaîne de C_2 $\xi = (\alpha' b)$ qui ne passe pas par α sinon $d_{C_2}(\alpha' b) > d_{C_2}(\alpha, b)$ donc $\nu\xi$ est une chaîne de C_2 qui joint c à b sans passer par α.

3) A partir de l'hypercoupure simple $(a; \ldots b)$, (2) nous permet de construire une liste d'hypercoupures simples satisfaisantes.

Propriété 1

Si un graphe est régulièrement décomposable il a au plus deux sommets pendants [qui sont les sommets (a, b) entre lesquels le graphe est régulièrement décomposable].

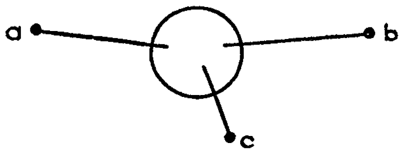


Figure 2

En effet, il n'existe pas de chaîne élémentaire (xay) quels que soient x, $y \in Rx \neq a$ et $y \neq a$. Si nous supposons que $x = a$ par exemple il n'existe pas de chaîne élémentaire (aby) quel que soit $y \in Ry \neq b$, si $y = b$ il n'existe pas de chaîne élémentaire (acb) (fig. 2).

Propriété 2

Si un graphe a une charnière de puissance $\geqslant 3$ *il n'est pas régulièrement décomposable.*

En effet il n'existe pas de chaîne élémentaire (abc) par exemple

$$\forall a \in R_1$$
$$\forall b \in R_2$$
$$\forall c \in R_3 \qquad \text{(fig. 3).}$$

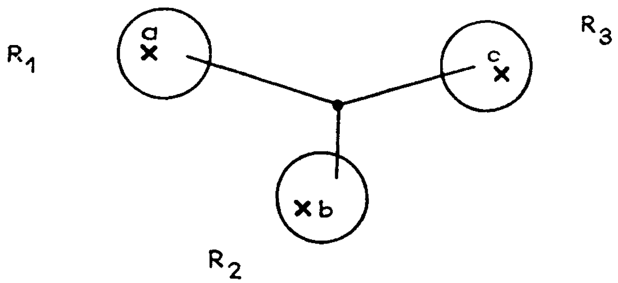


Figure 3

3. — Graphe sans charnière (inarticulé)

Théorème 2

Un graphe connexe est sans charnière si et seulement si il est régulièrement décomposable à partir de tout couple de sommets.

La condition est nécessaire : si R a une charnière c engendrant les composantes connexes C_1, C_2, ... $(c; ...)$ n'est pas une hypercoupure simple donc R n'est régulièrement décomposable à partir d'aucun couple contenant c.

La condition est suffisante :

Nous allons construire une liste de HS satisfaisantes à partir d'un couple quelconque $(a, b) \cdot (a; \ldots b)$ est simple puisque le graphe est sans charnière, nous raisonnons par récurrence sur le nombre d'éléments dans le 1^{er} membre. Supposons que $(\underbrace{aa_1 \ldots a_r}_{C_1} ; \underbrace{\ldots b}_{C_2}) = H$ soit simple et notons C_1 et C_2 les sous-graphes connexes engendrés par les deux membres de H. On note $(b_i)_{i \in I}$ les éléments de C_2 adjacents à au moins un élément de C_1 et $\neq b$ (fig. 4).

Nous raisonnons par l'absurde en supposant qu'il n'existe aucun b_i tel que $(\underbrace{a \dots a_r}_{C_1} b_i ; \dots b)$ soit simple).

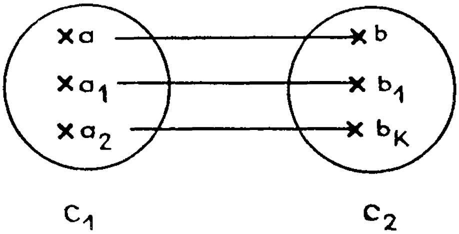


Figure 4

Si $(\underbrace{a \dots a_r}_{C_1} b_1 ; \dots b)$ n'est pas simple $(\underbrace{a \dots a_r}_{C_1} ; b_1 \dots b)$ étant simple ceci entraîne que b_1 est une charnière de C_2 dont la suppression détermine au moins 2 composantes connexes $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ (fig. 5),

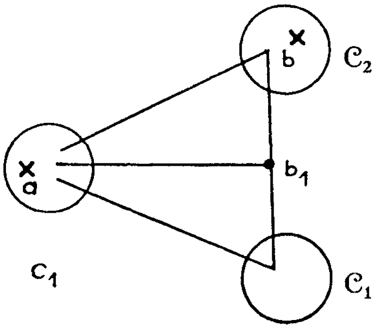


Figure 5

Dans $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ il existe au moins un b_i sinon b_1 serait charnière de R ce qui est contraire à l'hypothèse. Si $b \in \mathcal{C}_2$ par exemple le nombre de $b_i \in \mathcal{C}_1$ est strictement inférieur au nombre de b_i éléments de C_2, s'il n'existe pas de b_k tel que $(C_1 b_k; \dots)$ soit simple ce nombre de b_i deviendra nul et le dernier b_i considéré sera une charnière de R ce qui est contraire à l'hypothèse.

Théorème 3

Un graphe R est sans charnière si et seulement si quels que soient trois sommets a, b, c de R il existe une chaîne élémentaire (abc).

Évident d'après les théorèmes 1 et 2.

REMARQUE

La démonstration des théorèmes 1 et 2 n'a pas nécessité l'utilisation du théorème de Menger (voir [4] p. 192) nous pourrons ainsi retrouver toutes les propriétés habituelles des graphes sans charnière sans utiliser le théorème de Menger qui est de démonstration délicate.

Nous démontrons, à titre d'exemple, la propriété suivante des graphes sans charnière :

Propriété

Par deux sommets quelconques d'un graphe sans charnière il passe un cycle élémentaire.

En effet soit $a, b \in R$ supposé sans charnière. Considérons un sommet c adjacent à a, d'après le théorème 2 il existe une chaîne élémentaire $(abc) = \mu$ donc un cycle élémentaire passant par a, b qui est égal à μ suivi d'une arête joignant c à a.

On trouve dans [1] la démonstration directe de :

Si par deux sommets quelconques d'un graphe il passe un cycle élémentaire alors par deux arêtes quelconques il passe un cycle élémentaire.

4. — Propriété des charnières d'un graphe régulièrement décomposable

Lemme

Si trois sommets a_1, a_2, m d'un graphe connexe sont tels qu'il n'existe pas de chaîne élémentaire $(a_1 m a_2)$ alors il existe une charnière c de R séparant (a_1, a_2) et m.

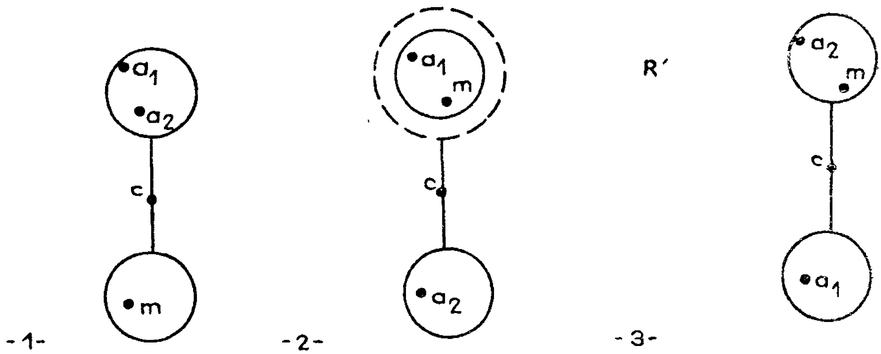


Figure 6

En effet : les sommets a_1, a_2, m ne sont pas dans un même sous-graphe connexe sans charnière. Si R n'a qu'une charnière c elle fractionne donc $(a_1 a_2 m)$ c'est-à-dire que l'on a l'un des 3 cas suivants de la figure 6.

Le théorème est alors vrai car dans le cas 1, c sépare (a_1a_2) et m. Dans les cas 2 et 3 il existe une chaîne élémentaire (a_1ma_2). Supposons que le théorème soit vrai lorsque R a au plus k charnières et considérons un graphe de $k+1$ charnières nous avons à nouveau les 3 cas de la figure 6. Dans le cas 1 le théorème est vrai, dans le cas 2 (*idem* pour 3) s'il n'existe pas de chaîne élémentaire (a_1ma_2) c'est qu'il n'existe pas de chaîne élémentaire (a_1mc) or le graphe R'ak charnières on peut donc appliquer l'hypothèse de récurrence il existe une charnière c' de R' séparant (a_1c) de m mais alors c' sépare bien (a_1a_2) et m dans R.

Théorème 4

Un graphe connexe sans charnière de puissance $\geqslant 3$ est régulièrement décomposable entre a et b si et seulement si toutes ses charnières séparent a et b.

La condition est nécessaire :

Supposons qu'il existe une charnière c de R ne séparant pas a et b : il n'existe pas de chaîne élémentaire (amb) quel que soit m élément de la composante ne contenant ni a ni b (fig. 7).

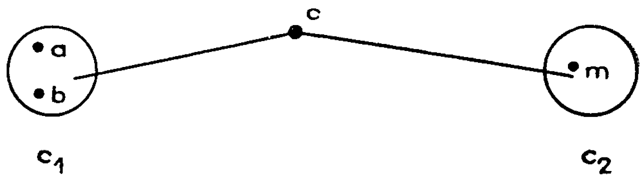


Figure 7

La condition est suffisante : nous allons démontrer que si toutes les charnières de R séparent a et b il existe une chaîne élémentaire (amb) quel que soit $m \in R$. Considérons une charnière c de R (fig. 8-1) s'il n'existe pas de chaîne élémentaire (amb) ceci entraîne (amc) donc que le sous-graphe R' a une charnière c' séparant (ac) de m, c'est-à-dire que R' a la forme suivante (fig. 8-2).

Mais alors c' qui est une charnière de R ne sépare pas a et b ou est de puissance $\geqslant 3$ il y a donc contradiction (fig. 8-3). La démonstration est identique dans le cas où l'on prend m dans C_2.

Les théorèmes 1 et 4 nous permettent de savoir simplement :

— si un graphe est régulièrement décomposable,

— les sommets extrêmes par rapport auxquels il est régulièrement décomposable,

— d'obtenir une liste d'*HS* convenant dans le cas favorable.

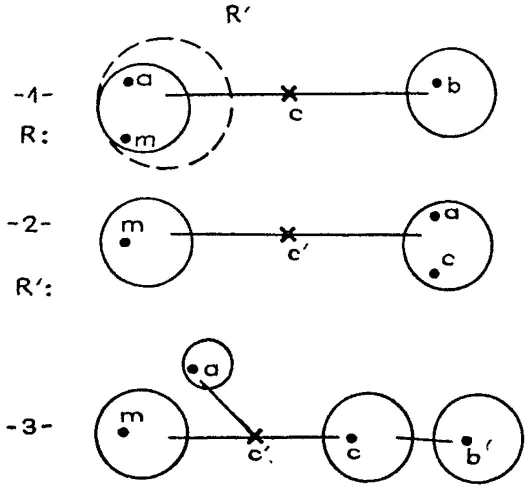


Figure 8

5. — Algorithme de reconnaissance d'un graphe régulièrement décomposable

1) Si R a plus de deux sommets pendants R n'est pas régulièrement décomposable sinon aller en (2).

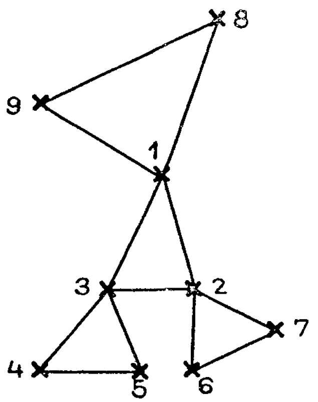
2) Si R a une charnière de puissance $\geqslant 3 \,\|$ R n'est pas régulièrement décomposable sinon aller en (3).

3) En notant $(c_i)_{i \in I}$ les charnières de R et $(C_1^i, C_2^i)_{i \in I}$ les composantes connexes qu'elles engendrent on pose :

$$A_k = \bigcap_{\begin{cases} i \in I \\ j = 1 \text{ ou } 2 \end{cases}} C_j^i \qquad B_k = \bigcap_{\begin{cases} i \in I \\ j' = 1 \text{ si } j = 2 \\ j' = 2 \text{ si } j = 1 \end{cases}} C_{j'}^i$$

tout couple (a, b), $a \in A_k$, $b \in B_k$, convient (si $|I| = n$ on a 2^{n-1} intersections à envisager).

4) Ayant un couple de sommets extrêmes la démonstration du théorème 1 nous fournit une liste d'HS.



EXEMPLE

Les charnières sont 1, 2, 3 :

$C_1^1 = (8, 9)$ $\quad$ $C_2^1 = (2, 3, 4, 5, 6, 7)$

$C_1^2 = (6, 7)$ $\quad$ $C_2^2 = (1, 3, 4, 5, 8, 9)$

$C_1^3 = (4, 5)$ $\quad$ $C_2^3 = (1, 2, 6, 7, 8, 9)$

il n'existe aucun couple de sommets séparés par toutes les charnières :

$$\bigcap_{i \in I} C_1^i = \emptyset \quad C_1^1 \cap C_2^2 \cap C_1^3 = C_2^1 \cap C_1^2 \cap C_1^3 = C_1^1 \cap C_1^2 \cap C_2^3 = \emptyset$$

6. — Quelques propriétés

6.1. — Si un graphe a une chaîne hamiltonienne, il est régulièrement décomposable entre les extrémités de la chaîne hamiltonienne.

Il est totalement décomposable.

En effet soit $C = a_1 a_2 \dots a_m$ une chaîne hamiltonienne du graphe toute bipartition de cette chaîne correspond à une hypercoupure du graphe qui est donc simple. De même le graphe est totalement décomposable car toute partition de la chaîne C est une décomposition en sous-graphes connexes de R.

6.2. — Un graphe sans charnière n'est pas nécessairement totalement décomposable : R_1 n'admet pas de 2-décomposition (fig. 9).

R_1 :

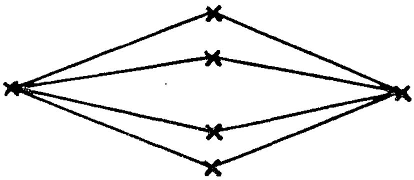


Figure 9

6.3. — Un graphe totalement décomposable n'est pas nécessairement régulièrement décomposable : R_2 a une charnière de puissance 3,5, il est cependant totalement décomposable : (fig. 10 et 11).

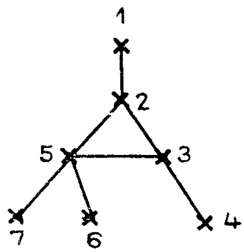
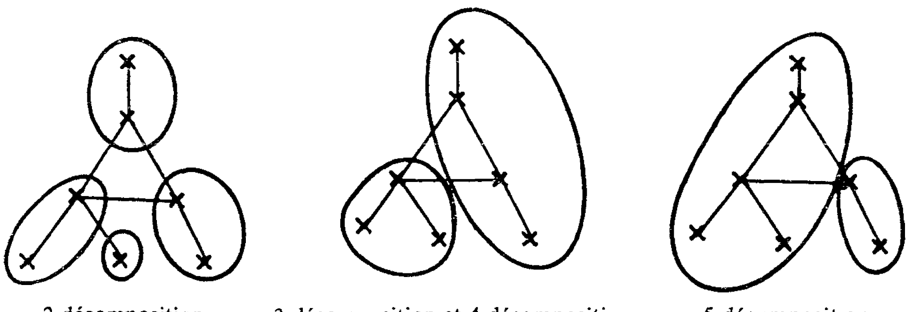


Figure 10



2-décomposition 3-décomposition et 4-décomposition 5-décomposition

Figure 11

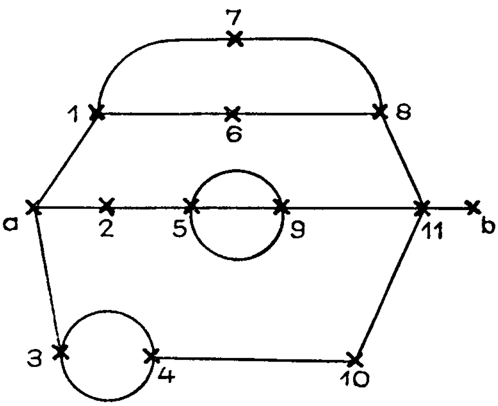
R_2 :	(12, 34, 56, 7)	$k = 2$
	(123, 567, 4)	$k = 3$
	(1234, 567)	$k = 4$
	(12567, 34)	$k = 5$

6.4. — Un graphe série-parallèle entre 2 sommets a et b est régulièrement décomposable entre a et b.

En effet si R est série-parallèle entre a et b quelle que soit l'arête α de R il existe une chaîne élémentaire joignant a à b et contenant α [2] donc quel que soit le sommet c de R il existe une chaîne élémentaire (acb), d'après le théorème 1, R est bien régulièrement décomposable entre a et b. Le théorème 2 nous permet de retrouver que toute charnière d'un graphe série-parallèle entre a et b sépare a et b, et qu'un graphe série-parallèle n'a pas de charnière de puissance > 2.

On obtient simplement des décompositions régulières d'un graphe série-parallèle entre a et b en considérant successivement les sommets à la distance 1 de a, puis 2, etc...

EXEMPLE



$(a; \dots b)$
$(a1; \dots b)$
$(a123; \dots b)$
$(a1234 ; \dots b)$
$(a1234567; \dots b)$
$(a12 \dots 9; 10, 11, b)$
$(a12 \dots 11; b)$

II. — DECOMPOSITION D'UN GRAPHE CONNEXE EN k SOUS-GRAPHES CONNEXES

1. — Borne supérieure du nombre de décompositions

Tout graphe connexe R ayant m sommets admet au moins une décomposition en k sous-graphes connexes quel que soit $1 \leqslant k \leqslant m$.

En effet il existe au moins deux sommets non charnière ([4], p. 192) soit a l'un de ceux-ci $(a; R - a)$ est une décomposition de R en 2 sous-graphes connexes on peut recommencer $k - 1$ fois sur $R - a$ puisque $1 \leqslant k \leqslant m$ (il existe une seule décomposition uniquement si $k = m$).

Considérons un graphe complet de m sommets et notons D_k^m le nombre de ses décompositions en k sous-graphes connexes : il est égal au nombre de k-partitions distinctes (pas par l'ordre) d'un ensemble de m objets :

$$(1) \qquad D_k^m = \frac{1}{k} \sum_{q=k-1}^{m-1} C_m^q \times D_{k-1}^q$$

D_k^m est la borne supérieure exacte du nombre de décomposition puisqu'atteinte pour un graphe complet.

En effet soit M un ensemble de m objets de $(A; B)$ une bi-partition de M avec $|A| = q$, $m - 1 \geqslant q \geqslant k - 1$ et $|B| = m - q$ il y a c_m^q façons de choisir A et D_{k-1}^q décompositions possibles de A en $k - 1$ sous-graphes connexes mais alors chaque k-partition sera obtenue k fois puisqu'on ne tient pas compte de l'ordre des termes.

Quelques valeurs particulières :

$$D_2^{10} = 511 \qquad D_2^n = 2^{n-X} - 1$$

$$D_3^{10} = 9\,330 \qquad D_3^n = \frac{3^{n-1} - 2^n + 1}{2}$$

$$D_4^{10} = 14\,422 \qquad D_4^n = \frac{4^n - 3(3^n - 2^{n-1}) - 1}{6}$$

2. — Propriété générale

Toute décomposition en $k + 1$ sous-graphes connexes :

$$P_{k+1} = \{ A_1, A_2; \ldots; A_{k+1} \}$$

d'un graphe connexe G, peut être obtenue à partir de k hypercoupures simples de G, $(C_i)_{i=1,2,\ldots,k}$, par la formule suivante :

$$(2) \; P_{k+1} = \{ C_1, C_2 - C_1, \ldots, C_k - (C_1 \cup C_2 \ldots \cup C_{k-1}), C_1' \cap C_2' \ldots \cap C_k' \}$$

réciproquement, à partir de $kHS(C_i)_{i=1,\ldots,k}$ que l'on peut ordonner de telle sorte que :

$$\begin{cases} C_2 - C_1 \neq \varnothing \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ C_1' \cap C_2' \ldots \cap C_k' \neq \varnothing \text{ et connexe} \end{cases}$$

on obtient une décomposition en au moins $k + 1$ sous-graphes connexes de G.

Démonstration

Nous raisonnons par récurrence sur k sur le graphe condensé associé à la décomposition. Si $k = 1$ la propriété est vraie : en effet une HS de G, différente de G, définit bien une décomposition en 2 sous-graphes connexes. Supposons la propriété vraie quel que soit $p \leqslant k$ et soit :

$P_{k+1} = \{ A_1, A_2, ..., A_{k+1} \}$ une décomposition de G en $k + 1$ sous-graphes connexes. Notons G_c le graphe condensé associé à P_{k+1}.

Il existe au moins un élément A_i de G_c tel que $G_c - A_i$ soit connexe supposons, par exemple, que ce soit A_{k+1}. La partition $p_k = \{ A_i, A_2, ..., A_k \}$ de $G - A_{k+1}$ peut être obtenue à partir de $k - 1$ HS de $G - A_{k+1}$: $(C_i)_{i=1,...,k-1}$ si ces hypercoupures sont également simples dans G :

$$\begin{cases} H_i = C_i & i \leqslant k-1 \\ H_k = A_{k+1} \end{cases}$$

on a k HS de G qui détermine p_{k+1} par (2). Si C_i est non simple dans G, A_{k+1} n'est adjacent qu'à des éléments de C_i donc $(C_iA_{k+1}; C_i')$ est simple dans G. Si l est le plus petit indice $i = 1, 2, ..., k - 1$ tel que C_l ne soit pas simple, la liste d'HS de G est :

$$\begin{aligned} H_i &= C_i & i < l \\ H_l &= A_{k+1} \\ H_{l+1} &= A_{k+1}C \\ H_{i+1} &= \begin{cases} A_{k+1}C_i \text{ si } C_i \text{ n'est pas simple dans } G \\ C_i \text{ autrement} \end{cases} & i > l \end{aligned}$$

Il est facile de vérifier que l'on obtient bien P_{k+1} avec (2).

REMARQUES

Un grand nombre de suites distinctes d'hypercoupures simples satisfaisant à la condition précédente pourront donner la même décomposition. Par exemple pour une décomposition en 3 (fig. 12).

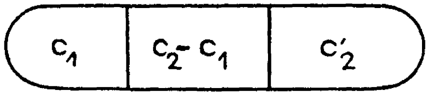


Figure 12

$$(C_1, C_2 - C_1, C_1' \cap C_2') = (C_2', C_2' - C_1', C_2 \cap C_1) = (C_2', C_2' - C_1, C_2 \cap C_1')$$
$$= (C_1, C_2' - C_1, C_1' \cap C_2') = (C_1, C_2 \cap C_1', C_1' \cap C_2')$$

pour $k > 2$ il est difficile de savoir si deux suites distinctes conduiront aux mêmes décompositions ce qui fait que l'utilisation de (2) est rapidement limitée par le nombre de HS de G et par k.

3. — Propriété des décompositions ayant un graphe condensé régulièrement décomposable

Nous dirons que k *HS*, $(C_i)_{i=1,\dots,k}$, forment une chaîne si on peut les ordonner totalement par inclusion.

Toute décomposition en $k+1$ *sous-graphes connexes ayant un graphe condensé régulièrement décomposable peut être obtenue par* (3), $(C_i)_{i=1,2,\dots,k}$ *étant une chaîne de kHS avec* $\bigcup_{i=1}^{k} C_i \neq G$:

$$P_{k+1} = \{ C_1, C_2 - C_1, \dots, C_k - C_{k-1}, C'_k \} \tag{3}$$

$$\text{avec } C_i \subset C_{i+1} \qquad i < k \qquad \bigcup_{i=1}^{k} C_i \neq G$$

En effet si le graphe condensé a pour ensemble d'hypercoupures simples :

$$\left.\begin{array}{l} (a\,;\dots b) \\ (aa_1\,;\dots b) \\ \dots\dots\dots \\ (aa_1 \dots a_{k-1}, b) \end{array}\right\} \text{ on prend } \left\{\begin{array}{l} C_1 = a \\ C_2 = aa_1 \\ \dots\dots\dots \\ C_k = aa_1 \dots a_{k-1} \end{array}\right.$$

REMARQUE

Un graphe régulièrement décomposable peut conduire à une décomposition n'ayant pas un graphe condensé associé régulièrement décomposable (fig. 13).

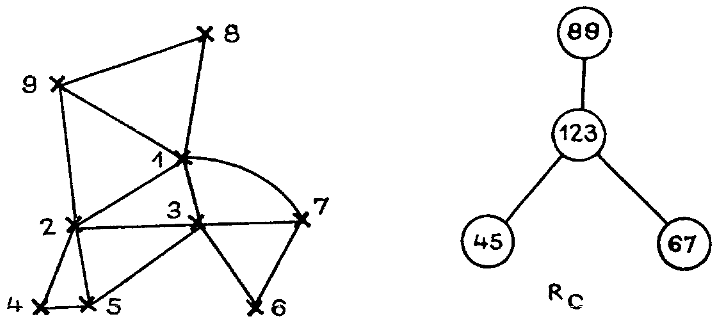


Figure 13
R est sans charnière

Nous scindons le problème initial en 2 :

a) étude des décompositions ayant un graphe condensé régulièrement décomposable,

b) étude des autres décompositions.

La condition pour une suite de HS d'être une chaîne est beaucoup plus restrictive que la condition de la propriété générale (2). Il n'y a pas de test de connexité à faire sur le dernier terme qui est égal à C'_k : ces raisons font que l'étude des décompositions ayant un graphe condensé associé régulièrement décomposable est moins compliquée que les autres.

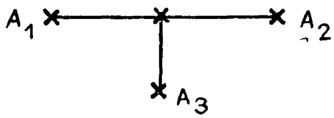
Pour étudier les autres décompositions il est inutile de chercher tous les graphes connexes de k sommets non régulièrement décomposables en effet les HS d'un graphe partiel sont des HS du graphe. Le seul arbre régulièrement décomposable étant la chaîne on part d'un arbre à k éléments (différent de la chaîne) et on construit les graphes non régulièrement décomposables en lui rajoutant des arêtes.

$k = 3$

Le seul arbre ayant 3 éléments est la chaîne : il n'y a pas de décomposition du type b). Toutes les décompositions en 3 sous-graphes connexes d'un graphe connexe s'obtiennent par la formule simple (3).

$k = 4$

Le seul arbre différent de la chaîne est



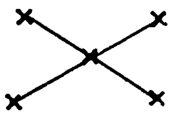
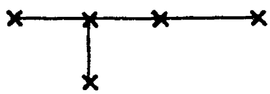
On voit facilement que c'est le seul graphe de 4 éléments non régulièrement décomposable. Pour les décompositions du type b) il suffira d'étudier les ensembles de $3HS$, A_1, A_3, A_3 telles que :

$$A_1 \cap A_2 = A_1 \cap A_3 = A_2 \cap A_3 = \varnothing \qquad A_1 \cup A_2 \cup A_3 \neq G$$

les A_i n'étant pas liés entre eux.

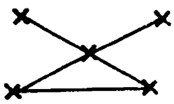
$k = 5$

Deux arbres sont différents de la chaîne

R_1  R_2 

un autre graphe est non régulièrement décomposable

R'_1



On peut encore étudier simplement les décompositions du type *b*) :

— chercher 4 *HS* disjointes deux à deux, ayant une union différente de G et telles que 2 d'entre elles au plus soient liées (R_1 et R'_1),

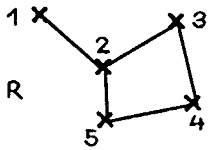
— chercher 4 *HS* trois d'entre elles étant disjointes 2 à 2 et non liées, la dernière étant liée à une seule des trois autres et la contenant.

$k = 6$

Il existe 5 arbres non régulièrement décomposables et conduisant à de nombreux graphes non régulièrement décomposables la méthode devient lourde.

EXEMPLE

Nous cherchons toutes les décompositions en 3 sous-graphes connexes de R.



Liste des hypercoupures simples de R :

Il y a donc 7 décompositions distinctes en 2 sous-graphes connexes.

$$HS \begin{cases} (1;\ 2345) \\ (3;\ 1245) \\ (4;\ 1235) \\ (5;\ 1234) \\ (12;\ 345) \\ (34;\ 125) \\ (45;\ 123) \end{cases}$$

L'un des sous-graphes connexes contient 1 et a au plus 3 éléments, ces sous-graphes nous sont donnés par la liste *HS* ce sont : 1, 12, 123, 125. Dans chaque cas il ne reste plus qu'à partager le reste en 2 sous-graphes connexes on a les chaînes d'hypercoupures simples suivantes : (1, 12) (1, 123) (1, 125) (1, 1234) (1, 1235) (1, 1245) (12, 123) (12, 125) (12, 1234) (12, 1235) (12, 1245) (123, 1234) (123, 1235) (125, 1235) (125, 1245).

On obtient ainsi 11 décompositions contenant toutes les décompositions en 3 sous-graphes connexes :

(1, 2, 345)	(3, 4, 125)	(4, 5, 123)	(5, 34, 12)
(1, 23, 45)		(4, 35, 12)	
(1, 25, 34)	(3, 45, 12)		
(1, 235, 4)			
(1, 234, 5)			
(1, 245, 3)			

La décomposition soulignée est une décomposition en 4 sous-graphes connexes : R a 10 décompositions distinctes en 2 sous-graphes connexes. (Pour les trouver il suffit de faire un test de connexité sur $C_2 - C_1$, C_1 et C_2' étant connexes.)

BIBLIOGRAPHIE

[1] F. HARARY, R. Z. NORMAN et D. CARTWRIGHT, *Structural Models*, John Wiley, Sons, 1965.

[2] C. BENZAKEN, *Ensemble ordonnés Série-Parallèle*, Séminaire de Logique, Grenoble, 1965 (non publié).

[3] J. KUNTZMANN, *Théorie des réseaux et des relations*, Cours, Grenoble, 1966.

[4] C. BERGE, *Théorie des graphes*, Dunod, 1958.

[5] M. CHEIN, *Étude des décompositions d'un réseau. Application à l'écriture des fonctions booléennes en sommes et produits*, Thèse, Grenoble, 1967.