REVUE FRANÇAISE D'INFORMATIQUE ET DE RECHERCHE OPÉRATIONNELLE

IOAN TOMESCU

Un algorithme pour la détermination des plus petites distances entre les sommets d'un réseau

Revue française d'informatique et de recherche opérationnelle, tome 1, n° 5 (1967), p. 133-139

<http://www.numdam.org/item?id=M2AN_1967__1_5_133_0>

R.I.R.O.
(1re année, N° 5, 1967, p. 133-139)

UN ALGORITHME POUR LA DETERMINATION DES PLUS PETITES DISTANCES ENTRE LES SOMMETS D'UN RÉSEAU

par Ioan Tomescu [1]

Résumé. — On présente une méthode de calcul matriciel d'une très bonne convergence et qui se prête facilement à l'utilisation sur un calculateur électronique.

Soit donné un graphe fini sans boucle $G = (X, \Gamma)$ avec p sommets.

On définit une application $l(u)$ sur l'ensemble U des arcs du graphe avec les valeurs dans l'ensemble $\{ x \mid x \geqslant 0 \}$ et on introduit la matrice carrée $A = \{ a_{\alpha\beta} \}_{\alpha,\beta=1,\ldots,p}$ où l'on a : $a_{\alpha\alpha} = 0$; $a_{\alpha\beta} = l(x_\alpha, x_\beta)$ s'il y a un arc qui va de x_α à x_β et $a_{\alpha\beta} = \infty$ en cas contraire.

Les plus petites distances entre les sommets du réseau, désignées par $\hat{a}_{\alpha\beta}$ sont respectivement :

$$\hat{a}_{\alpha\beta} = \min_{\mu=(x_\alpha,\ldots,x_\beta)} \{ \sum_{u\in\mu} l(u) \} = \min \{ a_{\alpha\beta}, \min_{\substack{k_1=1,\ldots,p \\ k_1\neq\alpha,\beta}} (a_{\alpha k_1} + a_{k_1\beta}), \ldots$$

$$\ldots, \min_{\substack{k_1,k_2,\ldots,k_{p-2}=1,\ldots,p \\ k_1,k_2,\ldots,k_{p-2}\neq\alpha,\beta \\ k_1\neq k_2, k_1\neq k_3,\ldots,k_{p-3}\neq k_{p-2}}} (a_{\alpha k_1} + a_{k_1 k_2} + \ldots + a_{k_{p-2}\beta}) \} \quad (1)$$

Si l'on introduit la multiplication des matrices

$$A = \{ a_{\alpha\beta} \}_{\alpha,\beta=1,\ldots,p} \text{ et } B = \{ b_{\alpha\beta} \}_{\alpha,\beta=1,\ldots,p}$$

avec

$$a_{\alpha\beta}, b_{\alpha\beta} \in \{ x \mid x \geqslant 0 \} \cup \{ \infty \} \text{ et } a_{\alpha\alpha} = b_{\alpha\alpha} = 0,$$

définie par

$$\{ A \times B \}_{\alpha\beta} = \min_{\gamma=1,\ldots,p} (b_{\alpha\gamma} + c_{\gamma\beta}) = \min \{ b_{\alpha\beta}, c_{\alpha\beta}, \min_{\substack{\gamma=1,\ldots,p \\ \gamma\neq\alpha,\beta}} (b_{\alpha\gamma} + c_{\gamma\beta}) \}$$

---

(1) Université de Bucarest

(cette loi est associative), alors la matrice $A^{p-1} = A^p = \ldots$ représente la matrice des plus petites distances entre les sommets du réseau (voir [2], [4]).

On introduit une relation d'ordre partiel dans l'ensemble des matrices aux éléments dans l'ensemble $\{ x \mid x \geqslant 0 \} \cup \{ \infty \}$ de la façon suivante : $A \leqslant B$ si $a_{\alpha\beta} \leqslant b_{\alpha\beta}$ pour tout $\alpha, \beta = 1, \ldots, p$. Si $A \leqslant C$ et $B \leqslant D$ on déduit que $a_{\alpha\gamma} + b_{\gamma\beta} \leqslant c_{\alpha\gamma} + d_{\gamma\beta}$ et donc

$$\min_{\gamma=1,\ldots,p} (a_{\alpha\gamma} + b_{\gamma\beta}) \leqslant \min_{\gamma=1,\ldots,p} (c_{\alpha\gamma} + d_{\gamma\beta}),$$

c'est-à-dire $A \times B \leqslant C \times D$.

Si $a_{\alpha\alpha} = 0$ alors $\{ A^2 \}_{\alpha\beta} = \min \{ a_{\alpha\beta}, \min\limits_{\substack{\gamma=1,\ldots,p \\ \gamma\neq\alpha,\beta}} (a_{\alpha\gamma} + a_{\gamma\beta}) \} \leqslant a_{\alpha\beta}$ et par conséquent $A \geqslant A^2 \geqslant \ldots \geqslant A^{p-1} = A^p = \ldots$

On introduit les opérateurs $T_{1\alpha}$ où $\alpha \in \{ 2, 3, \ldots, p \}$ définis sur l'ensemble des matrices $A = \{ a_{\alpha\beta} \}_{\alpha,\beta=1,\ldots,p}$ avec $a_{\alpha\beta} \in \{ x \mid x \geqslant 0 \} \cup \{ \infty \}$ et $a_{\alpha\alpha} = 0$ comme il suit :

$$T_{1\alpha}(A) = B$$

si

$$b_{1\alpha} = \min \{ a_{1\alpha}, \min_{\substack{\rho=2,\ldots,p \\ \rho\neq\alpha}} (a_{1\rho} + a_{\rho\alpha}) \} \qquad \text{et} \qquad b_{\mu\nu} = a_{\mu\nu}$$

pour tout $(\mu, \nu) \neq (1, \alpha)$.

On en déduit que $A \geqslant T_{1\alpha}(A) \geqslant A^2$, donc

$$A^{p-1} \geqslant (T_{1\alpha}(A))^{p-1} \geqslant (A^2)^{p-1} = A^{p-1}$$

et par conséquent $(T_{1\alpha}(A))^{p-1} = A^{p-1}$.

On introduit l'opérateur $T_1 = T_{1p} T_{1p-1} \ldots T_{12}$.

Par définition $T_1(A) = T_{1p}(T_{1p-1}(T_{1p-2} \ldots (T_{12}(A)) \ldots)$ et donc

$$\begin{aligned}(T_1(A))^{p-1} &= (T_{1p}(T_{1p-1} T_{1p-2} \ldots T_{12}(A)))^{p-1} = \\ &= (T_{1p-1} T_{1p-2} \ldots T_{12}(A))^{p-1} = \ldots = A^{p-1}.\end{aligned}$$

Proposition. $(T_1^n(A))^{p-1} = A^{p-1}$ pour tout $n \in N$, où T_1^n est l'itération n fois de suite de l'opérateur T_1.

La démonstration se fait par induction :

$$(T_1^n(A))^{p-1} = (T_1(T_1^{n-1}(A)))^{p-1} = (T_1^{n-1}(A))^{p-1} = A^{p-1}.$$

Théorème 1. $\{ T_1^n(A) \}_{1\alpha} \leqslant \{ A^{n+1} \}_{1\alpha}$ pour tout $\alpha = 2, \ldots, p$ et $n \in N$.

La démonstration se fait par induction par rapport à n :

$$\{ T_1(A) \}_{12} = \min \{ a_{12}, \min_{\beta=3,\ldots,p} (a_{1\beta} + a_{\beta 2}) \} = \{ A^2 \}_{12}.$$

Si nous avons démontré que

$$\{ T_1(A) \}_{12} \leqslant \{ A^2 \}_{12}, \ldots, \{ T_1(A) \}_{1\alpha-1} \leqslant \{ A^2 \}_{1\alpha-1}$$

on déduit que

$$\{ T_1(A) \}_{1\alpha} = \min \{ a_{1\alpha}, \min_{\beta=2,\ldots,\alpha-1} (\{ T_1(A) \}_{1\beta} + a_{\beta\alpha}), \min_{\beta=\alpha+1,\ldots,p} (a_{1\beta} + a_{\beta\alpha}) \} \leqslant \min \{ a_{1\alpha}, \min_{\substack{\beta=2,\ldots,p \\ \beta\neq\alpha}} (a_{1\beta} + a_{\beta\alpha}) \} = \{ A^2 \}_{1\alpha}$$

pour $3 \leqslant \alpha \leqslant p$ parce que $\{ T_1(A) \}_{1\beta} \leqslant \{ A^2 \}_{1\beta} \leqslant a_{1\beta}$ pour tout $\beta = 2, \ldots, \alpha - 1$.

Il résulte que $\{ T_1(A) \}_{1\alpha} \leqslant \{ A^2 \}_{1\alpha}$ pour $\alpha = 2, \ldots, p$.

Si nous supposons que $\{ T_1^k(A) \}_{1\alpha} \leqslant \{ A^{k+1} \}_{1\alpha}$ pour tout $\alpha = 2, \ldots, p$ on obtient :

$$\{ T_1^{k+1}(A) \}_{12} = \min \{ \{ T_1^k(A) \}_{12}, \min_{\beta=3,\ldots,p} (\{ T_1^k(A) \}_{1\beta} + a_{\beta 2}) \} \leqslant$$
$$\leqslant \min \{ \{ A^{k+1} \}_{12}, \min_{\beta=3,\ldots,p} (\{ A^{k+1} \}_{1\beta} + a_{\beta 2}) \} = \{ A^{k+2} \}_{12}$$

parce qu'il y a $\min (\{ A^{k+1} \}_{12}, a_{12}) = \{ A^{k+1} \}_{12}$.
Si

$$\{ T_1^{k+1}(A) \}_{12} \leqslant \{ A^{k+2} \}_{12}, \ldots, \{ T_1^{k+1}(A) \}_{1\alpha-1} \leqslant \{ A^{k+2} \}_{1\alpha-1},$$

alors

$$\{ T_1^{k+1}(A) \}_{1\alpha} = \min \{ \{ T_1^k(A) \}_{1\alpha}, \min_{\beta=2,\ldots,\alpha-1} (\{ T_1^{k+1}(A) \}_{1\beta} + a_{\beta\alpha}), \min_{\beta=\alpha+1,\ldots,p} (\{ T_1^k(A) \}_{1\beta} + a_{\beta\alpha}) \} \leqslant \min \{ \{ A^{k+1} \}_{1\alpha}, \min_{\substack{\beta=2,\ldots,p \\ \beta\neq\alpha}} (\{ A^{k+1} \}_{1\beta} + a_{\beta\alpha}) \} = \{ A^{k+2} \}_{1\alpha}$$

pour $3 \leqslant \alpha \leqslant p$ (parce que

$$\{ A^{k+1} \}_{1\alpha} \leqslant a_{1\alpha} \text{ et } \{ T_1^{k+1}(A) \}_{1\beta} \leqslant \{ A^{k+2} \}_{1\beta} \leqslant \{ A^{k+1} \}_{1\beta}$$

pour tout $\beta = 2, \ldots, \alpha - 1$), donc $\{ T_1^{k+1}(A) \}_{1\alpha} \leqslant \{ A^{k+2} \}_{1\alpha}$ pour tout $\alpha = 2, \ldots, p$. C.Q.F.D.

Si q est le plus petit indice avec $A^q = A^{p-1}$, alors

$$\{ T_1^{q-1}(A) \}_{1\alpha} \leqslant \{ A^q \}_{1\alpha} = \{ A^{p-1} \}_{1\alpha}$$

pour tout $\alpha = 2, \ldots, p$, mais

$$\{ T_1^{q-1}(A) \}_{1\alpha} \geqslant \{ (T_1^{q-1}(A))^{p-1} \}_{1\alpha} = \{ A^{p-1} \}_{1\alpha},$$

donc $\{ T_1^{q-1}(A) \}_{1\alpha} = \{ A^{p-1} \}_{1\alpha}$ ($q \leqslant p - 1$).

Au moment où $T_1^r(A) = T_1^{r+1}(A)$ on obtient

$$T_1^r(A) = T_1^{r+1}(A) = T_1^{r+2}(A) = \dots = T_1^{p-2}(A)$$

et par conséquent $\{ T_1^r(A) \}_{1\alpha} = \{ T_1^{p-2}(A) \}_{1\alpha} = \{ A^{p-1} \}_{1\alpha}$.

Théorème 2. Pour toute matrice carrée A d'ordre p avec

$$a_{\alpha\beta} \in \{ x \mid x \geqslant 0 \} \cup \{ \infty \} \qquad \text{et} \qquad a_{\alpha\alpha} = 0$$

ont lieu les relations :

$$\{ A^{p-1} \}_{12} = \min \Big(\{ T_1^{p-3}(A) \}_{12}, \ \sum_{i=3}^{p} a_{ii-1} + a_{1p}, \ \sum_{i=3}^{p-2} a_{ii-1} + \\ + a_{1p-1} + a_{p-1p} + a_{pp-2} \Big) .$$

$$\{ A^{p-1} \}_{13} = \min \Big(\{ T_1^{p-3}(A) \}_{13}, \ \sum_{i=4}^{p} a_{ii-1} + a_{12} + a_{2p} \Big) .$$

$\{ A^{p-1} \}_{1\alpha} = \{ T_1^{p-3}(A) \}_{1\alpha}$ pour tout $4 \leqslant \alpha \leqslant p$.

Démonstration. Pour tout $\alpha = 2, \dots, p$ et $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_r \neq 1, \alpha$; $\gamma_1 \neq \gamma_2, \dots, \gamma_{r-1} \neq \gamma_r$ et $r \leqslant p - 3$ on a la relation :

$$\{ T_1^{p-3}(A) \}_{1\alpha} \leqslant a_{1\gamma_1} + \sum_{i=1}^{r-1} a_{\gamma_i\gamma_{i+1}} + a_{\gamma_r\alpha}.$$

En effet,

$$\{ T_1^{p-3}(A) \}_{1\alpha} = \{ T_1(T_1^{p-4}(A)) \}_{1\alpha} \leqslant \{ T_1^{p-4}(A) \}_{1\gamma_r} + a_{\gamma_r\alpha} = \\ = \{ T_1(T_1^{p-5}(A)) \}_{1\gamma_r} + a_{\gamma_r\alpha} \leqslant \{ T_1^{p-5}(A) \}_{1\gamma_{r-1}} + a_{\gamma_{r-1}\gamma_r} + \\ + a_{\gamma_r\alpha} \leqslant \dots \leqslant \{ T_1^{p-r-3}(A) \}_{1\gamma_1} + \sum_{i=1}^{r-1} a_{\gamma_i\gamma_{i+1}} + a_{\gamma_r\alpha} \leqslant a_{1\gamma_1} + \\ + \sum_{i=1}^{r-1} a_{\gamma_i\gamma_{i+1}} + a_{\gamma_r\alpha}.$$

Pour tout $\alpha = 2, \dots, p$ et

$$\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{p-2} \neq 1, \alpha \, ; \, \gamma_1 \neq \gamma_2, \dots, \gamma_{p-3} \neq \gamma_{p-2}$$

et dans le cas $\alpha = 2$:

$$(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{p-2}) \neq \\ \neq (p, p-1, p-2, \dots, 4, 3), (p-1, p, p-2, p-3, \dots, 4, 3)$$

et dans le cas $\alpha = 3$: $(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{p-2}) \neq (2, p, p-1, \dots, 5, 4)$ il y a $2 \leqslant j \leqslant p-2$ avec $\gamma_j < \gamma_{j+1}$. $(\gamma_{p-1} = \alpha)$.

On en déduit que

$$\{ T_1^{p-3}(A) \}_{1\alpha} \leqslant \{ T_1^{p-4}(A) \}_{1\gamma_{p-2}}$$

$$+ a_{\gamma_{p-2}\alpha} \leqslant \ldots \leqslant \{ T_1^{j-1}(A) \}_{1\gamma_{j+1}} + \sum_{i=j+1}^{p-3} a_{\gamma_i\gamma_{i+1}} + a_{\gamma_{p-2}\alpha} \leqslant$$

$$\leqslant \{ T_1^{j-1}(A) \}_{1\gamma_j} + \sum_{i=j}^{p-3} a_{\gamma_i\gamma_{i+1}} + a_{\gamma_{p-2}\alpha} \leqslant \ldots \leqslant \{ T_1(A) \}_{1\gamma_2} +$$

$$+ \sum_{i=2}^{p-3} a_{\gamma_i\gamma_{i+1}} + a_{\gamma_{p-2}\alpha} \leqslant a_{1\gamma_1} + \sum_{i=1}^{p-3} a_{\gamma_i\gamma_{i+1}} + a_{\gamma_{p-2}\alpha}.$$

Compte tenu des relations (1) on obtient $\{ T_1^{p-3}(A) \}_{1\alpha} \leqslant \{ A^{p-1} \}_{1\alpha}$ pour tout $\alpha = 4, \ldots, p$ et

$$\min \Big(\{ T_1^{p-3}(A) \}_{12}, \quad \sum_{i=3}^{p} a_{ii-1} + a_{1p}, \quad \sum_{i=3}^{p-2} a_{ii-1} + $$
$$+ a_{1p-1} + a_{p-1p} + a_{pp-2} \Big) \leqslant \{ A^{p-1} \}_{12} .$$

$$\min \Big(\{ T_1^{p-3}(A) \}_{13}, \quad \sum_{i=4}^{p} a_{ii-1} + a_{12} + a_{2p} \Big) \leqslant \{ A^{p-1} \}_{13}.$$

Mais $\{ T_1^{p-3}(A) \}_{1\alpha} \geqslant \{ (T_1^{p-3}(A))^{p-1} \}_{1\alpha} = \{ A^{p-1} \}_{1\alpha}$ pour tout

$$\alpha = 2, \ldots, p \quad \text{et} \quad \sum_{i=3}^{p} a_{ii-1} + a_{1p} \geqslant \{ A^{p-1} \}_{12}, \quad \sum_{i=3}^{p-2} a_{ii-1} + a_{1p-1} +$$

$$+ a_{p-1p} + a_{pp-2} \geqslant \{ A^{p-1} \}_{12}, \quad \sum_{i=4}^{p} a_{ii-1} + a_{12} + a_{2p} \geqslant \{ A^{p-1} \}_{13}$$

d'où il résulte les égalités cherchées.

Pour la détermination des chemins de longueur minimale on peut donner un algorithme très simple (dans le cas où le graphe n'a pas des circuits de longueur zéro et par conséquent, tous les chemins minimaux sont élémentaires) :

Si $\hat{a}_{1\alpha} \neq \infty$, alors il existe des chemins de x_1 à x_α. Si $\hat{a}_{1\alpha} = a_{1\alpha}$ alors l'arc (x_1, x_α) est un chemin de longueur minimale entre x_1 et x_α.

S'il existe un $\gamma \neq 1, \alpha$ qui satisfait à l'équation : $\hat{a}_{1\alpha} = \hat{a}_{1\gamma} + a_{\gamma\alpha}$ alors un chemin minimal entre x_1 et x_α est $(\mu_{1\gamma}, x_\alpha)$ si $\mu_{1\gamma} = (x_1, \ldots, x_\gamma)$ est un chemin minimal entre x_1 et x_γ.

En s'appuyant sur le procédé indiqué on trouve par récurrence tous les chemins élémentaires minimaux entre x_1 et x_α. L'algorithme présenté ci-dessus a été programmé sur le calculateur électronique numérique du Centre de Calcul de l'Université de Bucarest.

Exemple : Soit le réseau décrit par la matrice symétrique :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 2 & \infty & \infty & 1 & \infty & 7 & \infty \\ 5 & 0 & 4 & 3 & 3 & 2 & 6 & \infty & 5 \\ 2 & 4 & 0 & 1 & 6 & 3 & 4 & \infty & \infty \\ \infty & 3 & 1 & 0 & 7 & 5 & 3 & 1 & 1 \\ \infty & 3 & 6 & 7 & 0 & 6 & 5 & 5 & \infty \\ 1 & 2 & 3 & 5 & 6 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ \infty & 6 & 4 & 3 & 5 & 1 & 0 & 3 & 3 \\ 7 & \infty & \infty & 1 & 5 & 2 & 3 & 0 & 4 \\ \infty & 5 & \infty & 1 & \infty & 1 & 3 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

Par l'application de l'opérateur T_1 la première ligne de la matrice A se transforme comme il suit :

$(0, 3, 2, \infty, \infty, 1, \infty, 7, \infty)$; $(0, 3, 2, \infty, \infty, 1, \infty, 7, \infty)$;
$(0, 3, 2, 3, \infty, 1, \infty, 7, \infty)$; $(0, 3, 2, 3, 6, 1, \infty, 7, \infty)$;
$(0, 3, 2, 3, 6, 1, \infty, 7, \infty)$; $(0, 3, 2, 3, 6, 1, 2, 7, \infty)$;
$(0, 3, 2, 3, 6, 1, 2, 3, \infty)$; $(0, 3, 2, 3, 6, 1, 2, 3, 2)$.

Parce qu'il y a $T_1^2(A) = T_1(A)$ il résulte que

$$\{ T_1(A) \}_{1\alpha} = \{ A^8 \}_{1\alpha} = \hat{a}_{1\alpha}$$

pour tout $\alpha = 2, 3, ..., 9$, donc

$\hat{a}_{12} = 3$; $\hat{a}_{13} = 2$; $\hat{a}_{14} = 3$; $\hat{a}_{15} = 6$; $\hat{a}_{16} = 1$; $\hat{a}_{17} = 2$; $\hat{a}_{18} = 3$; $\hat{a}_{19} = 2$.

Pour déterminer tous les chemins minimaux entre x_1 et x_4 par exemple, il faut trouver d'abord les solutions de l'équation :

$$\hat{a}_{14} = 3 = \hat{a}_{1\gamma} + a_{\gamma 4} \ (\gamma \neq 1,4)$$

ce qui nous donne $\gamma_1 = 3$; $\gamma_2 = 9$.

L'équation $\hat{a}_{13} = \hat{a}_{1\delta} + a_{\delta 3}$ n'a aucune solution $\delta \neq 1, 3$ mais $\hat{a}_{13} = a_{13}$ et nous avons donc obtenu un chemin minimal (x_1, x_3, x_4).

Pour γ_2 l'équation $\hat{a}_{19} = \hat{a}_{1\delta} + a_{\delta 9}$ $(\delta \neq 1,9)$ nous donne

$$\delta_1 = 6 \text{ et } \hat{a}_{16} = a_{16} \text{ ; } \hat{a}_{16} < \hat{a}_{1\varepsilon} + a_{\varepsilon 6}$$

pour tout $\varepsilon \neq 1, 6$.

Le second chemin minimal est donc (x_1, x_6, x_9, x_4).

Facultatea de Matematică și Mecanică
Strada Academiei, 14
Bucuresti, 22
République Socialiste de Roumanie.

BIBLIOGRAPHIE

[1] R. Bellman, On a routing problem, *Quart. Appl. Math.*, **16** (1958).

[2] C. Berge, *Théorie des graphes et ses applications*, Dunod, Paris, 1963.

[3] A. Kaufmann, *Méthodes et modèles de la Recherche opérationnelle*, tome 2, Dunod, Paris, 1964.

[4] Gr. C. Moisil, *Asupra unor reprezentări ale grafurilor ce intervin în probleme de economia transporturilor*, Comunicările Acad. R.P.R., nr. 8, X, 1960.

[5] B. Roy, *Transitivité et connexité*, C.R. Acad. Sci. Paris, tome 249, 1959, p. 216-218.

[6] I. Tomescu, *Metodă pentru determinarea drumului de cea mai mică lungime dintre două noduri ale unui graf finit*, Analele Univ. Bucureşti, nr. 2, 1966.

[7] I. Tomescu, *Sur les méthodes matricielles dans la théorie des réseaux*, C.R. Acad. Sci. Paris, tome 263, 1966, p. 826-829.

[8] L. Nolin, *Traitement des données groupées*, Publication de l'Institut Blaise-Pascal, Paris, mai 1964.