

REVUE FRANÇAISE D'INFORMATIQUE ET DE RECHERCHE OPÉRATIONNELLE

CLAUDE CARASSO

Méthode générale de construction de fonctions spline

Revue française d'informatique et de recherche opérationnelle,
tome 1, n° 5 (1967), p. 119-127

<http://www.numdam.org/item?id=M2AN_1967__1_5_119_0>

© AFCET, 1967, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Revue française d'informatique et de recherche opérationnelle » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

METHODE GENERALE DE CONSTRUCTION DE FONCTIONS SPLINE

par CLAUDE CARASSO⁽¹⁾

Résumé. — Dans cet article nous proposons une méthode pour obtenir à la fois analytiquement et numériquement les fonctions spline d'interpolation généralisées. Deux exemples d'application sont traités complètement : les fonctions spline d'interpolation et les fonctions spline d'Hermite.

1. DEFINITIONS

Soit X et Y deux espaces de Hilbert sur \mathbf{R} et T une application linéaire et continue de X sur Y . Soit $k_i (i = 1, \dots, n)$ n éléments linéairement indépendants de X et soit K l'application

$$x \in X \rightarrow \mathbf{R}^n \ni ((k_1|x) \dots, (k_n|x)).$$

On pose :

$$\text{Ker}(T) = \{x \in X : Tx = 0\} = \text{noyau de } T$$

Soit q la dimension de $\text{Ker}(T)$; on suppose que $q \leq n$ et $\text{Ker}(T) \cap \text{Ker}(K) = \{0\}$.

On a alors le résultat suivant (voir Atteia [4]) :

quel que soit $\alpha \in \mathbf{R}^n$ il existe un élément unique $s \in X$ tel que

$$\|Ts\| = \text{Min}_{x \in \Phi_\alpha} \|Tx\| \quad \text{avec} \quad \Phi_\alpha = \{x \in X : K(x) = \alpha\}$$

s est la fonction spline de K relative à T .

2. THEOREMES FONDAMENTAUX

Soit $V \subset X$ on note $V^\perp = \{x \in X : \forall y \in V (x|y) = 0\}$

On a alors le théorème suivant (voir Laurent [1]).

(1) Faculté des Sciences de Grenoble.

Théorème 1

$M = \text{Ker}(T)^\perp \cap \text{Ker}(K)^\perp$ est un sous-espace vectoriel de X de dimension $n - q$.

DÉMONSTRATION :

Posons $A = K(\text{Ker}(T))$; $\text{Ker}(T)$ étant un sous-espace vectoriel de X de dimension q , A est un sous-espace vectoriel de dimension q de \mathbf{R}^n (car $\text{Ker}(T) \cap \text{Ker}(K) = \{0\}$).

On a donc $\dim A^\perp = n - q$ (soit $b_i (i = 1, \dots, n - q)$ une base de A^\perp).

Soit tK l'application transposée de K (Bourbaki [7]), tK applique biunivoquement \mathbf{R}^n sur $\text{Ker}(K)^\perp$. ${}^tK(A^\perp)$ est donc un sous-espace vectoriel de $\text{Ker}(K)^\perp$ de dimension $n - q$. On a également ${}^tK(A^\perp) = M$, en effet

$$x = {}^tK(y) \in {}^tK(A^\perp) \Leftrightarrow \forall u \in \text{Ker}(T) ({}^tKy | u) = (y | Ku) = 0 \Leftrightarrow x \in M$$

REMARQUE. — Les vecteurs $h_i = \sum_{j=1}^n b_{i,j} k_j = {}^tK(b_i)$ (où $b_{i,j}$ désigne la j -ième composante du vecteur $b_i \in A^\perp$), forment une base de $M = \text{Ker}(K)^\perp \cap \text{Ker}(T)^\perp$.

On pose $\varphi_i = {}^tT^{-1}(h_i) (i = 1, \dots, n - q)$. Appelons B l'application de \mathbf{R}^n dans \mathbf{R}^{n-q} définie par la matrice $(b_{i,j}) (i = 1, \dots, n - q; j = 1, \dots, n)$. On a $\text{Ker}(B) = K(\text{Ker}(T))$, en effet :

$$y \in \text{Ker}(B) \Leftrightarrow By = 0 \Leftrightarrow (b_i | y) = 0 \quad i = 1, \dots, n - q \Leftrightarrow y \in K(\text{Ker}(T))$$

Théorème 2

$$Ts = \sum_{j=1}^{n-q} \lambda_j \varphi_j \quad \text{avec} \quad A\lambda = B\alpha$$

où A désigne la matrice (symétrique) dont les éléments sont $(\varphi_i | \varphi_j) (i, j = 1, \dots, n - q)$.

DÉMONSTRATION :

On pose $\beta = B\alpha$ (on notera β_i la i^{e} composante de β) et

$$\Delta_\beta = \{y \in Y : (\varphi_i | y) = \beta_i \quad i = 1, \dots, n - q\}$$

Montrons que $T\Phi_\alpha = \Delta_\beta$.

a) $T\Phi_\alpha \subset \Delta_\beta$

$$y = Tx \in T\Phi_\alpha \Leftrightarrow Kx = \alpha \Rightarrow B \cdot Kx = B\alpha = \beta \Leftrightarrow (h_i | x) = \beta_i$$

$$i = 1, \dots, n - q \Leftrightarrow ({}^tT\varphi_i | x) = (\varphi_i | Tx) = \beta_i$$

$$i = 1, \dots, n - q \Leftrightarrow Tx = y \in \Delta_\beta$$

b) $\Delta_\beta \subset T(\Phi_\alpha)$.

$$Tx = y \in \Delta_\beta \Leftrightarrow ({}^tT^{-1}h_i | Tx) = (h_i | x) = \beta_i$$

$$i = 1, \dots, n - q \Leftrightarrow BK(x) = B\alpha \Rightarrow K(x) = \alpha + u \quad \text{avec} \quad u \in \text{Ker}(B).$$

D'après la remarque, il existe $v \in \text{Ker}(T)$ tel que $u = K(v)$. Posons $x^* = x - v$, on a alors $Tx^* = Tx = y$ et $Kx^* = \alpha$ donc $y \in T\Phi_\alpha$.

On a d'après la définition de s :

$$\|Ts\| = \text{Min}_{x \in \Phi_\alpha} \|Tx\| = \text{Min}_{y \in T\Phi_\alpha} \|y\| = \text{Min}_{y \in \Delta_\beta} \|y\| = \|y^*\| \quad \text{donc} \quad y^* \in \Delta_\beta^\perp$$

$$\text{Soit } c \in \Delta_\beta, \text{ on a } \Delta_\beta = c + \Delta_0 \text{ donc } y^* \in \Delta_0^\perp \Leftrightarrow y^* = \sum_{i=1}^{n-q} \lambda_i \varphi_i.$$

Comme T est surjective et s unique on a $y^* = Ts$. D'autre part :

$$y^* \in \Delta_\beta \Leftrightarrow \sum_{j=1}^{n-q} \lambda_j (\varphi_j, \varphi_j) = \beta_i \quad i = 1, \dots, n - q. \quad \text{Q.E.D.}$$

3. CONSTRUCTION DE FONCTIONS SPLINE D'INTERPOLATION

On a dans ce cas :

$$X = H^k[a, b] = \left\{ f \in C^{k-1}(\mathbf{R}, \mathbf{R}) : \int_a^b (f^{(k)})^2 < +\infty \right\}$$

$$Y = L^2[a, b] = H^0[a, b] \cdot H^k[a, b]$$

est un espace de Hilbert avec le produit scalaire $(f | g) = \sum_{i=0}^k \int_a^b f^{(i)} g^{(i)}$.

$$T = D^k \text{ avec } D^k f = f^{(k)}.$$

$K(f) = [f(x_1), \dots, f(x_n)] \in \mathbf{R}^n$. On suppose $a \leq x_1 < x_2 < \dots < x_n \leq b$ et $k \leq n$.

Les éléments k_i de X sont dans ce cas les fonctionnelles ponctuelles $(k_i | f) = f(x_i)$.

Toutes les hypothèses du paragraphe 1 sont vérifiées ; la fonction spline est alors dans ce cas la fonction de $H^k[a, b]$ la plus « lisse » (au sens de $\|f\|$ dans $H^k[a, b]$ minimum) prenant aux abscisses x_i les valeurs $\alpha_i (i = 1, \dots, n)$.

On a en conservant les notations du paragraphe précédent.

$$\text{Ker}(D^k) = \{ \text{polynômes de degré} \leq k - 1 \} = \{ P_{k-1} \}$$

$$A = \{ y \in \mathbf{R}^n \mid \exists P_{k-1} \quad \text{avec} \quad y_i = P_{k-1}(x_i) \quad i = 1, \dots, n \}$$

$$A^\perp = \{ y \in \mathbf{R}^n \mid \forall P_{k-1} \sum_{i=1}^n y_i P_{k-1}(x_i) = 0 \}$$

Nous savons que la différence divisée sur $k + 1$ points d'un polynôme de degré $k - 1$ est nulle (Kuntzmann [2]); on peut donc prendre pour base de A^1 les vecteurs $b_i (i = 1, \dots, n - k)$ tels que la j^{e} composante du vecteur b_i de \mathbf{R}^n soit :

$$b_{i,j} = \begin{cases} (\omega'_i(x_j))^{-1} & \text{si } i \leq j \leq i + k \\ & \text{avec } \omega_i(x) = \prod_{j=i}^{i+k} (x - x_j) \\ 0 & (i = 1, \dots, n - k; j = 1, \dots, n) \end{cases}$$

Les vecteurs $b_i (i = 1, \dots, n - k)$ sont linéairement indépendants et appartiennent à A^1 d'après l'égalité :

$$\delta_{x_i, \dots, x_{i+k}} P_{k-1} = \sum_{j=i}^{i+k} \frac{P_{k-1}(x_j)}{\omega'_i(x_j)} = 0$$

Les éléments $\varphi_i \in L_2[a, b] (i = 1, \dots, n - k)$ sont définis par la relation :

$$\forall f \in X (h_i | f) = (\varphi_i | f^{(k)}) \quad i = 1, \dots, n - k$$

$$\sum_{j=1}^n b_{i,j}(k_j | f) = (\varphi_i | f^{(k)}) \quad \text{soit :}$$

$$\delta_{x_i, \dots, x_{i+k}} f = \int_a^b \varphi_i(t) f^{(k)}(t) dt \quad i = 1, \dots, n - k.$$

Le développement de Taylor de f peut s'écrire :

$$f(x) = P_{k-1}(x) + \frac{1}{(k-1)!} \int_a^b (x-t)_+^{k-1} f^{(k)}(t) dt \quad \text{avec } E_+^k = \begin{cases} E^k & \text{si } E > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On a donc :

$$\delta_{x_i, \dots, x_{i+k}} f = \frac{1}{(k-1)!} \int_a^b \delta_{x_i, \dots, x_{i+k}} (x-t)_+^{k-1} f^{(k)}(t) dt$$

$$\text{d'où :} \quad \varphi_i(t) = \frac{1}{(k-1)!} \delta_{x_i, \dots, x_{i+k}} (x-t)_+^{k-1}$$

On a alors (Carasso. [3] p. 55)

$$c_{i,j} = (\varphi_i | \varphi_j) = \frac{(-1)^k}{(2k-1)!} \delta_{x_i, \dots, x_{i+k}} h_j(+)$$

et :

$$\beta_i = x_i, \dots, x_{i+k} y$$

avec :

$$(3-1) \quad h_j(t) = \delta_{x_j, \dots, x_{j+k}}(t - x)_+^{2k-1}$$

On peut remarquer que $\varphi_i(t) = 0$ pour $t \notin]x_i, x_{i+k}[$ donc $c_i, j = c_{j,i} = 0$ pour $j \geq i + k$. La matrice C est donc symétrique avec seulement $k - 1$ sous diagonales non nulles.

D'après le théorème 2 on a :

$$s^{(k)}(t) = \frac{1}{(k-1)!} \sum_{i=1}^{n-k} \lambda_i \delta_{x_i, \dots, x_{i+k}}(x - t)_+^{k-1}$$

D'où :

$$s(t) = P_{k-1}(t) + \frac{(-1)^k}{(2k-1)!} \sum_{i=1}^{n-k} \lambda_i \delta_{x_i, \dots, x_{i+k}}(x - t)_+^{2k-1}$$

4. METHODE NUMERIQUE

D'après l'expression précédente, on voit que la fonction-spline s est formée dans chaque intervalle $[x_i, x_{i+1}]$ de morceaux de polynômes de degré $2k - 1$. Le calcul de $s(t)$ fait intervenir d'autant plus de coefficients λ_i que la variable t est plus élevée. Les erreurs de calcul inévitables commises sur les $\lambda_i (i = 1, \dots, n - k)$ entraînent donc une erreur croissante avec t sur la fonction $s(t)$. Pour éviter cette propagation de l'erreur, on opère localement en écrivant s sous la forme :

$$s(t) = P_{i, k-1}(t) + \int_{x_1}^{x_n} K(x, t) s^{(k)}(x) dx$$

$P_{i, k-1}(t)$ étant le polynôme de degré $k - 1$ passant par les points $(x_p, y_p) p = i, \dots, i + k - 1$.

Les points x_i, \dots, x_{i+k-1} sont pris au voisinage de t .

Le noyau d'erreur $K(x, t)$ s'écrit alors (voir Sard [6] p. 25) :

$$K(x, t) = \frac{1}{(k-1)!} \left[(t - x_i) \delta_{t, x_i}(u - x)_+^{k-1} - \sum_{p=1}^{k-1} (t - x_i) \dots (t - x_{i+p-1}) \delta_{x_i, \dots, x_{i+p}}(u - x)_+^{k-1} \right]$$

Posons :

$$R_i(t) = \int_{x_1}^{x_n} K(x, t) s^{(k)}(x) dx$$

On a :

$$R_i(t) = \frac{1}{(k-1)!} \sum_{j=1}^{n-k} \lambda_j \int_{x_1}^{x_n} K(x, t) \delta_{x_i, \dots, x_{i+k}}(\nu - x)_+^{k-1} dx$$

On a :

$$\delta_{x_j, \dots, x_{j+k}}(\nu - x)_+^{k-1} = (-1)^k \delta_{x_j, \dots, x_{j+k}}(x - \nu)_+^{k-1}$$

d'où :

$$R_i(t) = \frac{(-1)^k}{((k-1)!)^2} \sum_{j=1}^{n-k} \lambda_j \left[(t-x_i) \delta_{i,x_i}^{(u)} \delta_{x_j, \dots, x_{j+k}}^{(v)} \int_{x_1}^{x_n} (x-\rho)_+^{k-1} (u-x)_+^{k-1} dx \right. \\ \left. - \sum_{p=1}^{k-1} (t-x_i) \dots (t-x_{i+p-1}) \delta_{x_i, \dots, x_{i+p}}^{(u)} \delta_{x_j, \dots, x_{j+k}}^{(v)} \int_{x_1}^{x_n} (x-\rho)_+^{k-1} (u-x)_+^{k-1} dx \right]$$

On a d'autre part (Carasso [3] p. 56) :

$$\int_{x_1}^{x_n} (x-\rho)_+^{k-1} (u-x)_+^{k-1} dx \\ = \frac{((k-1)!)^2}{(2k-1)!} (u-\rho)_+^{2k-1} \quad (\text{car } u \text{ et } \rho \in [x_1, x_n])$$

d'où :

$$R_i(t) = \frac{(-1)^k}{(2k-1)!} \sum_{j=1}^{n-k} \lambda_j \left[(t-x_i) \delta_{i,x_i}^{(u)} h_j(u) \right. \\ \left. - \sum_{p=1}^{k-1} (t-x_i) \dots (t-x_{i+p-1}) \delta_{x_i, \dots, x_{i+p}}^{(u)} h_j(u) \right] \\ = \frac{(-1)^k}{(2k-1)!} \sum_{j=1}^{n-k} \lambda_j [h_j(t) - Q_{k-1}^{(i,j)}(t)]$$

avec $Q_{k-1}^{(i,j)}(t)$ = valeur en t du polynôme d'interpolation de degré $k-1$ prenant aux points x_i, \dots, x_{i+k-1} les valeurs $h_j(x_i), \dots, h_j(x_{i+k-1})$.

Pour $u \geq x_{j+k}$, $h_j(u)$ est un polynôme de degré $k-1$ donc pour

$$j+k \leq i \quad Q_{k-1}^{(i,j)}(t) = h_j(t).$$

Pour $u \leq x_j$, $h_j(u) = 0$ donc pour $i+k-1 \leq j$ $Q_{k-1}^{(i,j)}(t) = 0$. On a donc finalement en remarquant que $t \in [x_i, x_{i+k-1}]$

$$(4-1) \quad R_i(t) = \sum_{j=\max(i-k+1, 1)}^{\min(i+k-2, n-k)} \lambda_j^* (h_j(t) - Q_{k-1}^{(i,j)}(t))$$

avec $\lambda_j^* = (-1)^k \frac{1}{(2k-1)!} \lambda_j$ solution du système

$$(4-2) \quad \sum_{j=1}^{n-k} \lambda_j^* \delta_{x_i, \dots, x_{i+k}} h_j(t) = \delta_{x_i, \dots, x_{i+k}} y$$

$$(4-3) \quad s(t) = P_{i, k-1}(t) + R_i(t) \quad i = 1, \dots, n-k.$$

5. FONCTION-SPLINE D'HERMITE

La fonction-spline d'Hermite est parmi toutes les fonctions f à dérivée troisième intégrable et prenant des valeurs y_i et des dérivées y'_i données en des points x_i donnés ($i = 1, \dots, n$), celle qui minimise $\int_{x_1}^{x_n} (f^{(3)}(t))^2 dt$.

On a dans ce cas :

$$X = H^3[a, b]; Y = H^0[a, b]; T = D^3;$$

$$a \leq x_1 < \dots < x_i < x_{i+1} < \dots < x_n \leq b;$$

$$Kf = (f(x_1), \dots, f(x_n), f'(x_1), \dots, f'(x_n)) \in \mathbf{R}^{2n}$$

$$A^\perp = K(\text{Ker}(T))^\perp = \left\{ (y, y') \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \mid \forall P_2 \text{ polynôme de degré } \leq 2 \right. \\ \left. \sum_{i=1}^n (y_i P_2(x_i) + y'_i P'_2(x_i)) = 0 \right\}$$

$A^\perp \subset \mathbf{R}^{2n}$ est de dimension $2n - 3$ et peut être engendré par les vecteurs :

$$b_i \text{ et } b'_j \in \mathbf{R}^{2n} (i = 1, \dots, n - 2; j = 1, \dots, n - 1)$$

tels que :

$$(b_i | Kf) = \delta_{x_i, x_{i+1}} f' \quad i = 1, \dots, n - 2.$$

$$(b'_i | Kf) = (f(x_i) - f(x_{i+1}))$$

$$+ \frac{1}{2} (x_{i+1} - x_i)(f'(x_i) + f'(x_{i+1})) \quad i = 1, \dots, n - 1.$$

On a alors :

$$\varphi_i = {}^t T^{-1} ({}^t K b_i) \quad \text{et} \quad \varphi'_i = {}^t T^{-1} ({}^t K b'_i)$$

qui s'écrivent :

$$\varphi_i(t) = \delta_{x_i, x_{i+1}, x_{i+2}}(x - t)_+ \quad i = 1, \dots, n - 2$$

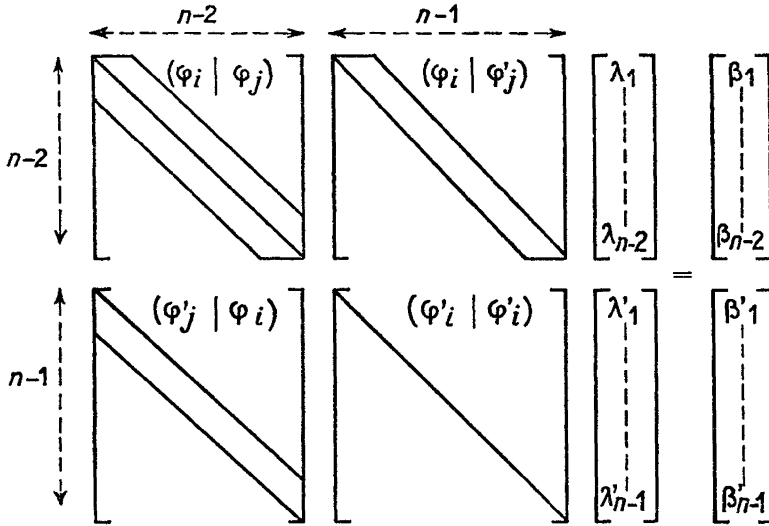
$$\varphi'_i(t) = \frac{1}{2} (x_{i+1} - t)_+ (t - x_i)_+ \quad i = 1, \dots, n - 1$$

On obtient ces expressions en écrivant le développement en série de Taylor autour du point x_i de f et f' ([3] p. 104).

On a alors, en désignant par h la fonction-spline d'Hermite :

$$(5-1) \quad h^{(3)} = \sum_{j=1}^{n-2} \lambda_j \varphi_j + \sum_{j=1}^{n-1} \lambda'_j \varphi'_j$$

Les λ_j et λ'_j étant solution du système linéaire suivant :



Si on pose $l_i = x_{i+1} - x_i$.

On obtient :

$$(\varphi_j | \varphi_i) = (\varphi_i | \varphi_j) = \begin{cases} \frac{1}{3(l_i + l_{i+1})} & \text{si } j = i \\ \frac{l_{i+1}}{6(l_i + l_{i+1})(l_{i+1} + l_{i+2})} & \text{si } j = i + 1 \\ 0 & \text{pour } j > i + 1 \end{cases}$$

$$(\varphi'_i | \varphi'_j) = \begin{cases} \frac{l_i^5}{120} & \text{si } j = i \\ 0 & \text{si } j \neq i \end{cases}$$

$$(\varphi'_j | \varphi_i) = (\varphi_i | \varphi'_j) = \begin{cases} \frac{l_i^3}{24(l_i + l_{i+1})} & \text{si } j = i \beta_i = \delta_{x_i, x_{i+1}, x_{i+2}} y' \\ \frac{l_{i+1}^3}{24(l_i + l_{i+1})} & \text{si } j = i + 1 \beta'_i = (y_i - y_{i+1}) \\ & + \frac{1}{2} (x_{i+1} - x_i)(y'_i + y'_{i+1}) \\ 0 & \text{si } j > i + 1 \end{cases}$$

Le système se résoud facilement par une méthode de partitionnement ([3] p. 102).

En intégrant 5-1 on obtient :

$$(5-2) \quad h(t) = P_2(t) + \sum_{i=1}^{n-2} \lambda_i R_i(t) + \sum_{i=1}^{n-1} \lambda'_i S_i(t)$$

avec $P_2(t)$ polynôme degré ≤ 2 et :

$$R_i(t) = \frac{1}{24} \delta_{x_i, x_{i+1}, x_{i+2}}(t - x)_+^4$$

$$S_i(t) = \begin{cases} \frac{1}{80}(t - x_i)_+^5 + \frac{1}{48}(x_{i+1} - t)_+(t - x_i)_+^4 & \text{si } t \leq x_{i+1} \\ (x_{i+1} - x_i)^3 \left[\frac{1}{24}(t - x_{i+1})^2 + \frac{1}{24}(x_{i+1} - x_i)(t - x_{i+1}) + \frac{1}{80}(x_{i+1} - x_i)^2 \right] & \text{si } t > x_{i+1} \end{cases}$$

Le polynôme $P_2(t) = at^2 + bt + c$ étant déterminé par trois conditions d'interpolation (dont une au moins utilisant une des conditions $s(x_i) = y_i$).

BIBLIOGRAPHIE

- [1] P. J. LAURENT and P. H. ANSELONE, *A general method for the construction of interpolating or smoothing spline-function* (à paraître).
- [2] J. KUNTZMANN, *Méthodes numériques, interpolation, dérivées*. Éditions Dunod (1959).
- [3] C. CARASSO, *Méthodes numériques pour l'obtention de fonctions spline*. Thèse Grenoble (1966).
- [4] M. ATTEIA, *Généralisation de la définition et des propriétés des fonctions spline*. C.R.A.S., p. 260 (1965), pp. 3550-3553.
- [5] M. ATTEIA, *Théorème et applications des fonctions-spline en analyse numérique*. Thèse, Grenoble (1966).
- [6] SARD, *Linear approximation*. American Mathematical Society (1963).
- [7] N. BOURBAKI, *Espaces vectoriels topologiques*, Chap. 1 et 2. Éditions Hermann (1966).
- [8] J. L. JOLY, *Théorèmes de convergence des fonctions spline générales d'interpolation et d'ajustement*. C.R.A.S., t. 264 (1967), pp. 126-128.
- [9] P. J. LAURENT, *Représentation de données expérimentales à l'aide de fonctions spline d'ajustement et évaluation optimale de fonctionnelles linéaires continues*. Présenté au Colloque : « Problèmes fondamentaux de Calcul numérique. » Prague 11-15 sept. 67, à paraître dans *Aplikace Matematiky* (1968).