Revue française d'informatique et de recherche opérationnelle

Ch. Castaing

Sur les multi-applications mesurables

Revue française d'informatique et de recherche opérationnelle, tome 1, nº 1 (1967), p. 91-126

<http://www.numdam.org/item?id=M2AN_1967__1_1_91_0>

R.I.R.O.
(1re année, N° 1, 1967, p. 91-126)

SUR LES MULTI-APPLICATIONS MESURABLES

par Ch. CASTAING (1)

L'objet de ce travail est l'étude des multi-applications (i. e. applications multivoques) mesurables. Après avoir montré quelques propriétés élémentaires des multi-applications mesurables, on donne de nombreux critères de mesurabilité généralisant les résultats connus pour les applications mesurables. Par ailleurs, on a utilisé les propriétés topologiques de la fonction d'appui d'un convexe compact d'un espace vectoriel topologique localement convexe séparé pour étendre la définition des applications scalairement mesurables aux multi-applications mesurables à valeurs convexes compactes. L'étude des sections mesurables d'une multi-application mesurable a également été abordée. Enfin on donne quelques applications illustrant cette étude.

INTRODUCTION

Le présent travail a pour but de généraliser certains résultats sur les applications mesurables au cas des multi-applications (i.e. applications multivoques) mesurables. La notion de mesurabilité des multi-applications joue un rôle important dans certaines branches de l'Analyse appliquée : Économie mathématique, modèles économiques à un continu de consommateurs [16], théorie des jeux etc. ; et notamment dans la théorie du contrôle optimum et des tests statistiques. La présente étude nous fournit des outils très maniables permettant de résoudre de nombreux problèmes relevant des théories précédemment citées.

Dans [7], G. Debreu, inspiré d'un travail de R. J. Aumann [1], a inauguré l'étude des multi-applications mesurables en se plaçant sur des espaces mesurables abstraits. Dans ce travail, nous nous plaçons sur des espaces localement compacts car il nous a semblé que la notion de mesurabilité des multi-applications est de nature plus topologique qu'ensembliste; et certains résultats figurant dans cet article semblent justifier ce point de vue.

Dans ce chapitre (I), nous présentons quelques propriétés simples des multi-applications mesurables.

---

(1) Laboratoire d'Automatique Théorique de la Faculté des Sciences de Caen.
Ce travail a été effectué dans le cadre de la convention n° 63-FR-199 entre la Délégation générale à la Recherche scientifique et technique et la Faculté des Sciences de Caen. Il est préparatoire à une thèse de doctorat d'État ès Sciences Mathématiques dont la soutenance est prévue en 1967 et enregistrée au Centre national de la Recherche Scientifique sous le n° 124 *(à paraître)*.

Le chapitre (II) est consacré à des généralités sur le graphe d'une multi-application et aux propriétés des multi-applications semi-continues inférieurement et supérieurement.

Le chapitre (III) est relatif aux critères de mesurabilité des multi-applications à valeurs dans l'ensemble des fermés non vides d'un espace localement compact polonais.

Au chapitre (IV), nous généralisons (Th. 4.2) le théorème de Lusin relatif à la mesurabilité des applications mesurables aux multi-applications mesurables à valeurs dans l'ensemble des compacts non vides d'un espace métrisable de type dénombrable. Ce résultat a été obtenu par A. Plis [15] sous des hypothèses plus restreintes.

Le chapitre (V) a trait à l'étude des sections mesurables d'une multi-application mesurable. Les théorèmes obtenus interviennent directement dans les problèmes d'optimisation et de statistique. Les corollaires 5.1 et 5.1′, généralisent les résultats de A. F. Filippov [8] et de Wazewski [18]. Les corollaires 5.2. et 5.2′ généralisent un résultat de L. M. Sonneborn et F. S. Van Vleck [17].

Dans le chapitre (VI), nous étudions les multi-applications mesurables à valeurs dans l'ensemble des convexes compacts non vides d'un espace vectoriel topologique localement convexe métrisable de type dénombrable. Au cours de cette étude, nous avons étendu aux espaces localement convexes métrisables de type dénombrable (Th. 6.1) un résultat très important dû à G. Debreu relatif aux espaces de Banach de type dénombrable. Nous avons également présenté dans ce chapitre deux critères de mesurabilité (Th. 6.3. et Th. 6.4.) des multi-applications à valeurs dans l'ensemble des convexes compacts non vides d'un espace de Banach de type dénombrable en utilisant les propriétés topologiques de la fonction d'appui d'un convexe fermé. Ainsi le théorème 6.3. généralise un résultat figurant dans N. Bourbaki ([4], Intégration, chap. 4, p. 181).

Le chapitre (VII) est consacré à des applications. Le théorème 7.1. est une extension du théorème de Ljapunov ; enfin le théorème 7.2. est une extension du théorème de Lebesgue pour les multi-applications mesurables. Signalons enfin que la théorie des multi-applications mesurables nous a permis d'étudier les équations différentielles multivoques [6] en vue de l'optimisation.

Nous tenons à exprimer toute notre reconnaissance à M. R. Pallu de la Barrière. Son soutien constant nous a aidé considérablement dans l'élaboration de ce travail.

Soient T et E deux ensembles. Nous appellerons *multi-application* de T dans E toute application de T dans l'ensemble $\mathcal{P}(E)$ des parties de E. Une telle application est appelée par de nombreux auteurs application multivoque de T dans E.

Soit A une partie de E, on pose :

$$\Gamma^- A = \{ t \in T \mid \Gamma(t) \cap A \neq \emptyset \}$$

$$\Gamma^+ A = \{ t \in T \mid \Gamma(t) \subset A \}$$

Définition 1. — Soient T un espace localement compact, μ une mesure de Radon sur T. Une multi-application Γ de T dans un espace topologique E sera dite μ-mesurable si l'ensemble $\Gamma^{-}A$ est μ-mesurable pour tout fermé A dans E.

Exemple. — Toute multi-application semi-continue supérieurement de T dans E est mesurable.

Pour toute partie $M \subset T$ et toute multi-application Γ de T dans E, $\Gamma_{|M}$ désigne la *restriction* de Γ à M.

Si f est une application μ-mesurable de T dans un espace métrisable de type dénombrable E, la multi-application $t \to \{f(t)\}$ est μ-mesurable et réciproquement.

1. — PROPRIETES ELEMENTAIRES DES MULTI-APPLICATIONS MESURABLES

Lemme 1.1. — *Soient T un espace localement compact, μ une mesure sur T, (Γ_n) une suite de multi-applications μ-mesurables de T dans un espace topologique E.*

Alors la multi-application Γ de T dans E définie par

$$\Gamma(t) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Gamma_n(t), \qquad \forall\, t \in T,$$

est μ-mesurable.

Démonstration. — Soit A un ensemble fermé dans E. On a

$$\Gamma^{-}A = \left\{ t \in T \mid \bigcup_{n=1}^{\infty} \Gamma_n(t) \cap A \neq \emptyset \right\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Gamma_n^{-} A$$

Puisque chacun des ensembles $\Gamma_n^{-}A$ est μ-mesurable, il en est de même de $\Gamma^{-}A = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Gamma_n^{-} A$.

Lemme 1.2. — *Soient T un espace localement compact, μ une mesure sur T et Γ une multi-application μ-mesurable de T dans un espace topologique E. Soit Φ une multi-application semi-continue supérieurement de E dans un espace topologique F. Alors la multi-application $\Sigma = \Phi \circ \Gamma$ de T dans F définie par*

$$\Sigma(t) = (\Phi \circ \Gamma)(t) = \cup \{ \Phi(u) \mid u \in \Gamma(t) \}, \qquad \forall\, t \in T,$$

est μ-mesurable.

Démonstration. — Soit A un ensemble fermé dans F. Alors on a :

$$\begin{aligned} \Sigma^{-}A &= \{ t \in T \mid (\Phi \circ \Gamma)(t) \cap A \neq \emptyset \} \\ &= \{ t \in T \mid \Gamma(t) \cap \Phi^{-}A \neq \emptyset \} = \Gamma^{-}(\Phi^{-}A). \end{aligned}$$

Puisque Γ est μ-mesurable et $\Phi^{-}A$ fermé dans E, $\Sigma^{-}A$ est μ-mesurable.

Lemme 1.3. — *Soient T un espace localement compact, μ une mesure sur T, et Γ une multi-application μ-mesurable de T dans un espace métrisable E. Alors l'ensemble $\Gamma^-\Omega = \{ t \in T \mid \Gamma(t) \cap \Omega \neq \emptyset \}$ est μ-mesurable pour tout ouvert Ω dans E.*

Démonstration. — En effet, Ω est réunion dénombrable de fermés $(A_i\,;\, i \in I)$ et $\Gamma(t) \cap \Omega \neq \emptyset \Leftrightarrow \exists\, i \in I$ tel que $\Gamma(t) \cap A_i \neq \emptyset$.

Corollaire. — *Soient T un espace localement compact, μ une mesure sur T et Γ une multi-application μ-mesurable de T dans un espace métrisable E. Alors l'ensemble $\Gamma^+ A$ est μ-mesurable pour tout fermé A dans E.*

Démonstration. — Soit Ω un ouvert dans E. L'ensemble $A = E - \Omega$ est fermé et l'on a :

$$\begin{aligned} \Gamma^-\Omega &= \{ t \in T \mid \Gamma(t) \cap \Omega \neq \emptyset \} \\ &= T - \{ t \in T \mid \Gamma(t) \subset A \} = T - \Gamma^+ A. \end{aligned}$$

Puisque $\Gamma^-\Omega$ est μ-mesurable, $\Gamma^+ A$ l'est aussi.

Théorème 1.1. — *Soient T un espace localement compact, μ une mesure sur T et Γ une multi-application de T à valeurs dans l'ensemble des compacts non vides d'un espace métrisable. Pour que Γ soit μ-mesurable, il faut et il suffit que l'ensemble $\Gamma^-\Omega = \{ t \in T \mid \Gamma(t) \cap \Omega \neq \emptyset \}$ soit μ-mesurable pour tout ouvert Ω dans E.*

Démonstration. — La condition est nécessaire en vertu du lemme 3.1. Montrons qu'elle est suffisante. Soient A un fermé dans E et $d(u, A)$ la distance d'un point u de E à A.

Pour chaque entier $n > 0$, posons :

$$\Omega_n = \left\{ u \in E \mid d(u, A) < \frac{1}{n} \right\}.$$

Alors, chacun des ensembles $\Gamma^-\Omega_n = \{t \in T \mid \Gamma(t) \cap \Omega_n \neq \emptyset\}$ est μ-mesurable. On va prouver que

$$\Gamma^- A = \bigcap_{n=1}^{\infty} \Gamma^- \Omega_n,$$

ce qui entraînera la mesurabilité de Γ. Soient $t \in \Gamma^- A$ et $u \in \Gamma(t) \cap A$. Alors $u \in \Gamma(t) \cap \Omega_n$, $\forall\, n \in N$. D'où $t \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \Gamma^- \Omega_n$.

Inversement, soient $t \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \Gamma^- \Omega_n$ et $u_n \in \Gamma(t) \cap \Omega_n$. On a

$$d(u_n, A) < \frac{1}{n}, \ \forall\, n \in N.$$

Puisque $\Gamma(t)$ est compact, on peut extraire de la suite (u_n) une suite partielle (u_{n_k}) convergeant vers $u \in \Gamma(t)$; et l'on a :

$$\lim_{k\to\infty} d(u_{n_k}, A) = d(u, A) = 0.$$

D'où $u \in \Gamma(t) \cap A$, c'est-à-dire $t \in \Gamma^{-} A$, ce qui termine la démonstration.

2. — GRAPHE D'UNE MULTI-APPLICATION

Définition. — Étant donnée une multi-application Γ d'un espace topologique T dans un espace topologique E, on définit le *graphe* $G(\Gamma)$ de Γ par

$$G(\Gamma) = \{ (t, u) \in T \times E \mid u \in \Gamma(t) \}.$$

Lemme 2.1. — *Soient T et E deux espaces topologiques et soit $(\Gamma_i, i \in I)$ une famille de multi-applications de graphe ouvert (resp. graphe borélien) (resp. graphe fermé) de T dans E. Alors la multi-application*

$$\Gamma : t \to \bigcap_{i\in I} \Gamma_i(t)$$

de T dans E est de graphe ouvert (resp. borélien) (resp. fermé) si I est fini (resp. dénombrable) (resp. quelconque).

Démonstration. — Soient $G(\Gamma_i)$ le graphe de Γ_i, $i \in I$ et $G(\Gamma)$ le graphe de Γ. On a :

$$G(\Gamma) = \left\{ (t, u) \in T \times E \mid u \in \bigcap_{i\in I} \Gamma_i(t) \right\} = \bigcap_{i\in I} G(\Gamma_i).$$

Si les ensembles $G(\Gamma_i)$ sont ouverts (resp. boréliens) (resp. fermés), il en est de même de l'intersection finie (resp. dénombrable) (resp. quelconque) des $G(\Gamma_i)$.

Lemme 2.2. — *Soient T et E deux espaces topologiques et $(\Gamma_i, i \in I)$ une famille de multi-applications de graphe fermé (resp. borélien) (resp. ouvert) de T dans E. Alors la multi-application $\Gamma : t \to \bigcup_{i\in I} \Gamma_i(t)$ de T dans E est de graphe fermé (resp. borélien) (resp. ouvert) si I est fini (resp. dénombrable) (resp. quelconque).*

Démonstration. — Soient $G(\Gamma_i)$ le graphe de Γ_i, $i \in I$ et $G(\Gamma)$ le graphe de Γ. On a :

$$G(\Gamma) = \left\{ (t, u) \in T \times E \mid u \in \bigcup_{i\in I} \Gamma_i(t) \right\} = \bigcup_{i\in I} G(\Gamma_i).$$

Si les ensembles $G(\Gamma_i)$ sont fermés (resp. boréliens) (resp. ouverts), il en est de même de la réunion finie (resp. dénombrable) (resp. quelconque) des $G(\Gamma_i)$.

Lemme 2.3. — *Soient T et E deux espaces métrisables et $(\Gamma_n,\ n \in N)$ une suite de multi-applications de graphe souslinien de T dans E. Alors les multi-applications $t \to \bigcup_{n=1}^{\infty} \Gamma_n(t)$; $t \to \bigcap_{n=1}^{\infty} \Gamma_n(t)$ sont de graphe souslinien.*

Démonstration. — Ceci découle immédiatement du fait que dans un espace métrisable G, la réunion dénombrable et l'intersection dénombrable des sous-espaces sousliniens de G sont des sous-espaces sousliniens ([3], page 125).

Lemme 2.4. — *Soient T un espace métrisable et $(E_n,\ n \in N)$ une suite d'espaces métrisables et pour chaque n, soit Γ_n une multi-application de graphe souslinien de T dans E_n. Alors la multi-application Γ de T dans $E = \prod_{n=1}^{\infty} E_n$ définie par $\Gamma(t) = \prod_{n=1}^{\infty} \Gamma_n(t)$ est de graphe souslinien.*

Démonstration. — Soit Δ le sous-ensemble de T^N formé de suites constantes. Soit φ l'homéomorphisme de $\Delta \times \prod_{n=1}^{\infty} E_n$ sur $T \times \prod_{n=1}^{\infty} E_n$ déduit de l'homéomorphisme canonique de Δ sur T. Soit $G(\Gamma_n)$ le graphe de Γ_n et soit $G(\Gamma)$ le graphe de Γ. On a :

$$G(\Gamma) = \varphi\left[\left(\Delta \times \prod_{n=1}^{\infty} E_n\right) \cap \prod_{n=1}^{\infty} G(\Gamma_n)\right].$$

Comme Δ est fermé dans T^N l'ensemble $\Delta \times \prod_{n=1}^{\infty} E_n$ est fermé dans $T^N \times \prod_{n=1}^{\infty} E_n$. Par suite l'ensemble $\left(\Delta \times \prod_{n=1}^{\infty} E_n\right) \cap \prod_{n=1}^{\infty} G(\Gamma_n)$ est souslinien ([3], page 127). D'où le lemme.

Rappelons les théorèmes suivants [2].

Théorème 2.5. — *Soit Γ une multi-application semi-continue supérieurement d'un espace topologique X dans un espace topologique séparé Y. Alors Γ est de graphe fermé.*

Théorème 2.6. — *Soient X un espace topologique, Y un espace topologique séparé, Γ_1 une multi-application de graphe fermé de X dans Y et Γ_2 une multi-application semi-continue supérieurement de X dans Y. Alors la multi-application $\Gamma : x \to \Gamma_1(x) \cap \Gamma_2(x)$ est semi-continue supérieurement.*

Corollaire. — *Si Y est un espace compact, une multi-application de X dans Y est de graphe fermé si et seulement si elle est semi-continue supérieurement.*

Théorème 2.7. — *Soient X un espace topologique, Y un espace topologique, $\varphi(x, y)$ une fonction semi-continue inférieurement dans $X \times Y$ et Γ une multi-application semi-continue inférieurement de X dans Y telle que $\Gamma x \neq \emptyset$ pour tout $x \in X$. Alors la fonction $M(x) = \sup\{\varphi(x, y) | y \in \Gamma(x)\}$ est semi-continue inférieurement.*

Théorème 2.8. — *Soient X un espace topologique, Y un espace topologique séparé, $\varphi(x, y)$ une fonction semi-continue supérieurement dans $X \times Y$* et *Γ une multi-application semi-continue supérieurement de X dans Y telle que $\Gamma(x) \neq \emptyset$ pour tout $x \in X$. Alors la fonction*

$$M(x) = \max\{\varphi(x, y) | y \in \Gamma(x)\}$$

est semi-continue supérieurement.

Corollaire. — *Soit $\varphi(y)$ une fonction continue dans Y et soit Γ une multi-application continue* (1) *de X dans Y telle que $\Gamma(x) \neq \emptyset$ pour tout $x \in X$. Alors la fonction $M(x) = \max\{\varphi(y) | y \in \Gamma(x)\}$ est continue dans X.*

3. — QUELQUES CRITERES DE MESURABILITE

Lemme 3.1. — *Soient X un espace localement compact, μ une mesure sur X et T un espace localement compact polonais, μ' une mesure sur T. Soient $(x, t) \to f(x, t)$ une application de $X \times T$ dans un espace métrisable E de type dénombrable telle que : 1° pour tout $x \in X$, $t \to f(x, t)$ soit continue, 2° pour tout $t \in T$, $x \to f(x, t)$ soit μ-mesurable. Si ν est une application μ'-mesurable de T dans T, alors l'application $(x, t) \to f(x, \nu(t))$ est $\mu \otimes \mu'$-mesurable.*

Démonstration. — Soit d une distance sur T compatible avec la topologie et pour laquelle T soit complet. Soit (C_n, p_n, φ_n) un criblage de T ([3], chap. 9, page 130). On munit chacun des ensembles C_0 et $(p_n^{-1}(c) \,;\, c \in C_n)$ d'une relation d'ordre total telle que l'ensemble des éléments inférieurs à un élément donné soit fini (2). Soit $c \in C_0$ et soit T_c l'ensemble ainsi défini :

$$t \in T_c \Leftrightarrow \begin{cases} c \text{ est le premier élément de } C_0 \text{ tel que} \\ \nu(t) \in \varphi_0(c). \end{cases}$$

Les ensembles T_c sont μ'-mesurables et ceux qui ne sont pas vides forment une partition dénombrable de T. Supposons déjà défini T_c pour $c \in C_n$. Soit $c' \in p_n^{-1}(c)$ et $T_{c'}$ l'ensemble ainsi défini :

$$t \in T_{c'} \Leftrightarrow \begin{cases} t \in T_c \quad , \\ c' \text{ est le premier élément de } p_n^{-1}(c) \\ \text{tel que } \nu(t) \in \varphi_{n+1}(c'). \end{cases}$$

(1) (Cf. [2], p. 115).

(2) Une telle relation d'ordre est obtenue en indexant ces ensembles sur une partie N.

Les ensembles $T_{c'}$ sont μ'-mesurables et $T_c = \bigcup_{c' \in \overset{-1}{p_n}(c)} T_{c'}$. Pour chaque n, on pose $\varphi_n(t) = u_c \in \varphi_n(c)$ si $t \in T_c$. Alors chacune des applications φ_n est μ'-mesurable. On a $d(\varphi_n(t), \varphi_{n+1}(t)) \leqslant 2^{-n}$ et $d(\varphi_n(t), \varphi(t) \leqslant 2^{-n}$ pour tout $t \in T$ et tout n. Donc $\lim_{n \to \infty} \varphi_n(t) = \varphi(t)$ pour tout $t \in T$. Ceci étant, chacune des applications $(x,t) \to f(x, \varphi_n(t))$ est $\mu \otimes \mu'$-mesurable. En effet, soit A un ensemble fermé dans E. Alors l'ensemble

$$\{ (x, t) \in X \times T \mid f(x, \varphi_n(t)) \in A \}$$

est réunion dénombrable des ensembles $\mu \otimes \mu'$ mesurables de la forme

$$\{ x \in X \mid f(x, u_c) \in A \} \times T_c.$$

Comme $t \to f(x, t)$ est continue pour tout $x \in X$ et $\lim_{n \to \infty} \varphi_n(t) = \varphi(t)$, $\forall\, t \in T$, on a :

$$\lim_{n \to \infty} f(x, \varphi_n(t)) = f(x, \varphi(t)), \qquad \forall\, x \in X, \qquad \forall\, t \in T,$$

ce qui achève la démonstration.

Corollaire. — *Sous les hypothèses du théorème précédent, l'application* $(x, t) \to f(x, t)$ est $\mu \otimes \mu'$ *mesurable.*

Démonstration. — En effet, l'application identique $i : T \to T$ est μ'-mesurable.

Remarque. — Dans le cas des espaces mesurables on a le résultat analogue suivant :

Soient $(X, \mathfrak{X})$ et $(T, \mathfrak{T})$ deux espaces mesurables. On suppose que T soit métrisable de type dénombrable. Soit $(x, t) \to f(x, t)$ une application de $X \times T$ dans un espace métrisable de type dénombrable E telle que : 1° pour tout $x \in X$, $t \to f(x, t)$ soit continue, 2° pour tout $t \in T$, $x \to f(x, t)$ soit mesurable.

Si φ est une application mesurable de T dans T, alors l'application $(x, t) \to f(x, \varphi(t))$ de $X \times T$ dans E est mesurable.

En particulier, l'application $(x, t) \to f(x, t)$ de $X \times T$ dans E est mesurable.

Lemme 3.2. — Soient T *un espace localement compact polonais,* μ *une mesure sur* T, E *un espace souslinien et* Γ *une multi-application de graphe souslinien de* T *dans* E. *Alors* Γ *est* μ*-mesurable.*

Démonstration. — Soient pr_1 la projection de $T \times E$ sur T, $G(\Gamma)$ le graphe de Γ. Si A est un ensemble souslinien (ou fermé en particulier) dans E, l'ensemble $\Gamma^{-}A$ est l'image du sous-espace souslinien $G(\Gamma) \cap T \times A$ de $T \times E$ par pr_1, donc $\Gamma^{-}A$ est souslinien dans T, donc μ-mesurable.

Lemme 3.3. — *Soient T un espace localement compact polonais, μ une mesure sur T, E un espace souslinien et $(\Gamma_n,\ n \in N)$ une suite de multi-applications de graphe souslinien de T dans E.*

Alors les multi-applications $t \to \bigcup_{n=1}^{\infty} \Gamma_n(t)$ et $t \to \bigcap_{n=1}^{\infty} \Gamma_n(t)$ *sont μ-mesurables.*

Démonstration. — En effet, ces multi-applications sont de graphe souslinien (lemme 2.3), donc μ-mesurables (lemme 3.2.).

Lemme 3.4. — *Soient T un espace localement compact polonais, μ une mesure sur T, $(E_n,\ n \in N)$ une suite d'espaces sousliniens, et pour chaque n, soit Γ_n une multi-application de graphe souslinien de T dans E_n. Alors la multi-application Γ de T dans $E = \prod_{n=1}^{\infty} E_n$ définie par $\Gamma(t) = \prod_{n=1}^{\infty} \Gamma_n(t)$ est μ-mesurable.*

Démonstration. — Γ est de graphe souslinien (lemme 2.4), donc μ-mesurable (lemme 3.2.).

Théorème 3.1. — *Soient T un espace localement compact, μ une mesure sur T, E un espace localement compact polonais et $(t, u) \to f(t, u)$ une application de $T \times E$ dans un espace métrisable de type dénombrable F telle que*

1° *Pour tout $t \in T$, $u \to f(t, u)$ soit continue.*

2° *Pour tout $u \in E$, $t \to f(t, u)$ soit μ-mesurable.*

Alors pour toute partie compacte $X \subset T$ et tout $\varepsilon > 0$ il existe une partie compacte $K \subset X$ telle que $|\mu|(X - K) \leqslant \varepsilon$ et que la restriction de f à $K \times E$ soit continue.

Démonstration. — Commençons par simplifier et reformuler cet énoncé. On peut supposer d'abord que f prenne ses valeurs dans $[0, 1]$. En effet, F est métrisable et de type dénombrable, donc homéomorphe à un sous-espace de $[0, 1]^N$. Soit $y \to (h_n(y))_{n \in N}$ un homéomorphisme de F dans $[0, 1]^N$. Alors une application f de T dans F est μ-mesurable si et seulement si chacune des applications $h_n \circ f$ est μ-mesurable ; et l'on est ainsi ramené au cas où f prenne ses valeurs dans $[0, 1]$. Puisque E est réunion dénombrable de compacts métrisables, on peut supposer dans la démonstration que E soit compact métrisable. Enfin on se ramène au cas où l'espace T est compact en remplaçant T par le compact X donné et la fonction f définie sur $T \times E$ par sa restriction à $X \times E$. Nous avons donc un espace compact T muni d'une mesure μ, un espace *compact métrisable* E et une fonction f définie sur $T \times E$ à valeurs dans $[0, 1]$, μ-mesurable sur T et continue sur E. Il s'agit de prouver que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une partie compacte $K \subset T$ telle que $|\mu|(T - K) \leqslant \varepsilon$ et que la restriction de f à $K \times E$ soit continue.

En vertu du lemme 3.1., f est $\mu \otimes \mu'$-mesurable pour toute mesure μ' sur E, donc $\mu \otimes \mu'$ intégrable. Il résulte du théorème de Fubini que la fonction $t \to \int f(t, u)\, d\mu'(u)$ est μ-mesurable sur T.

Soit $\mathcal{C}(E)$ l'espace de Banach des fonctions continues sur E. Soit φ l'application de T dans $\mathcal{C}(E)$ telle que $\varphi(t)$ soit l'application partielle $u \to f(t, u)$. Alors l'application φ est scalairement μ-mesurable d'après ce qui précède. Or $\mathcal{C}(E)$ est de type dénombrable car E est compact métrisable, par suite φ est μ-mesurable pour la topologie initiale de $\mathcal{C}(E)$ ([4], Intégration, chap. 4, page 182).

En vertu du théorème de Lusin, il existe une partie compacte $K \subset T$ telle que $|\mu|(T - K) \leqslant \varepsilon$ et que la restriction de φ à K soit continue. Ceci entraîne que f est continue sur $K \times E$ et achève la démonstration.

Théorème 3.2. — *Soit T un espace localement compact tel que toute partie compacte de T soit métrisable, μ une mesure sur T. Soient E un espace localement compact polonais et d'une distance sur E compatible avec la topologie et pour laquelle E soit complet. Soit Γ une multi-application de T à valeurs dans l'ensemble des fermés non vides de E.*

On a l'équivalence des conditions suivantes :

a) *L'ensemble $\Gamma^{-}\Omega = \{ t \in T \mid \Gamma(t) \cap \Omega \neq \emptyset \}$ est μ-mesurable pour tout ouvert Ω dans E.*

b) *Pour tout $u \in E$, la fonction scalaire $t \to d(u, \Gamma(t))$ est μ-mesurable.*

c) *L'ensemble $\Gamma^{-}A = \{ t \in T \mid \Gamma(t) \cap A \neq \emptyset \}$ est μ-mesurable pour tout fermé A dans E, c'est-à-dire Γ est μ-mesurable.*

Démonstration. — On démontre le théorème suivant le schéma

$$a \Leftrightarrow b \Rightarrow c \Rightarrow a.$$

En premier lieu $c) \Rightarrow a)$ d'après le lemme 1.3. Montrons que $a) \Rightarrow b)$. Soit en effet $B(u, r)$ une boule ouverte de centre u de rayon r. Alors l'ensemble des $t \in T$ tels que $d(u, \Gamma(t)) < r$ est μ mesurable car identique à l'ensemble μ-mesurable des $t \in T$ tels que $\Gamma(t) \cap B(u, r) \neq \emptyset$. Reste à montrer que $b)$ entraîne $a)$ et $c)$.

Remarquons d'abord que la fonction $(t, u) \to d(u, \Gamma(t))$ est telle que 1° pour tout $t \in T$, $u \to d(u, \Gamma(t))$ soit continue ; 2° pour tout $u \in E$, $t \to d(u, \Gamma(t))$ soit μ-mesurable. Donc $(t, u) \to d(u, \Gamma(t))$ satisfait aux conditions d'applications du théorème 3.1. Pour toute partie compacte $X \subset T$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe une partie compacte $K \subset X$ telle que $|\mu|(X - K) \leqslant \varepsilon$ et que la restriction de $(t, u) \to d(u, \Gamma(t))$ à $K \times E$ soit continue. Ceci étant, pour tout entier $n > 0$ et tout $t \in T$, posons :

$$\Gamma_n(t) = \left\{ u \in E \mid d(u, \Gamma(t)) < \frac{1}{n} \right\}.$$

On a $\Gamma(t) = \bigcap_{n=1}^{\infty} \Gamma_n(t)$, $\forall\, t \in T$.

D'après ce qui précède, la restriction de chacune des multi-applications Γ_n à K est de graphe ouvert. Donc le graphe de $\Gamma_{|K}$ est un G_δ (i. e. intersection dénombrable d'ensembles ouverts). Alors pour tout ensemble souslinien S dans E, l'ensemble

$$\Gamma^{-} S \cap K = \{ t \in K \mid \Gamma(t) \cap S \neq \varnothing \}$$

est μ-mesurable (lemme 3.2.). Mais comme $|\mu|\ (X - K) \leqslant \varepsilon$, $\Gamma^{-}S$ est μ-mesurable sur T. Maintenant il est évident que *a*) et *c*) s'obtiennent en particularisant S.

Au cours de la démonstration du théorème précédent, on a aussi prouvé le théorème suivant :

Théorème 3.3. — *Soient T un espace localement compact tel que toute partie compacte de T soit métrisable, μ une mesure sur T, et Γ une multi-application μ-mesurable de T à valeurs dans l'ensemble des fermés non vides d'un espace localement compact polonais E.*

Alors pour toute partie compacte $X \subset T$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe une partie compacte $K \subset X$ telle que $|\mu|\ (X - K) \leqslant \varepsilon$ et que la restriction de Γ à K soit de graphe G_δ.

Corollaire. — *Sous les hypothèses du théorème précédent, soit (Γ_n) une suite de multi-applications μ-mesurables de T à valeurs dans l'ensemble des fermés non vides de E.*

Alors la multi-application $\Gamma : t \rightarrow \bigcap_{n=1}^{\infty} \Gamma_n(t)$ *est aussi μ-mesurable.*

Démonstration. — Pour toute partie compacte $X \subset T$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe une partie compacte $K \subset X$ telle que $|\mu|\ (X - K) \leqslant \varepsilon$ et que la restriction de chacune des Γ_n à K soit de graphe G_δ (théorème 3.3) $\Gamma_{|K}$ est par suite μ-mesurable (lemme 2.3 et lemme 3.2.). Comme $|\mu|\ (X - K) \leqslant \varepsilon$, le théorème est démontré.

Théorème 3.4. — *Soient T un espace localement compact tel que toute partie compacte de T soit métrisable, μ une mesure sur T, et Γ une multi-application de T à valeurs dans l'ensemble des convexes fermés non vides de R^n muni de sa norme euclidienne. Désignons par $P(t)u$ la projection d'un point u de R^n sur $\Gamma(t)$.*

Pour que Γ soit μ-mesurable, il faut et il suffit que pour tout $u \in R^n$, l'application $t \rightarrow P(t)u$ soit μ-mesurable sur T.

Démonstration. — *a*) La condition est nécessaire.

En effet, soit Σ_u la multi-application définie par :

$$\Sigma_u(t) = \{ y \in R^n \mid \|y - u\| = \mathrm{d}(u, \Gamma(t)) \},$$

où u est un élément fixé de R^n. Pour toute partie compacte $X \subset T$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe une partie compacte $K \subset X$ telle que $|\mu|\ (X - K) \leqslant \varepsilon$ et que la restriction de $t \rightarrow \mathrm{d}(u, \Gamma(t))$ à K soit continue. Il s'ensuit que la restriction de Σ_u à K est de graphe fermé, donc μ mesurable sur K, (lemme 3.2). Mais $|\mu|\ (X - K) \leqslant \varepsilon$, Σ_u est μ-mesurable sur T. En vertu du corollaire du théorème 3.3., l'application

$$t \to P(t)u = \Sigma_u(t) \cap \Gamma(t)$$

est alors μ-mesurable sur T.

b) La condition est suffisante.

En effet, la fonction $t \to \mathrm{d}(u, \Gamma(t)) = \|u - P(t)u\|$ est μ-mesurable.

Théorème 3.5. — *Soient T un espace localement compact tel que toute partie compacte de T soit métrisable, μ une mesure sur T, et Γ une multi-application μ-mesurable de T à valeurs dans l'ensemble des fermés non vides d'un espace localement compact polonais E. Soit $\varphi : (t, u) \to \varphi(t, u)$ une fonction définie sur $T \times E$ telle que : 1° pour tout $t \in T$, $u \to \varphi(t, u)$ soit continue sur E ; 2° pour tout $u \in E$, $t \to \varphi(t, u)$ soit μ-mesurable sur T. Soit m une fonction μ-mesurable sur T. Alors la multi-application*

$$t \to \{\, u \in \Gamma(t) \,|\, \varphi(t, u) \leqslant m(t) \,\}$$

est μ-mesurable sur T.

Démonstration. — Pour toute partie compacte $X \subset T$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe une partie compacte $K \subset X$ jouissant des propriétés suivantes :

(*i*) $|\mu|\ (X - K) \leqslant \varepsilon$,

(*ii*) les fonctions $m_{|K}$ et $\varphi_{|K \times E}$ sont continues (th. 3.1.)

(*iii*) $\Gamma_{|K}$ est de graphe G_δ (th. 3.3.)

Soit Σ la multi-application de T dans E définie par :

$$\Sigma(t) = \{\, u \in E \mid \varphi(t, u) \leqslant m(t) \,\}.$$

Alors $\Sigma_{|K}$ est de graphe fermé car $\varphi_{|E \times K}$ et $m_{|K}$ sont continues. Donc la restriction à K de la multi-application

$$t \to \{\, u \in \Gamma(t) \mid \varphi(t, u) \leqslant m(t) \,\}$$

est de graphe borélien (intersection d'un fermé et d'un G_δ), donc cette multi-application est μ-mesurable sur K (lemme 3.2), et l'on a

$$|\mu|\ (X - K) \leqslant \varepsilon.$$

Ceci achève la démonstration.

Théorème 3.5'. — *Soient T un espace localement compact tel que toute partie compacte de T soit métrisable, μ une mesure sur T, et Γ une multi-application μ-mesurable de T à valeurs dans l'ensemble des fermés non vides d'un espace localement compact polonais E. Soit $h : (t, u) \to h(t, u)$ une* *application de $T \times E$ dans un espace métrisable de type dénombrable F telle que : 1° pour tout $t \in T$, $u \to h(t, u)$ soit continue sur E ; 2° pour tout $u \in E$, $t \to h(t, u)$ soit μ-mesurable sur T. Soit g une application μ-mesurable de T dans F. Alors la multi-application $t \to \{ u \in \Gamma(t) | h(t, u) = g(t) \}$ est μ-mesurable sur T.*

Démonstration. — Pour toute partie compacte $X \subset T$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe une partie compacte $K \subset X$ jouissant des propriétés suivantes :

(*i*) $|\mu| \, (X - K) \leqslant \varepsilon$,

(*ii*) Les applications $g_{|K}$ et $h_{|K \times E}$ sont continues (th. 3.1),

(*iii*) $\Gamma_{|K}$ est de graphe G_δ (th. 3.3).

Soit Σ la multi-application de T dans E définie par

$$\Sigma(t) = \{ u \in E \mid h(t, u) = g(t) \}$$

$\Sigma_{|K}$ est de graphe fermé car $h_{|K \times E}$ et $g_{|K}$ sont continues. Alors la démonstration se termine comme dans le théorème 3.5.

4. — MULTI-APPLICATIONS MESURABLES A VALEURS COMPACTES DANS UN ESPACE METRISABLE DE TYPE DENOMBRABLE

Soit $\mathcal{K}$ l'ensemble des compacts non vides d'un espace métrisable E, d une distance sur E compatible avec la topologie. $\mathcal{K}$ sera muni de la distance de Hausdorff définie par :

$$\delta(A, B) = \sup \left[\sup_{x \in A} d(x, B) \; ; \; \sup_{y \in B} d(y, A) \right] ; \qquad A, B \in \mathcal{K}$$

Théorème 4.1. — *Soient T un espace topologique, $\mathcal{K}$ l'ensemble des compacts non vides d'un espace métrisable E. On a l'équivalence des conditions suivantes :*

a) Γ *est une multi-application continue de T dans E.*

b) Γ *est une application continue de T dans $\mathcal{K}$.*

Démonstration. — *a*) $\Rightarrow$ *b*). Soient $t_0 \in T$ et $\varepsilon > 0$. Puisque $\Gamma(t_0)$ est compact, il existe un nombre fini de boules $B(y_i, \varepsilon)$ de centre y_i, $1 \leqslant i \leqslant m$, de rayon ε telles que :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \Gamma(t_0) \cap B(y_i, \varepsilon) \neq \varnothing ; & 1 \leqslant i \leqslant m, \\ \Gamma(t_0) \subset \bigcup_{i=1}^{m} B(y_i, \varepsilon). & \end{array} \right.$$

Comme Γ est une multi-application continue de T dans E, il existe un voisinage de $M(t_0)$ de t_0 tel que :

$$t \in M(t_0) \Rightarrow \begin{cases} \Gamma(t) \cap B(y_i, \varepsilon) \neq \varnothing\,; & 1 \leqslant i \leqslant m, \\ \Gamma(t) \subset \bigcup_{i=1}^{m} B(y_i, \varepsilon). & \end{cases}$$

d'où $t \in M(t_0) \Rightarrow \delta(\Gamma(t), \Gamma(t_0)) \leqslant \varepsilon$.

$b) \Rightarrow a)$. Pour tout $\varepsilon > 0$ et toute partie A dans E, posons

$$V(A, \varepsilon) = \{ u \in E \mid d(u, A) \leqslant \varepsilon \}.$$

Soient $t_0 \in T$ et Ω un ouvert dans E contenant $\Gamma(t_0)$. Il existe un nombre $\varepsilon > 0$ tel que $V(\Gamma(t_0), \varepsilon) \subset \Omega$. Mais Γ est une application continue de T dans $\mathcal{K}$, il existe un voisinage $N(t_0)$ de t_0 tel que

$$t \in N(t_0) \Rightarrow \delta(\Gamma(t), \Gamma(t_0)) \leqslant \varepsilon \Rightarrow \Gamma(t) \subset V(\Gamma(t_0), \varepsilon) \subset \Omega\,;$$

et ceci prouve la semi-continuité supérieure de Γ. Prouvons que Γ est semi-continue inférieurement. Soit Ω un ouvert rencontrant $\Gamma(t_0)$ et soit $y_0 \in \Gamma(t_0) \cap \Omega$. Il existe une boule $B(y_0, \varepsilon)$ de centre y_0 de rayon ε contenue dans Ω. Comme Γ est une application continue de T dans $\mathcal{K}$, il existe un voisinage $W(t_0)$ de t_0 tel que

$$t \in W(t_0) \Rightarrow \delta(\Gamma(t), \Gamma(t_0)) \leqslant \varepsilon \Rightarrow \Gamma(t) \cap B(y, \varepsilon) \neq \varnothing, \qquad \forall\, y \in \Gamma(t_0)$$

D'où

$$t \in W(t_0) \Rightarrow \Gamma(t) \cap B(y_0, \varepsilon) \neq \varnothing \Rightarrow \Gamma(t) \cap \Omega \neq \varnothing,$$

ce qui démontre la semi-continuité inférieure de la multi-application Γ et achève la démonstration du théorème.

Lemme 4.1. — *Soit $\mathcal{K}$ l'ensemble des compacts non vides d'un espace métrisable de type dénombrable E, muni de la distance de Haussdorff δ. Alors $\mathcal{K}$ est de type dénombrable.*

Démonstration. — Soit (u_n) une suite dense dans E. Indexons l'ensemble $Pf(N)$ des parties finies de N sur N. Soit $\mathcal{K}_1$, l'ensemble des compacts $K_p = \bigcup_{n \in I_p} u_n$, où $p \in N$ et $I_p \in Pf(N)$. $\mathcal{K}_1$ est dénombrable ; et nous allons prouver que pour tout $\varepsilon > 0$ et tout compact $K \in \mathcal{K}$, il existe un compact $K_p \in \mathcal{K}_1$ tel que $\delta(K, K_p) \leqslant \varepsilon$. Comme K est compact, il existe une famille de boules fermées $B(u_n, \varepsilon)$, $n \in I_p$, $I_p \in Pf(N)$, telle que :

$$\begin{cases} K \cap B(u_n, \varepsilon) \neq \varnothing\,; & n \in I_p, \\ K \subset \bigcup_{i \in I} B(u_n, \varepsilon). & \end{cases}$$

Soit $K_p = \bigcup_{n \in I_p} u_n \in \mathcal{K}_1$. Pour tout $u \in K$, il existe $n \in I_p$ tel que $u \in B(u_n, \varepsilon)$. Par suite $d(u, K_p) \leqslant \varepsilon$, d'où $\sup_{u \in K} d(u, K_p) \leqslant \varepsilon$. D'autre part, pour tout $n \in I_p$, la boule $B(u_n, \varepsilon)$ rencontre K. Donc $d(u_n, K) \leqslant \varepsilon$, d'où $\sup_{n \in I_p} d(u_n, K) \leqslant \varepsilon$. On en conclut que $\delta(K, K_p) \leqslant \varepsilon$, ce qui prouve que $\mathcal{K}_1$ est dense dans $\mathcal{K}$.

Lemme 4.2. — *Soit $\mathcal{K}$ l'ensemble des compacts non vides d'un espace métrisable E, muni de la distance de Hausdorff δ. Alors la topologie de $\mathcal{K}$ est engendrée par les ouverts de la forme $K^+\Omega = \{K \in \mathcal{K} | K \subset \Omega\}$ et $K^-\Omega = \{K \in \mathcal{K} | K \cap \Omega \neq \varnothing\}$, où Ω est ouvert dans E.*

Démonstration. — Soit Ω ouvert dans E. Montrons que $K^+\Omega$ est ouvert dans $\mathcal{K}$. Soit K un compact non vide $\subset \Omega$ et soit $\varepsilon = d(K, \complement\Omega)$. On a :

$$\delta(K', K) < \varepsilon \Rightarrow \sup_{u \in K'} d(u, K) < \varepsilon \Rightarrow K' \subset \Omega,$$

ce qui prouve que $K^+\Omega$ est ouvert dans $\mathcal{K}$.

Montrons maintenant que $K^-\Omega$ est ouvert dans $\mathcal{K}$. Soit K un compact non vide rencontrant Ω, et soit $x_0 \in K \cap \Omega$. Il existe $\varepsilon > 0$ tel que $d(x_0, x) < \varepsilon \Rightarrow x \in \Omega$. Quel que soit K' compact vérifiant $\delta(K', K) < \varepsilon$, on a $\sup_{u \in K} d(u, K') < \varepsilon$, et il existe donc $y_0 \in K'$ vérifiant $d(x_0, y_0) < \varepsilon$, ce qui entraîne $y_0 \in \Omega$.

Inversement, soit $K \in \mathcal{K}$ et soit $\varepsilon > 0$. Posons

$$V(K, \varepsilon) = \{u \in E \mid d(u, K) < \varepsilon\},$$

$V(K, \varepsilon)$ est ouvert et contient K. On a :

$$K' \in \mathcal{K},\ K' \subset V(K, \varepsilon) \Rightarrow \sup_{u \in K'} d(u, K) < \varepsilon.$$

Soient $\Omega_1, \Omega_2, \ldots, \Omega_n$ des ouverts rencontrant K tous de diamètre $< \varepsilon$, dont la réunion recouvre K. Soit $K' \in \mathcal{K}$ tel que K' rencontre $\Omega_1, \ldots, \Omega_n$.

On a $\sup_{u \in K} d(u, K') < \varepsilon$. Donc tout élément de

$$K^+ V(K, \varepsilon) \cap K^- (\Omega_1) \cap K^- (\Omega_2) \cap K^- (\Omega_n)$$

est à une distance $< \varepsilon$ de K. Ceci achève la démonstration.

Théorème 4.2. — *Soient T un espace localement compact, μ une mesure sur T, Γ une multi-application de T à valeurs dans l'ensemble des $\mathcal{K}$ des compacts non vides d'un espace métrisable de type dénombrable E. Les conditions suivantes sont équivalentes.*

a) Γ *est* μ*-mesurable.*

b) *Pour toute partie compacte* $X \subset T$ *et tout* $\varepsilon > 0$, *il existe une partie compacte* $K \subset X$ *telle que* $|\mu|\ (X - K) \leqslant \varepsilon$ *et que la restriction de* Γ à K *soit continue.*

Démonstration. — $a \Rightarrow b$. Nous allons prouver que *l'application* Γ de T dans $\mathcal{K}$, muni de la distance de Hausdorff δ, est μ-mesurable. Comme $\mathcal{K}$ est de type dénombrable (lemme 4.1.), il suffit de prouver que l'image réciproque par Γ de tout ouvert dans $\mathcal{K}$ est μ-mesurable. Désignons par $\mathcal{B}$ l'ensemble des ouverts de $\mathcal{K}$ de la forme $K^{+}\Omega$ ou $K^{-}\Omega$, où Ω est ouvert dans E (lemme 4.2.). Soit B un ouvert dans $\mathcal{K}$. Puisque $\mathcal{K}$ est de type dénombrable, on a ([3], chap. 9, p. 50).

$$B = \bigcup_{j \in J} \bigcap_{i \in I} B_{ij},$$

où $B_{ij} \in \mathcal{B}$, I est *fini* et J *dénombrable.* Remarquons que pour tout ouvert Ω de E, les ensembles $\Gamma^{-1}(K^{+}\Omega)$ et $\Gamma^{-1}(K^{-}\Omega)$ sont μ-mesurables car on a

$$\Gamma^{-1}(K^{+}\,\Omega) = \Gamma^{+}\,\Omega \qquad \text{et} \qquad \Gamma^{-1}(K^{-}\,\Omega) = \Gamma^{-}\,\Omega$$

Il s'ensuit immédiatement que $\Gamma^{-1}B$ est μ-mesurable car on a

$$\Gamma^{-1}B = \Gamma^{-1}\left(\bigcup_{j \in J} \bigcap_{i \in I} B_{ij}\right) = \bigcup_{j \in J} \bigcap_{i \in I} \Gamma^{-1}(B_{ij})$$

Alors l'implication $a \Rightarrow b$ résulte du théorème de Lusin pour les applications mesurables ([4], chap. 4, p. 179) et du théorème 4.1. $b \Rightarrow a$. Soit A un fermé dans E et soit X une partie compacte $\subset T$. Il existe un ensemble μ-négligeable N et une partition dénombrable de $X - N$ formée d'une suite de compacts (K_n) telle que chacune des $\Gamma|_{K_n}$ soit continue. Alors $\Gamma^{-}A \cap X$ est réunion de $\Gamma^{-}A \cap N$ et des compacts $\Gamma^{-}A \cap K_n$, donc $\Gamma^{-}A$ est μ-mesurable.

Théorème 4.3. — *Soient* T *un espace localement compact,* μ *une mesure sur* T, $\mathcal{K}$ *l'ensemble des compacts non vides d'un espace métrisable de type dénombrable* E. *On a l'équivalence suivante :*

a) Γ *est une multi-application* μ*-mesurable de* T *dans* E *telle que* $\Gamma(t) \in \mathcal{K}$, $\forall\, t \in T$.

b) Γ *est une application* μ*-mesurable de* T *dans* $\mathcal{K}$.

Le théorème 4.3. permet d'utiliser toutes les propriétés connues des applications mesurables.

Théorème 4.4. — *Soient* T *un espace localement compact,* μ *une mesure sur* T, (E_n) *une suite finie d'espaces métrisables de type dénombrable, et* $E = \prod_{n=1}^{p} E_n$ *leur produit. Pour chaque* n, *soit* Γ_n *une multi-application*

μ-mesurable de T à valeurs dans l'ensemble des compacts non vides de E_n, et soit $\Gamma(t) = \prod_{n=1}^{p} \Gamma_n(t)$. *Soit* Φ *une multi-application semi-continue supérieurement de E dans un espace topologique F. Alors la multi-application* $t \to (\Phi \circ \Gamma)(t)$ *est μ-mesurable.*

DÉMONSTRATION. — Pour toute partie compacte $X \subset T$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe une partie compacte $K \subset X$ telle que $|\mu|\ (X - K) \leqslant \varepsilon$ et que chacune des $\Gamma_{n|_K}$ soit continue (th. 4.2.). Donc Γ est continue sur K([2], page 120). Par suite, Γ est μ-mesurable sur T (th. 4.2.) et il en est de même de la multi-application $t \to (\Phi \circ \Gamma)(t)$ (lemme 2.1).

Corollaire 1. — *Soient Γ_1 et Γ_2 deux multi-applications μ-mesurables de T à valeurs dans l'ensemble des compacts non vides d'un espace vectoriel métrisable de type dénombrable E et soit f une fonction finie μ-mesurable sur T. Alors les multi-applications* $t \to f(t)\Gamma_1(t)$ *et* $t \to \Gamma_1(t) + \Gamma_2(t)$ *sont μ-mesurables.*

DÉMONSTRATION. — En effet, les multi-applications $t \to [f(t), \Gamma_1(t)]$ et $t \to [\Gamma_1(t), \Gamma_2(t)]$ de T dans $R \times E$ et $E \times E$ respectivement sont μ-mesurables. Or, les applications :

$\Phi_1 : (\alpha, u) \to \alpha u$ de $R \times E$ dans $E (\alpha \in R,\ u \in E)$ et

$\Phi_2 : (u, v) \to u + v$ de $E \times E$ dans $E (u \in E,\ v \in E)$ sont continues.

Par suite, les multi-applications :

$$t \to f(t)\ \Gamma(t) = \Phi_1(f(t), \Gamma_1(t)) \qquad \text{et} \qquad t \to \Gamma_1(t) + \Gamma_2(t) = \Phi_2(\Gamma_1(t), \Gamma_2(t))$$

sont μ-mesurables en vertu du théorème précédent.

Corollaire 2. — *Soit Γ une multi-application μ-mesurable de T à valeurs dans l'ensemble des compacts non vides d'un espace normé E de dimension n. Alors la multi-application* $t \to \hat{\Gamma}(t)$ (où $\hat{\Gamma}(t)$ *est l'enveloppe convexe de* $\Gamma(t)$) *est μ-mesurable.*

DÉMONSTRATION. — Soit Λ_{n+1} le simplexe de R^{n+1} défini par :

$$\lambda = (\lambda_i) \in \Lambda_{n+1} \Leftrightarrow \lambda_i \geqslant 0, \qquad \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i = 1$$

Alors la multi-application $t \to \Lambda_{n+1} \times \underbrace{\Gamma(t) \times \dots \times \Gamma(t)}_{n+1 \text{ fois}}$ de T dans E est μ-mesurable. Il en est de même de la multi-application

$$t \to \hat{\Gamma}(t) = \Phi(\Lambda_{n+1} \times \underbrace{\Gamma(t) \times \dots \times \Gamma(t)}_{n+1 \text{ fois}})$$

où Φ est une application continue de $\Lambda_{n+1} \times E^{n+1}$ dans E définie par :

$$\Phi(\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1}\ ;\ u_1, \dots, u_{n+1}) = \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i u_i.$$

Théorème 4.5. — *Soient T un espace localement compact, μ une mesure sur T, Γ une multi-application μ-mesurable de T à valeurs dans l'ensemble des compacts non vides d'un espace métrisable de type dénombrable E et $(t, u) \to \varphi(t, u)$ une fonction semi-continue inférieurement sur $T \times E$. Alors les fonctions :*

$t \to \sup \{ \varphi(t, u) \mid u \in \Gamma(t) \}$ *et* $t \to \min \{ \varphi(t, u) \mid u \in \Gamma(t) \}$ *sont* μ-*mesurables sur* T.

Démonstration. — Pour toute partie compacte $X \subset T$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe un compact $K \subset T$ tel que $|\mu| \ (X - K) \leqslant \varepsilon$ et que $\Gamma_{|K}$ soit continue (Th. 4.2.). Alors les fonctions $t \to \sup \{ \varphi(t, u) | u \in \Gamma(t) \}$ et $t \to \min \{ \varphi(t, u) \mid u \in \Gamma(t) \}$ sont semi-continues inférieurement sur K (Th. 2.7. et Th. 2.8.) ; ces fonctions sont donc μ-mesurables sur K, et on a $|\mu| \ (X - K) \leqslant \varepsilon$. D'où le théorème.

Théorème 4.5'. — *Soient T un espace localement compact, μ une mesure sur T, Γ une multi-application μ-mesurable de T à valeurs dans l'ensemble des compacts non vides d'un espace localement compact polonais E, et soit $\varphi : (t, u) \to \varphi(t, u)$ une fonction définie sur $T \times E$ telle que : 1° pour tout $t \in T$, $u \to \varphi(t, u)$ soit continue sur E. 2° pour tout $u \in E$, $t \to \varphi(t, u)$ soit μ-mesurable sur T. Alors la fonction $t \to \max \{ \varphi(t, u) | u \in \Gamma(t) \}$ est μ-mesurable sur T.*

Démonstration. — Pour toute partie compacte $X \subset T$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe une partie compacte $K \subset X$ telle que $|\mu| \ (X - K) \leqslant \varepsilon$ et que $\varphi_{|K \times E}$ (Th. 3.1) et $\Gamma_{|K}$ (Th. 4.2) soient continues. Alors la fonction $t \to \max \{ \varphi(t, u) | \ u \in \Gamma(t) \}$ est continue sur K (Th. 2.7 et 2.8). D'où le théorème.

Théorème 4.6. — *Soient T un espace localement compact, μ une mesure sur T, Γ une multi-application μ-mesurable de T à valeurs dans l'ensemble des compacts non vides d'un espace métrisable de type dénombrable E. Soient $(t, u) \to \varphi(t, u)$ une fonction semi-continue inférieurement sur $T \times E$ et m une fonction μ-mesurable sur T. Alors la multi-application $t \to \{ u \in \Gamma(t) \mid \varphi(t, u) \leqslant m(t) \}$ est μ-mesurable sur T.*

Démonstration. — Pour toute partie compacte $X \subset T$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe une partie compacte $K \subset X$ tel que $|\mu| \ (X - K) \leqslant \varepsilon$ et que $\Gamma_{|K}$ et $m_{|K}$ soient continues. Soit Σ la multi-application de T dans E définie par :

$$\Sigma(t) = \{ u \in E \mid \varphi(t, u) \leqslant m(t) \}$$

Alors $\Sigma_{|K}$ est de graphe fermé à cause de la semi-continuité inférieure de φ et de la continuité de $m_{|K}$. Donc la restriction à K de la multi-application

$$t \to \{ u \in \Gamma(t) \mid \varphi(t, u) \leqslant m(t) \}$$

est semi-continue supérieurement en vertu du théorème 2.6., donc μ-mesurable. Comme $|\mu| \ (X - K) \leqslant \varepsilon$, Γ est μ-mesurable sur T.

Théorème 4.6'. — *Soient T un espace localement compact, μ une mesure sur T, Γ une multi-application μ-mesurable de T à valeurs dans l'ensemble des compacts non vides d'un espace localement compact polonais E. Soient $\varphi : (t, u) \rightarrow \varphi(t, u)$ une fonction définie sur $T \times E$ telle que : 1° pour tout $t \in T$, $u \rightarrow \varphi(t, u)$ soit continue sur E. 2° pour tout $u \in E$, $t \rightarrow \varphi(t, u)$ soit μ-mesurable sur T. Soit m une fonction μ-mesurable sur T. Alors la multi-application $t \rightarrow \{ u \in \Gamma(t) \mid \varphi(t, u) \leqslant m(t) \}$ est μ-mesurable sur T.*

Démonstration. — Pour toute partie compacte $X \subset T$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe une partie compacte $K \subset X$ telle que $|\mu| (X - K) \leqslant \varepsilon$ et que $\varphi_{|K\times E}$, $m_{|K}$ et $\Gamma_{|K}$ soient continues en vertu des théorèmes 3.1. et 4.2. Soit Σ la multi-application de T dans E définie par :

$$\Sigma(t) = \{ u \in E \mid \varphi(t, u) \leqslant m(t) \}$$

Alors $\Sigma_{|K}$ est de graphe fermé car $\varphi_{|K\times E}$ et $m_{|K}$ sont continues. Donc la restriction à K de la multi-application

$$t \rightarrow \{ u \in \Gamma(t) \mid \varphi(t, u) \leqslant m(t) \}$$

est semi-continue supérieurement (Th. 2.6.). La démonstration se termine de la même façon que dans le théorème 4.6.

Théorème 4.7. — *Soient T un espace localement compact, μ une mesure sur T, Γ une multi-application μ-mesurable de T à valeurs dans l'ensemble des compacts non vides d'un espace métrisable de type dénombrable E. Soient h une application continue de $T \times E$ dans un espace topologique séparé F et g une application μ-mesurable de T dans F. Alors la multi-application $t \rightarrow \{ u \in \Gamma(t) \mid h(t, u) = g(t) \}$ est μ-mesurable.*

Démonstration. — Pour toute partie compacte $X \subset T$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe un compact $K \subset X$ tel que $|\mu|$ $(X - K) \leqslant \varepsilon$ et que $\Gamma_{|K}$ et $g_{|K}$ soient continues. Soit Σ la multi-application de T dans E définie par :

$$\Sigma(t) = \{ u \in E \mid h(t, u) = g(t) \}.$$

Alors $\Sigma_{|K}$ est de graphe fermé en vertu de la continuité de h et de $g_{|K}$. Il en résulte que la restriction de $t \rightarrow \{ u \in \Gamma(t) \mid h(t, u) = g(t) \}$ à K est semi-continue supérieurement en vertu du théorème 2.6. ; donc μ-mesurable ; et on a $|\mu|$ $(X - K) \leqslant \varepsilon$, ce qui achève la démonstration.

Théorème 4.7'. — *Soient T un espace localement compact, μ une mesure sur T, Γ une multi-application μ-mesurable de T à valeurs dans l'ensemble des compacts non vides d'un espace localement compact polonais E. Soit h une application de $T \times E$ dans un espace métrisable de type dénombrable F telle que : 1° pour tout $t \in T$, $u \rightarrow h(t, u)$ soit continue sur E. 2° pour tout $u \in E$, $t \rightarrow h(t, u)$ soit μ-mesurable ; et soit g une application μ-mesurable de T dans F. Alors la multi-application $t — \{ u \in \Gamma(t) \mid h(t, u) = g(t) \}$ est μ-mesurable.*

Démonstration. — Pour toute partie compacte $X \subset T$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe une partie compacte $K \subset X$ telle que $|\mu|\ (X - K) \leqslant \varepsilon$ et que $h_{|K\times E}$, $g_{|K}$ et $\Gamma_{|K}$ soient continues en vertu des théorèmes 3.1. et 4.2. Soit Σ la multi-application de T dans E définie par

$$\Sigma(t) = \{ u \in E \mid h(t, u) = g(t) \}$$

Alors $\Sigma_{|K}$ est de graphe fermé car $h_{|K\times E}$ et $g_{|K}$ sont continues. Donc la restriction à K de la multi-application

$$t \to \{ u \in \Gamma(t) \mid h(t, u) = g(t) \}$$

est semi-continue supérieurement (Th. 2.6.). La démonstration se termine de la même façon que le théorème 4.7.

Théorème 4.8. — *Soient T un espace localement compact tel que toute partie compacte de T soit métrisable, μ une mesure sur T, Γ une multi-application μ-mesurable de T à valeurs dans l'ensemble des compactes non vides d'un espace souslinien E. Alors l'ensemble*

$$\Gamma^{-} A = \{ t \in T \mid \Gamma(t) \cap A \neq \varnothing \}$$

est μ-mesurable pour tout espace souslinien A dans E.

Démonstration. — Pour toute partie compacte $X \subset T$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe un compact $K \subset X$ tel que $|\mu|\ (X - K) \leqslant \varepsilon$ et que $\Gamma_{|K}$ soit continue, donc de graphe fermé, donc de graphe souslinien car $K \times E$ est souslinien. Soit pr_1 la projection de $T \times E$ sur T et soit A un ensemble souslinien dans E. On a, en désignant par $G(\Gamma_{|K})$ le graphe de Γ_K :

$$\begin{aligned} \Gamma^{-} A \cap K &= \{ t \in K \mid \Gamma(t) \cap A \neq \varnothing \} \\ &= pr_1[G(\Gamma_{|K}) \cap K \times A] \end{aligned}$$

Comme $G(\Gamma_{|K}) \cap K \times A$ est souslinien dans $K \times E$, $\Gamma^{-} A \cap K$ est un sous-espace souslinien de K car c'est l'image du sous-espace souslinien $G(\Gamma_{|K}) \cap K \cap A$ par l'application continue pr_1. Comme K est métrisable, $\Gamma^{-} A \cap K$ est μ-mesurable, et l'on a $|\mu|\ (X - K) \leqslant \varepsilon$. Ceci achève la démonstration.

Définition. — *Une multi-application de T à valeurs dans l'ensemble des parties non vides d'un espace topologique E est une multi-application étagée μ-mesurable si elle ne prend qu'un nombre fini de valeurs A_i, $1 \leqslant i \leqslant m$ et si chacun des ensembles*

$$T_i = \{ t \in T \mid \Gamma(t) = A_i \}, \qquad 1 \leqslant i \leqslant m$$

est μ-mesurable.

Si E est métrisable de type dénombrable et si les ensembles A_i sont compacts, une multi-application étagée μ-mesurable n'est autre qu'une *application étagée μ-mesurable de T dans $\mathcal{K}$.*

Théorème 4.9. — *Soient T un espace localement compact, μ une mesure sur T, E un espace compact métrisable et Γ une multi-application μ-mesurable de T à valeurs dans l'ensemble $\mathcal{K}$ des compacts non vides de E. Alors il existe une suite (Γ_n) de multi-applications étagées μ-mesurables de T dans E telle que* $\lim_{n\to\infty} \delta(\Gamma_n(t), \Gamma(t)) = 0$ *uniformément sur T.*

Démonstration. — En effet, $\mathcal{K}$ est compact métrisable pour la distance de Hausdorff δ. Le théorème découle directement de ([4], page 181), compte tenu des théorèmes 4.2. et 4.3.

Théorème 4.10. — *Soient T un espace localement compact, μ une mesure sur T et (Γ_n) une suite de multi-applications μ-mesurables de T à valeurs dans l'ensemble des compacts non vides d'un espace métrisable de type dénombrable E. Alors les multi-applications*

$$t \to \bigcap_{n=1}^{\infty} \Gamma_n(t) \quad \textit{et} \quad t \to \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} \Gamma_k(t)$$

sont μ-mesurables.

Démonstration. — Il suffit de prouver que $\Gamma : t \to \bigcap_{n=1}^{\infty} \Gamma_n(t)$ est μ-mesurable car on sait (lemme 1.1.) que toute réunion dénombrable de multi-applications μ-mesurables est μ-mesurable.

Soient X un ensemble compact $\subset T$ et $\varepsilon > 0$. Il existe, pour chaque indice n, un ensemble compact $K_n \subset X$ tel que $|\mu|\ (X - K_n) \leqslant 2^{-n}\varepsilon$ et que chacune des $\Gamma_{n|_K}$ soit continue. L'ensemble $K = \bigcap_{n=1}^{\infty} K_n$ est compact, chacune des $\Gamma_{n|_K}$ est continue, et l'on a

$$|\mu|\ (X - K) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} |\mu|\ (X - K_n) \leqslant \varepsilon.$$

Il en résulte que $\Gamma|_K = \bigcap_{n=1}^{\infty} \Gamma_{n|_K}$ est semi-continue supérieurement ([2], page 119). Donc Γ est μ-mesurable sur T.

Théorème 4.11. — *Soient T un espace localement compact tel que toute partie compacte de T soit métrisable, μ une mesure sur T, et (Γ_n) une suite de multi-applications μ-mesurables de T à valeurs dans l'ensemble des compacts non vides d'un espace souslinien E. Alors, la multi-application* $\Gamma : t \to \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} \Gamma_k(t)$ *est μ-mesurable.*

Démonstration. — Pour tout ensemble compact $X \subset T$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe un compact $K \subset X$ tel que $|\mu|\ (X - K) \leqslant \varepsilon$ et que la restriction de chacune des Γ_n à K soit continue (Th. 4.2.). Par suite, la restriction à K de chacune des Γ_n est de graphe fermé, donc souslinien. Alors la restriction à K de chacune des multi-applications

$$S_n : t \to \bigcup_{k=n}^{\infty} \Gamma_k(t)$$

est de graphe souslinien, il en est de même de la restriction K de la multi-application $\Gamma : t \to \bigcap_{n=1}^{\infty} S_n(t)$. Donc $\Gamma|_K$ est μ-mesurable (lemme 3.2.), et on a $|\mu|\ (X - K) \leqslant \varepsilon$, ce qui achève la démonstration.

Théorème 4.12. — *Soient T un espace localement compact, μ une mesure sur T, et (Γ_n) une suite de multi-applications μ-mesurables de T à valeurs dans l'ensemble des compacts non vides d'un espace métrisable de type dénombrable E. On suppose que $\bigcup_{n=1}^{\infty} \Gamma_n(t)$ soit relativement compacte pour tout $t \in T$. Alors la multi-application $\Gamma : t \to \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{\bigcup_{k=n}^{\infty} \Gamma_k(t)}$ est μ-mesurable.*

Démonstration. — Pour tout ensemble compact $X \subset T$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe un compact $K \subset X$ tel que $|\mu|\ (X - K) \leqslant \varepsilon$ et que la restriction de chacune des Γ_k à K soit continue. Il s'ensuit que chacune des multi-applications $\Sigma_n : t \to \bigcup_{k=n}^{\infty} \Gamma_k(t)$ est semi-continue inférieurement sur K, et il en est de même de chacune des multi-applications $\overline{\Sigma}_n : t \to \overline{\Sigma_n(t)}$. Par suite, chacune des $\overline{\Sigma}_n$ est μ-mesurable sur K (Th. 1.1.). Alors la restriction de la multi-application $\Gamma : t \to \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{\Sigma_n(t)}$ à K est μ-mesurable (Th. 4.10), et l'on a $|\mu|\ (X - K) \leqslant \varepsilon$, ce qui achève la démonstration.

5. — SECTIONS MESURABLES D'UNE MULTI-APPLICATION MESURABLE

Définition. — Soient T un espace localement compact muni d'une mesure μ, Γ une multi-application μ-mesurable de T dans un espace topologique E telle que $\Gamma(t) \neq \emptyset$, $\forall\, t \in T$. On appelle *section μ-mesurable* de Γ toute application μ-mesurable σ de T dans E telle que $\sigma(t) \in \Gamma(t)$, $\forall\, t \in T$.

Théorème 5.1. — *Soient T un espace localement compact, μ une mesure sur T, Γ une multi-application μ-mesurable de T à valeurs dans l'ensemble des compacts non vides d'un espace métrisable de type dénombrable E. Alors Γ admet une section μ-mesurable.*

Démonstration. — Soient d une distance sur E compatible avec la topologie et (u_n) une suite dense dans E. Pour chaque $t \in T$, on pose :

$$\Gamma_1(t) = \{ u \in \Gamma(t) \mid d(u, u_1) = \inf_{v \in \Gamma(t)} d(v, u_1) \}$$

et pour $n > 1$

$$\Gamma_n(t) = \{ u \in \Gamma_{n-1}(t) \mid d(u, u_n) = \inf_{v \in \Gamma_{n-1}(t)} d(v, u_n) \}$$

Chacune des multi-applications Γ_n est μ-mesurable (Th. 4.5.) et (Th. 4.7.). Il en est de même de $t \to \bigcap_{n=1}^{\infty} \Gamma_n(t)$ (Th. 4.10). Il suffit de vérifier que $\bigcap_{n=1}^{\infty} \Gamma_n(t)$ est réduite à un point $\sigma(t)$ pour tout $t \in T$. Soient $\sigma(t)$ et $\sigma'(t)$ appartenant à $\bigcap_{n=1}^{\infty} \Gamma_n(t)$. On a

$$d(\sigma'(t), u_n) = d(\sigma(t), u_n), \qquad \forall\, n \in N.$$

Donc, $\sigma'(t) = \sigma(t)$, $\forall\, t \in T$.

Corollaire 5.1. — *Soient T un espace localement compact, μ une mesure sur T, Γ une multi-application μ-mesurable de T à valeurs dans l'ensemble des compacts non vides d'un espace métrisable de type dénombrable E et F un espace topologique séparé. Soient h une application continue de $T \times E$ dans F et g une application μ-mesurable de T dans F telle que $g(t) \in h(t, \Gamma(t))$, $\forall\, t \in T$. Alors il existe une application μ-mesurable s de T dans E telle que $s(t) \in \Gamma(t)$ et $g(t) = h(t, s(t))$, $\forall\, t \in T$.*

Démonstration. — Soit Σ la multi-application de T dans E définie par $\Sigma : t \to \{ u \in \Gamma(t) | h(t, u) = g(t) \}$. $\Sigma(t)$ est compact non vide pour tout $t \in T$ et Σ est μ-mesurable (Th. 4.7.), donc Σ admet une section μ-mesurable s qui vérifie les conditions de l'énoncé.

Corollaire 5.1'. — *Soient T un espace localement compact, μ une mesure sur T, Γ une multi-application μ-mesurable de T à valeurs dans l'ensemble des compacts non vides d'un espace localement compact polonais E et F un espace métrisable de type dénombrable. Soit h une application de $T \times E$ dans F telle que : 1° pour tout $t \in T$, $u \to h(t, u)$ soit continue sur E ; 2° pour tout $u \in E$, $t \to h(t, u)$ soit μ-mesurable sur T. Soit g une application μ-mesurable de T dans F telle que $g(t) \in h(t, \Gamma(t))$, $\forall\, t \in T$. Alors il existe une application μ-mesurable s de T dans E telle que $s(t) \in \Gamma(t)$ et $g(t) = h(t, s(t))$, $\forall\, t \in T$.*

Démonstration. — Soit Σ la multi-application de T dans E définie par $\Sigma : t \to \{ u \in \Gamma(t) \mid h(t, u) = g(t) \}$. $\Sigma(t)$ est compact non vide pour tout $t \in T$ et Σ est μ-mesurable (Th. 4.7'), donc Σ admet une section μ-mesurable s qui vérifie les conditions de l'énoncé.

Théorème 5.2. — *Soient T un espace localement compact, μ une mesure sur T, Γ une multi-application μ-mesurable de T à valeurs dans l'ensemble des fermés non vides d'un espace polonais E. Alors Γ admet une section μ-mesurable.*

Démonstration. — Soit d une distance sur E compatible avec la topologie et pour laquelle E soit complet. Soit (C_n, p_n, φ_n) un criblage de E ([3], chap. 9, page 130). On munit chacun des ensembles C_0 et $(p_n^{-1}(c)\,;\, c \in C_n)$ d'une relation d'ordre total telle que l'ensemble des éléments inférieurs à un élément donné soit fini. Soit $c \in C_0$ et soit T_c l'ensemble ainsi défini : $t \in T_c \Leftrightarrow c$ est le premier élément de C_0 tel que $\Gamma(t) \cap \varphi_0(c) \neq \varnothing$. Les ensembles T_c non vides forment une partition dénombrable de T. Supposons déjà défini T_c pour $c \in C_n$. Soit $c' \in p_n^{-1}(c)$ et $T_{c'}$ l'ensemble ainsi défini :

$$t \in T_c' \Leftrightarrow \begin{cases} t \in T_c \\ c' \text{ est le premier élément de } p_n^{-1}(c) \text{ tel que} \\ \Gamma(t) \cap \varphi_{n+1}(c') \neq \varnothing \end{cases}$$

Les ensembles $T_{c'}$ sont μ-mesurables et $T_c = \bigcup_{c' \in p_n^{-1}(c)} T_{c'}$. Pour chaque n, on pose $\sigma_n(t) = u_c \in \varphi_n(c)$ si $t \in T_c$. Chacune des applications σ_n est μ-mesurable. On a $d(\sigma_n(t), \sigma_{n+1}(t)) \leqslant 2^{-n}$ et $d(\sigma_n(t), \Gamma(t)) \leqslant 2^{-n}$ pour tout $t \in T$ et tout entier $n \geqslant 0$. Donc la suite $(\sigma_n(t))$ est de Cauchy, et l'application $\sigma : t \to \lim_{n\to\infty} \sigma_n(t)$ est μ-mesurable ([4], chap. IV, page 175). On a $\sigma(t) \in \Gamma(t)$ pour tout $t \in T$ car

$$= d(\sigma(t), \Gamma(t)) = \lim_{n\to\infty} d(\sigma_n(t), \Gamma(t)) = 0$$

pour tout $t \in T$.

Corollaire 5.2. — *Soient T un espace localement compact tel que toute partie compacte de T soit métrisable, μ une mesure sur T, Γ une application de T à valeurs dans l'ensemble des fermés non vides d'un espace polonais E telle que la restriction de Γ à toute partie compacte de T soit de graphe souslinien. Soient h une application continue de $T \times E$ dans un espace topologique séparé F et g une application μ-mesurable de T dans F telle que $g(t) \in h(t, \Gamma(t))$, $\forall\, t \in T$. Alors il existe une application μ-mesurable s de T dans E telle que $s(t) \in \Gamma(t)$ et $g(t) = h(t, s(t))$, $\forall\, t \in T$.*

Démonstration. — Soit Σ la multi-application de T dans E définie par $\Sigma(t) = \{\, u \in \Gamma(t) \mid h(t, u) = g(t) \,\}$, $\forall\, t \in T$. Alors $\Sigma(t)$ est fermé non vide pour tout $t \in T$. Soient X un ensemble compact et $\varepsilon > 0$. Il existe un ensemble compact $K \subset X$ tel que $|\mu|\,(X - K) \leqslant \varepsilon$ et que la restriction de g à K soit continue. Par suite la restriction de Σ à K est de graphe souslinien, donc $\Sigma|_K$ est μ-mesurable (lemme 3.2.), et on a $|\mu|\,(X - K) \leqslant \varepsilon$. Donc Σ est μ-mesurable sur T entier. En vertu du théorème 5.2., Σ admet une section μ-mesurable s qui vérifie les conditions du corollaire.

Corollaire 5.2'. — *Soient T un espace localement compact tel que toute partie compacte de T soit métrisable, μ une mesure sur T, et Γ une multi-application μ-mesurable de T à valeurs dans l'ensemble des fermés non vides d'un espace localement compact polonais E. Soit h une application de $T \times E$ dans un espace métrisable de type dénombrable F telle que : 1° pour tout $t \in T$, $u \to h(t, u)$ soit continue sur E ; 2° pour tout $u \in E$, $t \to h(t, u)$ soit μ-mesurable sur T. Soit g une application μ-mesurable de T dans F telle que $g(t) \in h(t, \Gamma(t))$, $\forall\, t \in T$. Alors il existe une application μ-mesurable s de T dans E telle que $s(t) \in \Gamma(t)$ et $g(t) = h(t, s(t))$, $\forall\, t \in T$.*

Démonstration. — Soit Σ la multi-application de T à valeurs dans l'ensemble des fermés non vides de E définie par :

$$\Sigma(t) = \{\, u \in \Gamma(t) \mid h(t, u) = g(t) \,\}, \qquad \forall t \in T.$$

Σ est μ-mesurable (Th. 3.5'). Donc Σ admet une section μ-mesurable s (Th. 5.2.) qui vérifie les conditions de l'énoncé.

Théorème 5.3. — *Soient T un espace localement compact, μ une mesure sur T, Γ une multi-application μ-mesurable de T à valeurs dans l'ensemble des compacts non vides d'un espace métrisable de type dénombrable E. Alors il existe une famille dénombrable $(\sigma_i,\ i \in I)$ de sections μ-mesurables de Γ telle que l'ensemble des $(\sigma_i(t),\ i \in I)$ soit dense dans $\Gamma(t)$ pour tout $t \in T$.*

Démonstration. — Soit d une distance sur E compatible avec la topologie.

Soient $D = (u_m)$, $m \in N$, une suite dense dans E et $\mathcal{B} = (B(u_m, 2^{-n}))$, $n \in N$, la famille dénombrable des boules fermées de centre u_m de rayon 2^{-n}. Pour chaque couple d'indices (m, n) l'ensemble.

$$T_{m,n} = \{\, t \in T \mid \Gamma(t) \cap B(u_m, 2^{-n}) \neq \varnothing \,\}$$

est μ-mesurable par hypothèse. Soit $\Gamma_{m,n}$ la multi-application de T à valeurs dans l'ensemble des compacts non vides de E définie par :

$$\Gamma_{m,n}(t) = \begin{cases} \Gamma(t) \cap B(u_m, 2^{-n}) \neq \varnothing & \text{si } t \in T_{m,n}, \\ \Gamma(t) & \text{si } t \in T - T_{m,n}, \end{cases}$$

Chacune des multi-applications $\Gamma_{m,n}$ est μ-mesurable. En effet, soit A un fermé dans E. L'ensemble $\Gamma^{-}_{m,n}A = \{\, t \in T \mid \Gamma_{m,n}(t) \cap A \neq \varnothing \,\}$ est μ-mesurable car on a :

$$\Gamma^{-}_{m,n}A = \{\, t \in T_{m,n} \mid \Gamma(t) \cap (A \cap B(u_m, 2^{-n})) \neq \varnothing \,\}$$
$$\cup \{\, t \in T - T_{m,n} \mid \Gamma(t) \cap A \neq \varnothing \,\}$$

Soit $\sigma_{m,n}$ une section μ-mesurable de $\Gamma_{m,n}$ (Th. 5.1.). Soient I l'ensemble des couples d'indices (m, n) et $\mathcal{S} = (\sigma_i,\ i \in I)$ la famille dénombrable de sections μ-mesurables de Γ ainsi obtenues. Montrons que l'ensemble des $(\sigma_i(t),\ i \in I)$ est dense dans $\Gamma(t)$ pour tout $t \in T$. En effet, soit $t \in T$ et soit $\xi \in \Gamma(t)$. Pour tout n il existe $u_m \in D$ tel que $d(\xi, u_m) \leqslant 2^{-(n+1)}$.

Vu la construction des $(\sigma_i(t),\ i \in I)$, il existe un indice $i \in I$ tel que $d(u_m,\ \sigma_i(t) \leqslant 2^{-(n+1)}$. D'où

$$d(\xi, \sigma_i(t)) \leqslant d(\xi, u_m) + d(u_m, \sigma_i(t)) \leqslant 2^{-(n+1)} + 2^{-(n+1)} = 2^{-n}.$$

Ceci achève la démonstration.

Théorème 5.4. — *Soient T un espace localement compact, μ une mesure sur T, Γ une multi-application μ-mesurable de T à valeurs dans l'ensemble des fermés non vides d'un espace polonais E. Alors il existe une famille dénombrable $(\sigma_i,\ i \in I)$ de sections μ-mesurables de Γ telles que l'ensemble des $(\sigma_i(t),\ i \in I)$ soit dense dans $\Gamma(t)$ pour tout $t \in T$.*

Démonstration. — Soit d une distance sur E compatible avec la topologie et pour laquelle E soit complet. Soient $D = (u_m)$, $m \in N$, une suite dense dans E et $\mathcal{B} = (B(u_m, 2^{-n}, n \in N)$ la famille dénombrable de boules fermées de centre u_m de rayon 2^{-n}. Pour chaque couple d'indices $(m,\ n)$ l'ensemble

$$T_{m,n} = \{ t \in T \mid \Gamma(t) \cap B(u_m, 2^{-n}) \neq \varnothing \}$$

est μ-mesurable par hypothèse. Soit $\Gamma_{m,n}$ la multi-application de T à valeurs dans l'ensemble des fermés non vides de E définie par :

$$\Gamma_{m,n}(t) = \begin{cases} \Gamma(t) \cap B(u_m, 2^{-n}) \neq \varnothing & \text{si } t \in T_{m,n}, \\ \Gamma(t) & \text{si } t \in T - T_{m,n}. \end{cases}$$

Chacune des multi-applications $\Gamma_{m,n}$ est μ-mesurable. En effet, soit A un fermé dans E. L'ensemble $\Gamma^{-}_{m,n}A = \{ t \in T \mid \Gamma_{m,n}(t) \cap A \neq \varnothing \}$ est μ-mesurable car on a :

$$\Gamma^{-}_{m,n}A = \{ t \in T \mid \Gamma(t) \cap (A \cap B(u_m, 2^{-n}) \neq \varnothing \}$$
$$\cup \{ t \in T - T_{m,n} \mid \Gamma(t) \cap A \neq \varnothing \}.$$

La démonstration se termine de la même façon que dans le théorème 5.3.

Théorème 5.5. — *Soient T un espace localement compact, μ une mesure sur T, Γ une multi-application μ-mesurable de T à valeurs dans l'ensemble des compacts non vides d'un espace métrisable de type dénombrable E. Soit A une partie μ-mesurable de T et g une application μ-mesurable de A dans E telle que $g(t) \in \Gamma(t)$ pour tout $t \in A$. Alors g se prolonge sur T entier en une section μ-mesurable σ de Γ.*

Démonstration. — Soit Σ la multi-application de T à valeurs dans l'ensemble des compacts non vides de E définie par :

$$\Sigma(t) = \begin{cases} g(t) & \text{pour} \quad t \in A, \\ \Gamma(t) & \text{pour} \quad t \in T - A. \end{cases}$$

Σ est μ-mesurable et admet une section μ-mesurable σ (Théorème 5.1.) qui prolonge g.

Théorème 5.6. — *Soient T un espace localement compact, μ une mesure sur T, Γ une multi-application μ-mesurable de T à valeurs dans l'ensemble des fermés non vides d'un espace polonais E. Soit A une partie μ-mesurable de T et g une application μ-mesurable de A dans E telle que $g(t) \in \Gamma(t)$ pour tout $t \in A$. Alors g se prolonge sur T entier en une section μ-mesurable σ de Γ.*

Démonstration. — Soit Σ la multi-application de T à valeurs dans l'ensemble des fermés non vides de E définie par :

$$\Sigma(t) = \begin{cases} g(t) & \text{pour} \quad t \in A, \\ \Gamma(t) & \text{pour} \quad t \in T - A. \end{cases}$$

Σ est μ-mesurable et admet une section μ-mesurable σ (Th. 5.2.) qui prolonge g.

6. — MULTI-APPLICATIONS MESURABLES A VALEURS CONVEXES COMPACTES D'UN ESPACE VECTORIEL TOPOLOGIQUE LOCALEMENT CONVEXE METRISABLE DE TYPE DENOMBRABLE

Théorème 6.1. — *Soient E un espace localement convexe métrisable de type dénombrable et E' son dual.*

Il existe dans E' un ensemble dénombrable $\mathcal{F}$ jouissant des propriétés suivantes :

(1) *Soient K un convexe compact non vide de E et $x \notin K$. Alors il existe $z' \in \mathcal{F}$ tel que* $\sup_{y \in K} < z', y > \; < \; < z', x >$

(2) *Soit K un convexe compact non vide de E. Alors on a ;*

$$K = \bigcap_{z' \in \mathcal{F}} H_{z'}$$

où

$$H_{z'} = \{ y \in E \mid \, < z', y > \; \leqslant \sup_{u \in K} < z', u > \}$$

Démonstration. — Soient D un ensemble dénombrable dense dans E et $\mathcal{V}$ un système fondamental dénombrable de voisinages convexes fermés symétriques de l'origine dans E. Indexons l'ensemble $Pf(N)$ des parties finies J de N sur N et désignons par $\mathcal{L}$ l'ensemble dénombrable de convexes compacts L de la forme $L = \text{env. conv.} \left(\bigcup_{m \in J} u_m \right)$, où $u_m \in D$, $J \in Pf(N)$. Désignons par $\mathcal{C}$ l'ensemble dénombrable des couples de convexes fermés c de la forme $c = (u + V, L)$, où $u \in D$, $V \in \mathcal{V}$ et $L \in \mathcal{L}$, tel que $u + V \cap L = \varnothing$. A chaque $c \in \mathcal{C}$, associons $z_c' \in E'$ telle que $z'_c(u+V) \neq z'_c(L)$. Montrons que l'ensemble dénombrable $\mathcal{F}$ des $(z'_c\,;\, c \in \mathcal{C})$ satisfait aux conditions de l'énoncé. En effet, puisque $x \notin K$, il existe $W \in \mathcal{V}$ tel que

$$(x+W) \cap (K+W) = \emptyset.$$

Soit $V \in \mathcal{V}$ tel que $V+V \subset W$.

étant compact, il existe un nombre fini d'éléments $y_1, \dots y_p$ de K tels que $K \subset \bigcup_{k=1}^{p} \left(y_k + \frac{V}{4}\right)$. Soit alors

$$u_k \in D \cap \left(y_k + \frac{V}{4}\right), \qquad 1 \leqslant k \leqslant p.$$

on a

$$y_k + \frac{V}{4} \subset u_k + \frac{V}{2}, \qquad 1 \leqslant k \leqslant p.$$

D'où

$$K \subset \bigcup_{k=1}^{p} \left(u_k + \frac{V}{2}\right) \qquad \text{et} \qquad K \cap \left(u_k + \frac{V}{2}\right) \neq \emptyset, \qquad 1 \leqslant k \leqslant p.$$

Soit L l'enveloppe convexe des $\{u_1, \dots u_p\}$. En vertu de ce qui précède on a

$$K \subset L + \frac{V}{2} \qquad \text{et} \qquad L \subset K + \frac{V}{2}. \tag{2}$$

Considérons par ailleurs $u \in D \cap \left(x + \frac{V}{2}\right)$. On a

$$u + V \subset x + \frac{V}{2} + V \subset x + W\,;$$

compte tenu de (1) et (2), il vient :

$$u + V \cap L = \emptyset, \tag{3}$$

c'est-à-dire $c = (u+V, L) \in \mathcal{C}$. Soit $z'_c \in E'$ tel que :

$$\sup_{y \in L} < z'_c, y > \; < \inf_{y \in u+V} < z'_c, y >$$

On a

$$\sup_{y \in L} < z'_c, y > \; < \; < z'_c, u > - \sup_{y \in V} < z'_c, y > \tag{4}$$

Or, on a

$$- \sup_{y \in V} < z'_c, y > \; \leqslant -2 \sup_{y \in V/2} < z'_c, y > \tag{5}$$

Par ailleurs, l'inclusion $K \subset L + \frac{V}{2}$ entraîne

(6) $$\sup_{y \in K} < z'_c, y > \ \leqslant \ \sup_{y \in L} < z'_c, y > + \sup_{y \in V/2} < z'_c, y >$$

Compte tenu de (4), (5) et (6), il vient :

(7) $$\sup_{y \in K} < z'_c, y > \ < \ < z'_c, u > - \sup_{y \in V/2} < z'_c, y > .$$

Puisque $u \in x + \frac{V}{2}$, on a :

$$< z'_c, u > \ < \ < z'_c, x > + \sup_{y \in V/2} < z'_c, y > .$$

Finalement on obtient

$$\sup_{y \in K} < z'_c, y > \ < \ < z'_c, x > .$$

Ceci achève la démonstration de la première assertion. Prouvons l'assertion (2). Remarquons que l'inclusion $K \subset \bigcap_{z' \in \mathcal{F}} H_{z'}$ est triviale. Reste donc à prouver l'inclusion inverse. Soit $x \in \bigcap_{z' \in \mathcal{F}} H_{z'}$ tel que $x \notin K$. En vertu de l'assertion (1), il existe $z' \in \mathcal{F}$ tel que $\sup_{y \in K} < z', y > \ < \ < z', x >$ ce qui est absurde. Ceci achève la démonstration de (2).

Corollaire. — *Soient T un espace localement compact tel que toute partie compacte de T soit métrisable, μ une mesure sur T, Γ une multi-application de T à valeurs dans l'ensemble des convexes compacts non vides d'un espace de Fréchet de type dénombrable E. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

a) Γ *est μ-mesurable.*

b) *Pour toute forme linéaire continue z' sur E, la fonction scalaire $M_{z'} : t \to \sup_{u \in \Gamma(t)} < z', u >$ est μ-mesurable sur T.*

Démonstration. — *a*) $\Rightarrow$ *b*). Cela découle du théorème 4.5. Montrons que *b*) $\Rightarrow$ *a*). En vertu du théorème précédent, pour tout $t \in T$, on a

$$\Gamma(t) = \bigcap_{z' \in \mathcal{F}} H_{z'}(t)$$

où

$$H_{z'}(t) = \{ y \in E \mid < z', y > \ \leqslant M_{z'}(t) \}.$$

Soient X une partie compacte de T et $\varepsilon > 0$. Il existe une partie compacte $K \subset X$ telle que $|\mu|(X - K) \leqslant \varepsilon$ et telle que la restriction à K de chacune des fonctions $M_{z'}$ ($z' \in \mathcal{F}$), soit continue. On en conclut que la restriction de Γ à K est de graphe fermé car la restriction de chacune des multi-applications $H_z{}'$, à K est de graphe fermé. Donc la restriction de Γ à K est μ-mesurable (lemme 3.2.). On en conclut que Γ est μ-mesurable sur T entier.

Théorème 6.2. — *Soient T un espace localement compact, μ une mesure sur T, Γ une multi-application μ-mesurable de T à valeurs dans l'ensemble des compacts non vides d'un espace localement convexe métrisable de type dénombrable E. On suppose que l'enveloppe convexe fermée $\hat{\Gamma}(t)$ de $\Gamma(t)$ soit compacte pour tout $t \in T$. Alors la multi-application $\hat{\Gamma} : t \to \hat{\Gamma}(t)$ est μ-mesurable.*

Démonstration. — Soient X une partie compacte de T et $\varepsilon > 0$. Il existe une partie compacte $K \subset X$ telle que $|\mu|\ (X - K) \leqslant \varepsilon$ et telle que la restriction de Γ à K soit continue (Th. 4.2.). Soit $t_0 \in K$ et soit Ω un ensemble ouvert dans E tel que $\hat{\Gamma}(t_0) \subset \Omega$. Comme $\hat{\Gamma}(t_0)$ est compacte, il existe un voisinage convexe fermé V de l'origine dans E tel que $\hat{\Gamma}(t_0) + V \subset \Omega$. Comme Γ est continue sur K, il existe un voisinage U de t_0 dans K tel que :

$$t \in U \Rightarrow \Gamma(t) \subset \hat{\Gamma}(t_0) + V$$

Mais $\hat{\Gamma}\ (t_0) + V$ est convexe et fermé ; par suite on a

$$t \in U \Rightarrow \hat{\Gamma}(t) \subset \hat{\Gamma}(t_0) + V \subset \Omega,$$

ce qui prouve que $\hat{\Gamma}$ est semi-continue supérieurement sur K ; comme $|\mu|\ (X - K) \leqslant \varepsilon$, $\hat{\Gamma}$ est μ-mesurable sur T entier.

Remarque. — Si E est un espace de Fréchet, l'hypothèse « $\hat{\Gamma}(t)$ est compacte » est automatiquement vérifiée.

Théorème 6.3. — *Soient T un espace localement compact, μ une mesure sur T, et Γ une multi-application de T à valeurs dans l'ensemble $\mathcal{L}$ des convexes compacts non vides de dimension finie d'un espace normé de type dénombrable E. Soit (z'_n) une suite faiblement dense dans la boule unité B' de E'. Pour que Γ soit μ-mesurable, il faut et il suffit que pour tout n, la fonction scalaire $t \to \sup\limits_{u \in \Gamma(t)} < z'_n, u >$ soit μ-mesurable.*

Démonstration. — La condition est nécessaire en vertu du théorème 4.5. Montrons que la condition est suffisante. En effet, l'ensemble $\mathcal{K}$ des compacts non vides de E muni de la distance de Hausdorff δ est de type dénombrable. Donc $\mathcal{L}$ muni de la topologie induite par celle de $\mathcal{K}$ l'est aussi. En vertu du théorème 4.3., il suffit de prouver que l'*application* Γ de T dans $\mathcal{L}$ est μ-mesurable. Il s'agit donc de prouver que pour tout élément $K \in \mathcal{L}$, la fonction scalaire $t \to \delta(K, \Gamma(t))$ est μ-mesurable.

Désignons par $z' \to H_{z'}$ (resp. $z' \to M_{z'}(t)$) la fonction d'appui de K (resp. $\Gamma(t)$). On a ([10], page 186).

$$\delta(K, \Gamma(t)) = \sup_{z' \in B'} |H_{z'} - M_{z'}(t)|, \qquad \forall t \in T.$$

Comme $z' \to H_{z'} - M_{z'}(t)$ est continue pour la topologie $\sigma(E', E)$ ([10], page 184, Th. 6), on a

$$\delta(K, \Gamma(t)) = \sup_n |H_{z'_n} - M_{z'_n}(t)|, \qquad \forall t \in T$$

Or chacune des fonctions scalaires $t \to |H_{z'_n} - M_{z'_n}(t)|$ est μ-mesurable, donc il en est de même de $t \to \delta(K, \Gamma(t))$.

Théorème 6.4. — *Soient T un espace localement compact, μ une mesure sur T, et Γ une multi-application de T à valeurs dans l'ensemble $\mathfrak{L}$ des convexes compacts non vides d'un espace de Banach de type dénombrable E. Supposons que E soit réflexif ou d'une façon plus générale que le dual fort E' de E soit de type dénombrable. Soit (z'_n) une suite fortement dense dans la boule unité B' de E'. Pour que Γ soit μ-mesurable, il faut et il suffit que pour tout n, la fonction scalaire $t \to \sup_{u \in \Gamma(t)} < z'_n, u >$ soit μ-mesurable.*

Démonstration. — La condition est nécessaire en vertu du théorème 4.5. Montrons que la condition est suffisante. Il suffit de prouver que pour tout élément $K \in \mathfrak{L}$, la fonction scalaire $t \to \delta(K, \Gamma(t))$ est μ-mesurable (voir la démonstration du Th. 6.3.). Désignons par $z' \to H_{z'}$ (resp. $z' \to M_{z'}(t)$) la fonction d'appui de K (resp. $\Gamma(t)$). On a ([10], page 186).

$$\delta(K, \Gamma(t)) = \sup_{z' \in B'} |H_{z'} - M_{z'}(t)|, \qquad \forall t \in T.$$

Comme $z' \to H_{z'} - M_{z'}(t)$ est continue par la topologie forte de E' ([10], page 184, Th. 7), on a

$$\delta(K, \Gamma(t)) = \sup_n |H_{z'_n} - M_{z'_n}(t)|, \qquad \forall t \in T,$$

Or chacune des fonctions scalaires $t \to |H_{z'_n} - M_{z'_n}(t)|$ est μ-mesurable, donc il en est de même de $t \to \delta(K, \Gamma(t))$.

7. — APPLICATIONS

Soient T un espace localement compact muni d'une mesure positive μ et Γ une multi-application μ-mesurable de T à valeurs dans l'ensemble des compacts non vides d'un espace normé *E de dimension n*. Soit $\hat{\Gamma} : t \to \hat{\Gamma}(t)$ (où $\hat{\Gamma}(t)$ désigne l'enveloppe convexe de $\Gamma(t)$) la multi-application μ-mesurable de T à valeurs dans l'ensemble des convexes compacts non vides de E. On supposera qu'il existe une fonction positive g μ-intégrable telle que $\|u\| \leqslant g(t)$, $\forall\, u \in \Gamma(t)$, $\forall\, t \in T$. Soit B (resp. $\hat{B}$) l'ensemble des $f \in L^1_E(T, \mu)$ telles que $f(t) \in \Gamma(t)$ (resp. $f(t) \in \hat{\Gamma}(t)$) $\mu - p.p.$

Lemme 7.1. — $\hat{B}$ est $\sigma(L^1, L^\infty)$ compact dans $L_E^1(T, \mu)$.

Démonstration. — On remarque d'abord que B et $\hat{B}$ sont non vides (Th. 5.1. et 5.2.). Pour tout $f \in \hat{B}$, on a $\|f(t)\| \leqslant (n+1)g(t)$; donc $\|f\|_{L_1} \leqslant (n+1)\|g\|_{L_1}$. On en conclut aussitôt que $\hat{B}$ est relativement $\sigma(L^1, L^\infty)$ compact ([9], page 298). Mais $\hat{B}$ est convexe car $\hat{\Gamma}(t)$ est convexe pour tout $t \in T$. Il suffit de vérifier que $\hat{B}$ est fortement fermé dans $L_E^1(T, \mu)$. Soit $\tilde{f}$ adhérent à $\hat{B}$ pour la topologie forte de $L_E^1(T, \mu)$. Il existe une suite (f_n) dans $\hat{B}$ convergeant fortement vers f. De la suite (f_n) on peut extraire une suite convergeant presque partout vers f. Or $f_{n_k}(t) \in \Gamma(t) p.p.\mu$. et $\hat{\Gamma}(t)$ est compact ; la suite $(f_{n_k}(t)$ converge $p.p.$ vers $\tilde{f}(t) \in \hat{\Gamma}(t)$, ce qui prouve que $\hat{B}$ est $\sigma(L^1, L^\infty)$ compact dans $L_E^1(T, \mu)$.

Théorème 7.1. — *On pose*

$$\int \Gamma(t)\, d\mu(t) = \left\{ \int f(t)\, d\mu(t) \mid f \in B \right\}$$

$$\int \hat{\Gamma}(t)\, d\mu(t) = \left\{ \int f(t)\, d\mu(t) \mid f \in \hat{B} \right\}$$

a) $\int \hat{\Gamma}(t)\, d\mu(t)$ *est convexe et compact dans* E.

b) *Si* T *est sans atomes et si la mesure* μ *est bornée, on a*

$$\int \Gamma(t)\, d\mu(t) = \int \hat{\Gamma}(t)\, d\mu(t).$$

Démonstration. — La partie *a*) est immédiate car l'application $f \to \int f(t)\, d\mu(t)$ de $L_E^1(T, \mu)$ dans E est linéaire et continue pour la topologie forte (ou affaiblie) de $L_E^1(T, \mu)$.

b) On a $\hat{\Gamma}(t) = h\Big(\Lambda_{n+1} \times \underbrace{\Gamma(t) \times \ldots \times \Gamma(t)}_{n+1}\Big)$, $\forall t \in T$, où Λ_{n+1} désigne le simplexe de R^{n+1} défini par :

$$\lambda = (\lambda_i) \in \Lambda_{n+1} \Leftrightarrow \lambda_i \geqslant 0,\ \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i = 1$$

et h est une application continue de $\Lambda_{n+1} \times E^{n+1}$ dans E définie par :

$$h(\lambda_1, \ldots, \lambda_{n+1} ; u_1, \ldots, u_{n+1}) = \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i u_i$$

Soit alors $f \in \hat{B}$. En vertu du corollaire 5.1. du théorème 5.1. on a $f(t) = \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i(t) f_i(t)$, où λ_i est μ-mesurable, $\lambda_i(t) \geqslant 0$, $\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i(t) = 1$; $f_i \in B$. Posons $m_i = f_i \cdot \mu$. En vertu de ([11], page 606, th. 3), il existe une application μ-mesurable $t \to (\dot{\lambda}_i(t))$ telle que :

$$\dot{\lambda}_i(t) \in \{ 0, 1 \}, \qquad \sum_{i=1}^{n+1} \dot{\lambda}_i(t) = 1, \qquad \int \dot{\lambda}_i dm_i = \int \lambda_i dm_i, \quad 1 \leqslant i \leqslant \quad n+1$$

Par suite

$$\int f(t)\, \mathrm{d}\mu(t) = \int \sum_{i=1}^{n+1} \dot{\lambda}_i(t) f_i(t)\, \mathrm{d}\mu(t), \text{ ce qui montre que}$$

$$\int \hat{\Gamma}(t)\, \mathrm{d}\mu(t) = \int \Gamma(t)\, \mathrm{d}\mu(t).$$

Lemme 7.2. — *Soient (Γ_n) une suite de multi-applications μ-mesurables de T à valeurs dans l'ensemble des compacts non vides d'un espace de Banach de type dénombrable E. On suppose qu'il existe une fonction g μ-intégrable telle que $\|u\| \leqslant g(t)$, $\forall\, u \in \Gamma_n(t)$, $\forall\, t \in T$, $\forall\, n \in N$. Soit f une fonction μ-mesurable de T dans E telle que pour tout $t \in T$ $f(t) \in \liminf \Gamma_n(t)$ (1).*

Alors f est μ-intégrable. De façon précise : il existe une suite (f_n) de fonctions μ-intégrables de T dans E telle que $f_n(t) \in \Gamma_n(t)$, $\forall\, t \in T$, $\forall\, n \in N$ et telle que $\lim_{n\to\infty} f_n(t) = f(t)$, $\forall t \in T$.

Démonstration. — Pour tout $t \in T$, on a :

$$f(t) \in \liminf \Gamma_n(t) \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \mathrm{d}(f(t), \Gamma_n(t)) = 0$$

Mais la fonction $g_n : t \to \mathrm{d}(f(t), \Gamma_n(t))$ est μ-mesurable d'après les théorèmes 4.2. et 2.7., et chacune des multi-applications Σ_n définie sur T à valeurs dans l'ensemble des compacts non vides de E ainsi définie :

$$\Sigma_n(t) = \{ u \in \Gamma_n(t) \mid \|f(t) - u\| = \mathrm{d}(f(t), \Gamma_n(t)) \}$$

est μ-mesurable (Th. 4.7.). Il existe donc une application μ-mesurable f_n de T dans E telle que $f_n(t) \in \Sigma_n(t)$, $\forall\, t \in T$, c'est-à-dire $f_n(t) \in \Gamma_n(t)$ et $\|f(t) - f_n(t)\| = \mathrm{d}(f(t), \Gamma_n(t))$, $\forall\, t \in T$. Il est clair que chacune des f_n est μ-intégrable car on a $\|f_n(t)\| \leqslant g(t)$, $\forall\, t \in T$. De plus on a :

$$\lim_{n\to\infty} \|f(t) - f_n(t)\| = \lim_{n\to\infty} \mathrm{d}(f(t), \Gamma_n(t)) = 0, \qquad \forall\, t \in T,$$

ce qui achève la démonstration.

(1) Cf. [2], p. 125.

Les hypothèses du lemme précédent étant conservées, désignons par H_n l'ensemble des fonctions μ-intégrables f telles que $f(t) \in \Gamma_n(t)$, $\forall\, t \in T$, $\forall\, n \in N$ et par H l'ensemble des fonctions μ-intégrables f telles que $f(t) \in \liminf \Gamma_n(t)$, $\forall\, t \in T$. Posons :

$$\int \Gamma_n(t)\, d\mu(t) = \left\{ \int f(t)\, d\mu(t) \mid f \in H_n \right\}$$

$$\int \liminf \Gamma_n(t)\, d\mu(t) = \left\{ \int f(t)\, d\mu(t) \mid f \in H \right\}.$$

Alors on a le théorème suivant :

Théorème 7.2. — *On a :*

$$\int \liminf \Gamma_n(t)\, d\mu(t) \subset \liminf \int \Gamma_n(t)\, d\mu(t)$$

Démonstration. — Soit $\xi \in \int \liminf \Gamma_n(t)\, d\mu(t)$. On a $\xi = \int f(t)\, d\mu(t)$ avec $f \in H$. D'après le lemme, il existe une suite (f_n) μ-intégrable telle que $f_n(t) \in \Gamma_n(t)$, $\forall\, t \in T$, $\forall\, n \in N$, et telle que :

$$\lim_{n\to\infty} f_n(t) = f(t), \qquad \forall\, t \in T.$$

Posons $\xi_n = \int f_n(t)\, d\mu(t)$. On a $\xi_n \in \int \Gamma_n(t)\, d\mu(t)$ pour tout entier n et

$$\lim_{n\to\infty} \xi_n = \lim_{n\to\infty} \int f_n(t)\, d\mu(t) = \int \lim_{n\to\infty} f_n(t)\, d\mu(t) = \int f(t)\, d\mu(t).$$

Donc $\xi \in \liminf \int \Gamma_n(t)\, d\mu(t)$ car

$$d\left(\xi, \int \Gamma_n(t)\, d\mu(t)\right) \leqslant d(\xi, \xi_n), \qquad \forall\, n \in N.$$

et

$$\lim_{n\to\infty} d\left(\xi, \int \Gamma_n(t)\, d\mu(t)\right) = 0.$$

Donnons pour terminer une application à la théorie des groupes de transformations. Soit G un groupe topologique opérant continuement à gauche sur un espace localement compact T. Pour $s \in G$ et $t \in T$, soit $s \cdot t$ le transformé de t par s. On notera $\gamma(s)$ l'homéomorphisme de T sur T défini par $\gamma(s)t = s \cdot t$. On a, pour $s_1, s_2 \in G$, la relation

$$\gamma(s_1)\gamma(s_2) = \gamma(s_1 s_2).$$

On rappelle que l'application

$$h : (t, s) \to s \cdot t$$

est continue de $T \times G$ dans T.

On posera $t \equiv t'$ mod G si et seulement s'il existe un élément $s \in G$ tel que $\gamma(s)t = t'$. Soit T/G l'espace quotient pour la relation d'équivalence ainsi introduite et Π l'application canonique de T sur T/G. Ceci posé, soient :

T un espace localement compact polonais, μ une mesure sur T, G un groupe métrisable de type dénombrable et complet. On suppose qu'il existe un ensemble souslinien S dans T rencontrant chaque classe d'équivalence $\Pi(t)$ en un point et un seul.

Théorème 7.3. — *Soit g, l'application qui, à chaque $t \in T$, associe l'unique élément $g(t) = S \cap \Pi(t)$. Alors il existe une application μ-mesurable σ de T dans G telle que*

$$g(t) = \gamma(\sigma(t))t, \qquad \forall\, t \in T.$$

Démonstration. — Soit Φ l'application de $T \times G$ dans $T \times T$ ainsi définie : $\Phi(t, s) = (s \cdot t, 1t)$ où $s \in G$, $t \in T$ et 1 l'élément neutre de G. Il est clair que Φ est continue ; donc l'image I de $T \times G$ par Φ est un sous-espace souslinien dans $T \times T$. Or I est l'ensemble des $(t, u) \in T \times T$ tels que $t \equiv u$ mod G, et en outre le graphe de g est l'ensemble des éléments $(t, u) \in T \times S$ tels que $t \equiv u$ mod G. Par suite, le graphe de g est donc l'ensemble souslinien $I \cap (T \times S)$. Par conséquent, g est mesurable pour toute mesure μ sur T. Pour tout $t \in T$, on a

$$g(t) \in h(t, G) = \gamma(G)t.$$

Par application du Corollaire 5.2., il existe une application μ-mesurable σ de T dans G telle que

$$g(t) = \gamma(\sigma(t))t, \qquad \forall\, t \in T.$$

Ceci achève la démonstration.

BIBLIOGRAPHIE

[1] R. J. Aumann, Integrals of set valued functions (*Journal of Mathematica and applications*, p. 1-12, 1965).

[2] C. Berge, Espaces topologiques (*Functions multivoques*, Dunod).

[3] N. Bourbaki, Topologie générale (Livre III, chap. 9).

[4] N. Bourbaki, Intégration (Livre XIII, chap. 4).

[5] Ch. Castaing, Comptes rendus (t. 262, p. 409-411, 1966).

[6] Ch. Castaing, Comptes rendus (t. 263, p. 63-66, 1966).

[7] G. Debreu, « Integration of correspondences » (multigraphié). (*University of California*, 1965.)

[7] *bis*] G. Debreu, « Integration of correspondences », Proceedings of the Fifth Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability (*University of California Press*, 1966).

[8] A. F. Filippov, On certain questions in the theory of optimal control (*Ves nik Moskov*, Série Math., p. 25-32, 1959).

[9] A. Grothendieck, Espaces vectoriels topologiques (*Cours de Sao-Paulo*).

[10] L. Hormander, Sur la fonction d'appui des ensembles convexes dans un espace localement convexe (*Arkiv för Matematik*, p. 181-186, 1954).

[11] S. Karlin, On extreme point of vector functions (*Proc. Amer. Math. Soc.*, vol. 4, p. 603-610, 1953).

[12] A. Lasota et Z. Opial, An application of the Kakutani-Ky Fan theorem in the theory of ordinary differential equations (*Bull. Acad. Pol. Sc.* Série Math., vol. XIII n° 11-12, 1965).

[13] V. Neumann (*Annals of Math* 50, 1949).

[14] C. Olech, A note concerning set valued measurable functions (*Bull. Acad. Pol. Sc.*, Série Math., vol. XIII, p. 317-321, 1965).

[15] A. Plis, Remark on measurable set valued functions (*Bull. Ac. Pol. Sc.*, vol. IX, n° 12, p. 857-859, 1961).

[16] J. Paoli, L'équilibre concurrentiel retrouvé (*Rech. Opér.*, n° 40, 1966).

[17] L. M. Sonneborn et F. S. Van Vleck, The Bang-Bang principle (*S. Siam control*, vol. 2, n° 2, p. 152-159, 1964).

[18] T. Wazewski, Sur une condition d'existence des fonctions implicites mesurables (*Bull. Acad. Pol. Sc.*, vol. 9, n° 12, 1961).