REVUE FRANÇAISE D'INFORMATIQUE ET DE RECHERCHE OPÉRATIONNELLE

R. DUSSAUD

Méthode de la forme quadratique et théorie des indices

Revue française d'informatique et de recherche opérationnelle, tome 1, nº 1 (1967), p. 35-66

<http://www.numdam.org/item?id=M2AN_1967__1_1_35_0>

R.I.R.O.
(1re année, N° 1, 1967, p. 35-66)

METHODE DE LA FORME QUADRATIQUE ET THEORIE DES INDICES

par R. DUSSAUD (1)

Nous rappelons dans le présent article les principes de la « méthode de la forme quadratique ». En utilisant la « division euclidienne généralisée », nous établissons un algorithme qui englobe les schémas de Routh, les déterminants de Hurwitz, les critères de Schur, etc. et qui s'applique même dans les cas singuliers pour lesquels les procédés connus ne permettent pas de conclure. Nous en reprenons ensuite les fondements par une étude dans le plan complexe que la théorie des indices permet de traduire sur le corps des réels. Nous terminons cet exposé par une présentation théorique condensée de la « méthode de la forme quadratique ».

L'étude de la situation des zéros d'un polynôme $P(z)$ [$P(z) \in C(z)$ ou $P(z) \in R(z)$] a donné lieu à un très grand nombre de travaux. On résout d'abord le problème posé pour les racines réelles, on utilise ensuite les critères de stabilité qui permettent de situer les racines complexes par rapport à l'axe imaginaire du plan complexe z. On peut aussi, par la méthode de Routh-Wall, résoudre les deux problèmes simultanément en opérant par translations successives de l'axe imaginaire du plan z. On utilise à cet effet les schémas de Routh dérivés de l'algorithme du p.g.c.d et le procédé se révélerait particulièrement efficace s'il ne comportait certains cas d'exception. Nous avons montré [4, 5, 6, 7 ; voir bibliographie] qu'il existe une méthode dite « méthode de la forme quadratique » qui réussit toujours et nous l'avons fondée théoriquement sur les propriétés d'une matrice qui s'obtient très simplement par des divisions successives que l'on peut effectuer en une seule opération et que nous désignerons par « division euclidienne généralisée » dans l'étude qui suit. Nous avons l'intention de fournir ici une nouvelle justification de cette méthode après avoir examiné quelques formes matricielles que l'on retrouve soit dans la division euclidienne des polynômes, soit dans la théorie de l'élimination ou les critères de stabilité. Enfin grâce à des réductions matricielles fondées sur la nature non dérogatoire de la matrice de Frobénius attachée à un polynôme nous nous proposons de simplifier et de condenser l'essentiel de la théorie.

(1) Faculté des Sciences de Toulouse.

1. DIVISION EUCLIDIENNE GENERALISEE ET ELIMINATION

Considérons les polynômes $f(x)$ et $g(x)$ éléments de $K(x)$ K étant un corps commutatif :

$$f(x) = \sum_{i=0}^{i=n} a_i x^{n-i} \qquad g(x) = x^p - \sum_{i=1}^{i=p} b_i x^{p-i}$$

On définit la division euclidienne généralisée de longueur k de $f(x)$ par $g(x)$ à l'aide de :

$$\begin{aligned} f(x) = g(x)[A_0^0 x^{n-p} + A_1^0 x^{n-p-1} + \dots + A_{k-1}^0 x^{n-p-k+1}] \\ + A_k^0 x^{n-k} + A_{k+1}^1 x^{n-k-1} + \dots + A_{k+p-1}^{p-1} x^{n-p-k+1} \\ + a_{k+p} x^{n-p-k} + \dots + a_n \end{aligned}$$

dont on démontre l'unicité et que l'on compare à la division euclidienne généralisée de longueur $k+1$:

$$\begin{aligned} f(x) = g(x)[A_0^0 x^{n-p} + A_1^0 x^{n-p-1} + \dots + A_k^0 x^{n-p-k}] + A_{k+1}^0 x^{n-k-1} \\ + A_{k+2} x^{n-k-2} + \dots + A_{k+p}^{p-1} x^{n-p-k} + a_{k+p+1} x^{n-p-k-1} + \dots + a_n \end{aligned}$$

ce qui conduit par identification aux relations :

$$\begin{aligned} A_{k+1}^0 = A_{k+1}^1 + b_1 A_k^0 \,;\ \dots\,;\ A_{k+m}^{m-1} = A_{k+m}^m + b_m A_k^0 \,;\ \dots\,; \\ A_{k+p-1}^{p-2} = A_{k+p-1}^{p-1} + b_{p-1} A_k^0 \,;\ A_{k+p}^{p-1} = a_{k+p} + b_p A_k^0 \end{aligned}$$

d'où, sous forme matricielle (Espace K^p) :

$$\begin{Vmatrix} A_{k+1}^0 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ A_{k+m}^{m-1} \\ \vdots \\ \vdots \\ A_{k+p}^{p-1} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} b_1 & 1 \dots 0 \\ b_2 & 0 \dots 0 \\ & \\ \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots \\ b_{p-1} & 0 \dots 1 \\ b_p & 0 \dots 0 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} A_k^0 \\ \\ \vdots \\ \vdots \\ A_{k+m}^m \\ \vdots \\ \vdots \\ A_{k+p-1}^{p-1} \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ a_{k+p} \end{Vmatrix}$$

(1)
$$\vec{R}_{k+p} = m\vec{R}_{k+p-1} + \vec{r}_{k+p}$$

en employant les notations :

$$\vec{r}_0 = \left\| \begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ a_0 \end{matrix} \right\| \dots \vec{r}_i \left\| \begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ a_i \end{matrix} \right\| \dots \vec{R}_0 = \vec{r}_0,\ \vec{R}_1 = \left\| \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ a_0 \\ a_1 \end{matrix} \right\| ;$$

$$\dots \vec{R}_p = \left\| \begin{matrix} A_1^0 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ A_p^{p-1} \end{matrix} \right\| \dots \vec{R}_{j+p} = \left\| \begin{matrix} A_{j+1}^0 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ A_{j+p}^{p-1} \end{matrix} \right\| ;\ m = \left\| \begin{matrix} b_1 & 1 \dots 0 \\ b_2 & 0 \dots 0 \\ \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots \\ b_{p-1} & 0 \dots 1 \\ b_p & 0 \dots 0 \end{matrix} \right\|$$

m est la matrice de Frobénius relative à $g(x)$.

Rappelons les résultats essentiels de la théorie :

1° de la relation (1) on déduit par itérations :

$$\vec{R}_{k+p+j} = m^{j+1}\vec{R}_{k+p-1} + m^j\,\vec{r}_{k+p} + \dots + m\,\vec{r}_{k+p+j-1} + \vec{r}_{k+p+j} \tag{2}$$

$$\vec{R}_n = m^n\,\vec{r}_0 + m^{n-1}\vec{r}_1 + \dots + m\,\vec{r}_{n-1} + \vec{r}_n \tag{3}$$

2° Envisageant les p divisions euclidiennes de $f(x)$, $x\,f(x)$ ... $x^{p-1}f(x)$ par $g(x)$ on a :

$$(4)\qquad \begin{cases} f(x) = g(x)q(x) + A_{n-p+1}^0 x^{p-1} + \dots + A_n^{p-1} \\ xf(x) = g(x)q_1(x) + A_{n-p+2}^0 x^{p-1} + \dots + A_{n+1}^{p-1} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x^{p-1}f(x) = g(x)q_{p-1}(x) + A_m^0 x^{p-1} + \dots + A_{n+p-1}^{p-1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \vec{R}_n = m^n\vec{r}_0 + m^{n-1}\vec{r}_1 + \dots + m\,\vec{r}_{n-1} + \vec{r}_n \\ \vec{R}_{n+1} = m^{n+1}\vec{r}_0 + m^n\,\vec{r}_1 + \dots + m^2\vec{r}_{n-1} + m\,\vec{r}_n \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \vec{R}_{n+p-1} = m^{n+p-1}\vec{r}_0 + m^{n+p-2}\,\vec{r}_1 + \dots + m^p\vec{r}_{n-1} + m^{p-1}\vec{r}_n \end{cases}$$

Ce qui conduit à :

$$\vec{R}_{n+p-1} = m\vec{R}_{n+p-2} = \dots = m^{p-1}\vec{R}_n$$

Nous désignerons par « division euclidienne généralisée » l'opération qui permet d'obtenir les relations (4) par une seule opération en envisageant des termes en x^{-k} $(k > 0)$ pour le quotient et le reste de la division euclidienne ordinaire. On constate aisément que la multiplication de la matrice m^j par m décale les $p - 1$ premières colonnes de m^j de un rang vers la droite, ce qui montre que $m^n \cdot \vec{r}_0 \dots m^{n+p-1}\vec{r}_0$ sont les vecteurs colonnes écrits de droite à gauche de la matrice $a_0 m^n$; ce résultat est encore valable pour $m^{n-j}\vec{r}_j \dots m^{n+p-j-1}\,\vec{r}_j$ d'où :

$f(m) = a_0 m^n + a_1 m^n + \dots + a_n I = \{\vec{R}_{n+p-1}, \vec{R}_{n+p-2} \dots \vec{R}_n\}$; I = matrice unité, la notation $\{\vec{R}_{n+p-1}, \vec{R}_{n+p-2} \dots \vec{R}_n\}$ indiquant la disposition des vecteurs colonnes de $f(m)$.

Introduisons la matrice M_f :

$$M_f = \left\|\begin{matrix} A^0_{n-p+1} & A^1_{n-p+2} \dots A^{p-1}_n \\ A^0_{n-p+2} & A^1_{n-p+3} \dots A^{p-1}_{n+1} \\ \dots & \dots \\ A^0_n & A^1_{n+1} \quad \dots A^{p-1}_{n+p-1} \end{matrix}\right\| = \left\{\begin{matrix} \vec{R}_n \\ \vec{R}_{n+1} \\ \vdots \\ \vec{R}_{n+p-1} \end{matrix}\right\}$$

ce dernier symbolisme indiquant la disposition des éléments de la matrice suivant les vecteurs lignes. On en déduit :

$$M_f^{-\pi/2} = f(m)$$

$M_f^{-\pi/2}$ étant déduite de M_f par rotation de $-\dfrac{\pi}{2}$ autour de son centre.

3° Les coefficients $A^0_k \dots A^0_{k+1}$ apparaissent sous forme de déterminants :

$$A^0_k = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 \dots a_{k-1} & a_k \\ -1 & b_1 \dots b_{k-1} & b_k \\ 0 & -1 \dots b_{k-2} & b_{k-1} \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 \dots -1 & b_1 \end{vmatrix} \; ; \; A^1_{k+1} = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 \dots a_{k-1} & a_k \\ -1 & b_1 \dots b_{k-1} & b_k \\ 0 & -1 \dots b_{k-2} & b_{k-1} \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 \dots -1 & b_1 \end{vmatrix}$$

4º Introduisons la chaîne des mineurs principaux de M_f :

(5) $d_0 = 1 \quad d_1 = A^0_{n-p+1} \ldots$

$$d_k = \begin{vmatrix} A^0_{n-p+1} \ldots A^{k-1}_{n-p+k} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ A^0_{n-p+k} \ldots A^{k-1}_{n-p+2k-1} \end{vmatrix} \ldots d_p = \det M_f$$

puis les polynômes :

(6) $r_0 = A^0_{n-p+1}x^{p-1} + A^1_{n-p+2}x^{p-2} + \ldots + A^{p-1}_n$;

$$R'_1(x) = \begin{vmatrix} A^0_{n-p+1}, A^1_{n-p+2}x^{p-2} + \ldots + A^{p-1}_n \\ A^0_{n-p+2}, A^1_{n-p+3}x^{p-2} + \ldots + A^{p-1}_{n+1} \end{vmatrix} \ldots$$

$$R'_{k-1}(x) = \begin{vmatrix} A^0_{n-p+1} \ldots A^{k-2}_{n-p+k-1}, A^{k-1}_{n-p+k}x^{p-k} + \ldots + A^{p-1}_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ A^0_{n-p+k} \ldots A^{k-2}_{n-p+2k-2}, A^{k-1}_{n-p+2k-1}x^{p-k} + \ldots + A^{p-1}_{n+k-1} \end{vmatrix}$$

$$\ldots \vec{R}'_{p-1} = d_p$$

On montre que :

a) d_p est le résultant de $f(x)$ et de $g(x)$

b) si $f(x)$ et $g(x)$ admettent comme p.g.c.d $D(x)$ de degré $p - c$ on a :

$$D(x) = R'_{c-1}(x) = \begin{vmatrix} A^0_{n-p+1} \ldots A^{-c2}_{n-p+c-1}, \; A^{c-1}_{n-p+c}x^{p-c} + \ldots + A^{p-c} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ A^0_{n-p+c} \ldots A^{c-2}_{n-p+2c-2}, A^{c-1}_{n-p+2c-1}x^{p-c} + \ldots + A^{p-1}_{n+c} \end{vmatrix}$$

avec $d_c \neq 0$, $d_{c+1} = d_{c+2} = \ldots = d_p = 0$

5º Si la suite : [$f(x)$ et $g(x) \in R(x)$]

$1 \; d_1 \ldots\ldots\ldots d_{k-1} \ldots\ldots\ldots d_p$

est formé de termes tous différents de zéro les signes des d_i sont respectivement les signes des éléments de la première colonne du schéma de Routh correspondant.

6º Dans l'hypothèse du 5º la suite : $r_0(x)$, $R'_1(x) \ldots R'_{k-1}(x) \ldots R'_{p-1}$ joue le même rôle que la suite de Sturm formée à partir de $f(x)$ et de $g(x)$ à l'aide de l'algorithme d'Euclide car les polynômes correspondants sont égaux à un coefficient multiplicatif près carré d'un nombre réel.

7º On a la relation fondamentale :

$$d_j^2 R'_{j+1} + d_{j+1}^2 R'_{j-1} = R'_j(d_j d_{j+1} x + G_j) \qquad (G_j = \text{constante})$$

qui fait de la suite des $R'_j(x)$ une suite de Sturm de polynômes [$f(x)$ et $g(x) \in R(x)$]

8° On a par division de $x^{p-1}, x^p \dots x^{2p-2}$ par $g(x)$ les coefficients directeurs des restes : 1, b_1, $\alpha_2 \dots \alpha_{p-1}$ d'où la matrice :

$$S = \begin{Vmatrix} 1 & b_1 & \alpha_2 \dots \alpha_{p-1} \\ 0 & 1 & b_1 \dots \alpha_{p-2} \\ \cdot & \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ 0 & 0 & 0 \quad 1 \end{Vmatrix}$$

obtenue en décalant chaque fois les éléments de la ligne précédente d'un rang vers la droite et en complétant par des zéros. Ce qui précède conduit à la relation fondamentale :

$$M_f \cdot S = L = \begin{Vmatrix} A^0_{n-p+1} & A^0_{n-p+2} \dots A^0_n \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ A^0_n & A^0_{n+1} \dots A^0_{n+p-1} \end{Vmatrix}$$

la matrice symétrique L ayant comme éléments les coefficients directeurs des restes des divisions de $f(x)$, $xf(x) \dots x^{2p-2} f(x)$ par $g(x)$

9° On associe à L la forme quadratique : $[f(x)$ et $g(x) \in R(x)]$

$$U(t_0, t_1 \dots t_{p-1}) = A^0_{n-p+1} t_0^2 + A^0_{n-p+2}(2t_0t_1) + A^0_{n-p+3}(t_1^2 + 2t_0t_2) + \dots + A^0_{n+p-1} t_{p-1}^2$$

et on étudie son rang et sa signature.

On a, en tenant compte de la forme de la matrice S :

$$d_k = \begin{vmatrix} A^0_{n-p+1} \dots A^0_{n-p+k} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ A^0_{n-p+k} \dots A^0_{n-p+2k-1} \end{vmatrix} \quad k = 1 \dots p - 1 \; ; \; \det M_f = \det L = d_p$$

et en se plaçant dans l'hypothèse du 5° on a une décomposition de Gauss de la forme quadratique $U(t_0 \dots t_{p-1})$:

$$U(t_0 \dots t_{p-1}) = B^0_0(t_0 + B^1_0 t_1 + \dots B^{p-1}_0 t_{p-1})^2 + B^1_1(t_1 + B^2_1 t_2 + \dots + B^{p-1}_1 t_{p-1})^2 + \dots + B^{p-1}_{p-1} t_{p-1}^2$$

avec : $$B^k_k = \frac{d_{k+1}}{d_k} \qquad k = 0, 1 \dots p - 1$$

Il y a donc équivalence entre les deux problèmes : ($d_i \neq 0$, $i = 1 \dots p$)

a) étudier les permanences et les variations des signes de la suite de $p + 1$ nombres 1, $d_1 \dots d_p$, *b*) étudier la signature de la forme quadratique non dégénérée $U(t_0 \ldots t_{p-1})$.

10° Si U est dégénérée de rang c on a : $[f(x)$ et $g(x) \in R(x)]$

$$d_c \neq 0, \; d_{c+1} = d_{c+2} = \ldots = d_p$$

et si $1, d_1 \ldots d_c$ est formée de termes tous différents de zéro, les résultats du 9° s'appliquent à $f_1(x)$ et à $g_1(x)$ quotients de $f(x)$ et de $g(x)$ par $\dfrac{D(x)}{d_c}$, p.g.c.d. normalisé des polynômes $f(x)$ et $g(x)$; on peut soit utiliser U soit U_c restriction de U aux polynômes $f_1(x)$ et $g_1(x)$ $(t_c = t_{c+1} = \ldots = t_{p-1} = 0)$.

11° Si les suites d_i prévues au 5° et au 10° contiennent des termes nuls, l'étude de ces suites est abandonnée au profit de la recherche de la signature des formes quadratiques U et U_c car *cette signature donne encore la solution des problèmes posés alors que les schémas de Routh par exemple ne réussissent pas.*

12° Toute la théorie peut être exposée et justifiée à partir de la division euclidienne généralisée, sauf en ce qui concerne 10° et 11° où il est indispensable d'envisager la répartition des zéros de $g(x)$ et leur multiplicité. Si $f(x)$ et $g(x)$ sont premiers entre eux un zéro réel x_0 d'ordre k de $g(x)$ introduit dans la forme U $\frac{k}{2}$ carrés négatifs et $\frac{k}{2}$ carrés positifs si k est pair et $\dfrac{k-1}{2}$ carrés négatifs et $\dfrac{k-1}{2}$ carrés positifs si k est impair et dans ce dernier cas il y a enfin un carré dont le signe est celui de $\dfrac{f(x_0)}{G(x_0)}$ avec : $g(x) = (x - x_0)^k G(x)$. Enfin si x_0 est racine multiple complexe d'ordre k par association à la racine imaginaire conjuguée $\bar{x}_0$ on introduit dans la forme U k carrés négatifs et k carrés positifs. On pressent ici la relation qui doit exister entre la théorie précédente et la théorie des indices qui tient compte du changement de signe de $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ lorsque x traverse x_0. Nous avions cependant utilisé [6] une autre méthode pour montrer l'intérêt de la forme U ce qui nous avait conduit à la convention de signe explicitée ci-dessus (voir 13°) et que nous conserverons dans le présent mémoire.

13° Plus particulièrement, si l'on veut étudier le signe des parties réelles des racines de $P(z) = 0$ on utilise en supposant le polynôme P normalisé :

$$P(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y) \qquad P(iy) = u(o, y) + iv(o, y) = u(y) + iv(y)$$

avec la convention :

$$p \equiv 0 \ (4) : u = g(y) \quad v = -r_0(y) \ ; \quad p \equiv 2 \ (4) : -u = g(y) \quad v = r_0(y)$$

$$p \equiv 1 \ (4) : v = g(y) \quad u = r_0(y) \ ; \quad p \equiv 3 \ (4) : v = -g(y) \quad u = -r_0(y)$$

et on montre que $P(z)$ est de Hurwitz si et seulement si l'une des conditions suivantes est satisfaite (au choix) :

1) la suite 1, d_1, d_2, ... d_p ne comporte que des permanences,

2) la première colonne du schéma de Routh à $p + 1$ termes correspondant à $f(y) = r_0(y)$ et à $g(y)$ ne comporte que des coefficients positifs.

3) la forme quadratique U est définie positive

4) la suite de Sturm formée à partir de $f(x)$ et de $g(x)$ par la méthode du p.g.c.d. ne comporte que des variations : $N(-\infty) - N(+\infty) = p$

5) l'équation $M(\lambda) = 0$ obtenue par l'élimination de y entre les équations $f(y) - \lambda g'(y) = 0$ et $g(y) = 0$ a toutes ses racines positives.

14° Dans l'étude générale de la situation dans le plan complexe des racines de $P(z) = 0$ on utilisera la méthode de la forme quadratique de la manière suivante :

a) Former $r_0(y)$ et $g(y)$ avec la convention explicitée au 13°,

b) Effectuer la division euclidienne généralisée de $f(y) = r_0(y)$ par $g(y)$ et expliciter M_f, L_f et les d_k.

c) Si aucun des d_k n'est nul le nombre des variations de signes de la suite des d_k est égal au nombre des racines de $P(z)$ à partie réelle négative.

d) Si aucun des d_k n'est nul de d_1 jusqu'à d_c inclusivement et si $d_{c+1} = d_{c+2} = ... = d_p = 0$ le p.g.c.d. de $r_0(y)$ et de $g(y)$ est $D(y)$ de degré $p - c$, les α racines réelles de $D(y) = 0$ correspondent aux racines imaginaires pures de $P(z) = 0$, les 2β racines imaginaires (conjuguées deux à deux) de $D(y) = 0$ correspondent à des racines de $P(z) = 0$ symétriques par rapport à l'axe imaginaire du plan complexe $z(\alpha + 2\beta = p - c$ et α et 2β s'obtiennent par la méthode de la forme quadratique appliquée à $\dfrac{D(x)}{d_k}$ et à $\dfrac{D'(x)}{d_k}$.

Soient N_1 le nombre de permanences de la suite 1 ... d_c, P_1 le nombre de variations de cette suite ; $P(z)$ admet :

$P_1 + \beta$ racines à partie réelle positive

$N_1 + \beta$ racines à partie réelle négative

α racines imaginaires pures

e) Si des d_k sont nuls avec $d_p \neq 0$ ou avec $d_c \neq 0$, $d_{c+1} = d_{c+2} = ... d_p = 0$ la signature de U ou de U_c donne les résultats fournis dans les cas non singuliers par les variations et les permanences des signes des d_k soit :

— si $f(y) = r_0(y)$ et $g(y)$ sont premiers entre eux et si U comporte P carrés positifs et N carrés négatifs $(P + N = p)$ il y a P racines à partie réelle négative et N racines à partie réelle positive,

— si $r_0(y)$ et $g(y)$ admettent $D(x)$ comme p.g.c.d. dans les conditions explicitées ci-dessus en *d*) pour ce p.g.c.d. et si U (ou U_c) admet P carrés positifs et N carrés négatifs $P(z)$ admet :

$N + \beta$ racines à partie réelle positive
$P + \beta$ racines à partie réelle négative
α racines imaginaires pures

et ces derniers résultats ne font que souligner l'intérêt de la méthode de la forme quadratique que nous allons fonder à présent sur la théorie des indices.

II. THEORIE DES INDICES ET CRITERES DE STABILITE

1° **Généralités** ; soit l'intégrale :

$$I = \int_a^b d\left[\operatorname{arctg} \frac{r_0(x)}{g(x)}\right] = \int_a^b \frac{r_0'(x)g(x) - g'(x)r_0(x)}{g^2(x)}\,dx$$

$$= \operatorname{Arc\,tg} \frac{r(b)}{g(b)} - \operatorname{Arc\,tg} \frac{r(a)}{g(a)}$$

que nous venons de calculer en supposant $r_0(x)$ et $g(x)$ premiers entre eux et $g(x)$ n'admettant aucun zéro sur $[a, b]$.

On sait que si $g(x)$ admet des racines $x_0 \ldots x_j$ sur $[a, b]$; $g(a) \neq 0$ $g(b) \neq 0$ lorsque $g(x)$ traverse une valeur telle que x_0 il faut modifier la valeur obtenue pour I de la manière suivante :

si $\frac{r}{g}$ passe de $+\infty$ à $-\infty$ on pose $\Delta(x_0) = \pi$

si $\frac{r}{g}$ passe de $-\infty$ à $+\infty$ on pose $\Delta(x_0) = -\pi$

si $\frac{r}{g}$ ne change pas de signe on pose $\Delta(x_0) = 0$.

Si x_0 est racine d'ordre k on pose $g(x) = (x - x_0)^k\, G(x)$ d'où :

si $\frac{r(x_0)}{G(x_0)} < 0$ et x_0 racine d'ordre impair $\Delta(x_0) = \pi$

si $\frac{r(x_0)}{G(x_0)} > 0$ et x_0 racine d'ordre impair $\Delta(x_0) = -\pi$

si x_0 est racine d'ordre pair $\Delta(x_0) = 0$

On a alors le résultat général :

$$I = \int_a^b d\left[\operatorname{arc\,tg} \frac{r_0(x)}{g(x)}\right] = \operatorname{Arc\,tg} \frac{r_0(b)}{g(b)} - \operatorname{Arc\,tg} \frac{r_0(a)}{g(a)} + \sum_{i=0}^{i=j} \Delta(x_i)$$

$$\sum_{i=0}^{i=j} \Delta(x_i) = \pi I_a^b\left(\frac{r_0}{g}\right)$$

où le nombre I_a^b est l'*indice de* $\frac{r}{g}$ entre a et b. On connaît d'autre part la concordance qui existe entre cette théorie et les variations de signes de la suite de Sturm formée à l'aide de l'algorithme d'Euclide appliqué à $r_0(x)$ et $g(x)$ car :

$$N(b) - N(a) = I_a^b\left(\frac{r_0}{g}\right)$$

En particulier sur $]-\infty, +\infty[$ on a :

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} d\left(\operatorname{arc\,tg}\frac{r_0(x)}{g(x)}\right) = \Sigma\Delta(x_i) = I_{-\infty}^{+\infty}$$

la sommation étant étendue à toutes les racines réelles de $g(x)$.

Dans ce dernier cas les résultats du paragraphe précédent montrent que :

$$I_{-\infty}^{+\infty} = \pi(N - P)$$

N et P désignant respectivement le nombre de carrés négatifs et le nombre de carrés positifs de la forme $U(t_0 ... t_{p-1})$. Par exemple, si nous supposons que $g(x)$ a ses racines deux à deux distinctes la suite de Sturm formée avec les polynômes $g(x)$ et $g'(x)$ nous conduit à voir que le nombre des racines réelles de $g(x)$ et de $g'(x)$ est égal au nombre des variations de la suite pour $-\infty$ diminué du nombre de variations de la suite pour $+\infty$; autrement dit le nombre de racines réelles de $g(x) = 0$ est égal à $-I_{-\infty}^{+\infty}$ ou encore à l'excès du nombre de carrés positifs de la forme U sur le nombre de carrés négatifs de cette forme U. Nous allons obtenir une interprétation tout à fait similaire dans le plan complexe.

2° Lemmes :

a) on considère l'intégrale : $(X > 0)$

$$\int_{-X}^{+X} \frac{F(x)}{G(x)}\, dx = \int_0^X \left[\frac{F(x)}{F(x)} + \frac{F(-x)}{G(-x)}\right] dx \; ; [F(x),\ G(x) \in R(x)]$$

où le degré de $F(x)$ est strictement inférieur au degré k de $G(x)$ et $G(x)$ n'admettant aucune racine réelle. L'intégrale :

$$\int_0^{+\infty} \left[\frac{F(x)}{G(x)} + \frac{F(-x)}{G(-x)}\right] dx$$

a un sens car $F(x)G(-x) + G(x)F(-x)$ est de degré $2k-2$ au plus et $G(x)G(-x)$ est de degré $2k$ strictement. Nous noterons cette intégrale :

$$\lim_{X\to+\infty} \int_{-X}^{+X} \frac{F(x)}{G(x)}\, dx$$

b) en particulier si $G(x)$ est un polynôme normalisé n'admettant aucune racine réelle :

$$\int_{-X}^{+X} \frac{G'(x)}{G(x)}\, dx = \int_{0}^{X} \left[\frac{G'(x)}{G(x)} + \frac{G'(-x)}{G(-x)}\right] dx = [\text{Log } G(x))]_{-X}^{+X}$$

d'où :

$$\lim_{X \to +\infty} \int_{-X}^{+X} \frac{G'(x)}{G(x)}\, dx = 0$$

c) on considère l'intégrale :

$$\int_{-X}^{+X} \frac{M'(x) + iN'(x)}{M(x) + iN(x)}\, dx$$

$$= \int_{-X}^{+X} \frac{P'(x)}{P(x)}\, dx \; ; \; [M(x), N(x) \in R(x)] \; ; \; P(x) = M(x) + iN(x)$$

$$P'(x) = M'(x) + iN'(x)$$

$M(x)$ et $N(x)$ sont supposés premiers entre eux. On a :

$$\int_{-X}^{+X} \frac{P'(x)}{P(x)}\, dx = \int_{-X}^{+X} \frac{\bar{P}(x)P'(x)}{\bar{P}(x)P(x)}\, dx = \int_{-X}^{+X} \frac{R_e\bar{P}(x)P'(x)}{\bar{P}(x)P(x)}\, dx$$

$$+ i \int_{-X}^{+X} \frac{\Im\bar{P}(x)P'(x)}{\bar{P}(x)P(x)}\, dx$$

$R_e\bar{P}(x)P'(x)$ et $\Im\bar{P}(x)P'(x)$ désignent respectivement les parties réelles et imaginaires de $\bar{P}(x)P'(x)$. On voit que les dernières intégrales satisfont aux conditions de *a*) d'où :

$$\lim_{X \to +\infty} \int_{-X}^{+X} \frac{P'(x)}{P(x)}\, dx = U + iV \qquad |U| < +\infty \; ; \; |V| < +\infty$$

3° Application aux critères de stabilité.

Considérons dans le plan complexe orienté le cercle C de centre O de rayon R choisi suffisamment grand pour que toutes les racines de $P(z) = 0$ soient à l'intérieur du cercle et désignons par C_1^+ le demi-cercle orienté BCD parcouru dans le sens direct de B vers C, par C_2^+ le demi-cercle DAB parcouru également de D vers B.

Supposons d'autre part que $P(z)$ n'admette aucune racine nulle, ni aucune racine imaginaire pure et enfin qu'aucun couple de ses racines ne soit symétrique par rapport à Oy. Désignons enfin par N_g le nombre de zéros de $P(z)$ à partie réelle négative et par N_d le nombre de zéros de $P(z)$ à partie réelle positive chacun étant compté avec son ordre de multiplicité. On a d'après un théorème classique de la théorie des résidus :

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\overset{+}{C_1}+\overrightarrow{DB}} \frac{P'(z)}{P(z)}\,dz = N_g \qquad \frac{1}{2\pi i}\int_{\overset{+}{C_2}+\overrightarrow{BD}} \frac{P'(z)}{P(z)}\,dz = N_d$$

et :

$$N_g - N_d = \frac{1}{2\pi i}\int_{\overset{+}{C_1}-\overset{+}{C_2}+2\overrightarrow{DB}} \frac{P'(z)}{P(z)}\,dz$$

où $\overrightarrow{DB}$, $\overrightarrow{BD}$ désignent les segments de l'axe imaginaire sur lesquels on a effectué l'intégration dans le sens correspondant à la notation vectorielle.

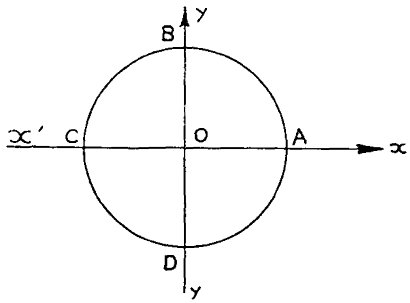

Figure 1

On a d'autre part lorsque le rayon du cercle C tend vers l'infini en supposant $P(z)$ de degré p :

$$\frac{P'(z)}{P(z)} = \frac{p}{z} + \frac{\varepsilon(z)}{z^2} \qquad \lim_{|z|\to+\infty} \varepsilon(z) = \alpha < +\infty$$

d'où :

$$\lim_{R\to\infty}\int_{\overset{+}{C_1}} \frac{P'(z)}{P(z)}\,dz = \lim \int_{\overset{+}{C_2}} \frac{P'(z)}{P(z)}\,dz = p\pi$$

et :

$$N_g - N_d = \frac{1}{2\pi i}\cdot 2i\cdot \lim_{X\to+\infty}\int_{-X}^{+X} \frac{P'(iy)}{P(iy)}\,dy$$

$$= \frac{1}{\pi i}\lim_{X\to\infty} \operatorname{Log}\,[u(y) + iv(y)]_{-X}^{+X}$$

En conservant la convention de signe du paragraphe I, n° 13 nous sommes amenés à étudier les 4 cas envisagés pour p. Nous n'examinerons ici que le cas $p \equiv 0 \pmod{4}$ les autres éventualités s'étudiant d'une manière tout à fait analogue. On a :

$$N_g - N_d = \frac{1}{\pi i}\lim_{X\to+\infty}\,[\operatorname{Log} g(y) - ir_0(y)]_{-X}^{+X} = \frac{1}{\pi i}\lim_{X\to+\infty}\,[\omega - i\theta]_{-X}^{+X}$$

On pose :

$$g(y) - ir_0(y) = e^{\omega - i\theta} = e^{\omega}(\cos\theta - i\sin\theta)$$

$$g(y) = e^{\omega}\cdot\cos\theta, \quad r_0(y) = e^{\omega}\cdot\sin\theta, \quad \frac{r_0(y)}{g(y)} = \operatorname{tg}\theta \quad \theta = \operatorname{arc\,tg}\cdot\frac{r_0(y)}{g(y)}$$

D'autre part le degré de $r_0(y)$ étant inférieur au degré de $g(y)$ on a :

$$\omega = \operatorname{Log}\sqrt{g^2(y) + r_0^2(y)}\,; \lim_{X\to+\infty}[\omega]_{-X}^{+X}$$

$$= \lim_{X\to+\infty} \operatorname{Log}\frac{\sqrt{g^2(X) + r_0^2(X)}}{\sqrt{g^2(-X) + r_0^2(-X)}} = 0$$

car $\operatorname{Log}\dfrac{\sqrt{g^2(X) + r_0^2(X)}}{\sqrt{g^2(-X) + r_0^2(-X)}}$ se comporte au voisinage de l'infini comme $\operatorname{Log}\left|\dfrac{g(X)}{g(-X)}\right|$

D'où :

$$\boxed{N_g - N_d = \left[-\frac{1}{\pi}\operatorname{arc\,tg}\theta\right]_{-\infty}^{+\infty} = -I_{-\infty}^{+\infty}}$$

Cette dernière formule constitue donc une nouvelle preuve de la validité des relations obtenues au paragraphe précédent entre la signature de U et les signes des rapports $\dfrac{f(x_i)}{G_i(x_i)}$.

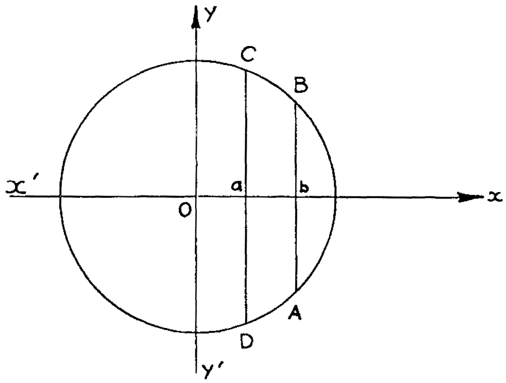

Figure 2

Il est tout aussi facile de justifier l'emploi des suites de Sturm par un découpage du plan complexe en bandes dont les frontières sont parallèles à l'axe imaginaire. Considérons le contour ci-contre $ABCD$ parcouru dans le sens direct $P(z)$ n'admettant ni racines situées sur CD ou sur AB, ni couples de racines symétriques par rapport à BA ou par rapport à CD.

Si nous tenons compte du fait que les intégrales sur les arcs CB et AD s'annulent lorsque R devient infini on a, en désignant par σ le nombre de zéros de $P(z)$ situés à l'intérieur du contour $ABCD$, chacun étant compté avec son ordre de multiplicité :

$$\sigma = \frac{1}{2\pi i}\int_{ABCD}\frac{P'(z)}{P(z)}\,dz = \frac{\lim\limits_{X_2\to+\infty}}{2\pi i}\int_{-X_2}^{+X_2}\frac{P'(z_2)}{P(z_2)}\,dz_2 - \frac{\lim\limits_{X_1\to+\infty}}{2\pi i}\int_{-X_1}^{+X_1}\frac{P'(z_1)}{P(z_1)}\,dz_1$$

avec $z_1 = a + iy \quad z_2 = b + iy \quad a < b$

On en déduit l'interprétation suivante que nous fournissons relativement à la méthode de la forme quadratique :

a) On forme : $P(a + iy) = u(y) + iv(y)$, $P(b + iy) = u_1(y) + iv_1(y)$.

b) On associe (§1, 13°) à $P(a + iy)$ les polynômes $f(y)$ et $g(y)$, à $P(b + iy)$ les polynômes $f_1(y)$ et $g_1(y)$ ce qui conduit aux formes quadratiques U pour f et g et U_1 pour f_1 et g_1. Désignons par E l'excès du nombre de carrés positifs de la forme U sur le nombre de carrés négatifs de cette même forme, par E_1 l'excès relatif à U_1. Le nombre de racines situées dans la bande $ABCD$ $(a < x < b)$ est égal à $\frac{E_1 - E}{2}$.

Dans le cas où $f(y)$ et $g(y)$ ne sont pas premiers entre eux et où $f_1(y)$ et $g_1(y)$ ne sont pas premiers entre eux en utilisant leurs p.g.c.d. normalisés $D(y)$ et $D_1(y)$ on opère sur les couples :

$$\frac{f(y)}{D(y)} \text{ et } \frac{g(y)}{D(y)} \quad ; \quad \frac{f_1(y)}{D_1(y)} \text{ et } \frac{g_1(y)}{D_1(y)}$$

On peut d'ailleurs trouver les propositions précédentes en utilisant simplement les résultats obtenus dans la séparation des racines relativement à l'axe imaginaire par des translations d'axes. Désignons en effet par δ et δ_1 respectivement les nombres de racines réelles de $D(y)$ et $D_1(y)$ et par 2β et $2\beta_1$ les nombres de racines imaginaires de ces deux polynômes. Soient P et N les nombres de carrés positifs et négatifs de U (ou de U_c) et P_1 et N_1 les nombres de carrés positifs et négatifs de U_1 (ou de U_{1c}). On voit que : $P + \beta$ racines sont à gauche de CD et $N + \beta$ à droite,

$P_1 + \beta_1$ racines sont à gauche de AB et $N_1 + \beta_1$ à droite.

En passant de a à b (b exclus) il y a un excès de $P_1 + \beta_1 - P - \beta - \delta$ et en passant de b à a (a exclus) il y a un excès de $N + \beta - N_1 - \beta_1 - \delta_1$ d'où en désignant par k le nombre de racines appartenant à la bande :

$$k = N - N_1 + \beta - \beta_1 - \delta_1 = P_1 - P + \beta_1 - \beta - \delta$$

On a également :

$$p = P + N + \delta + 2\beta = P_1 + N_1 + \delta_1 + 2\beta_1$$

et $k = \frac{(P_1 - N_1) - (P - N) - \delta - \delta_1}{2}$.

On en déduit la *règle pratique* :

soient E et E_1 les excès des nombres de carrés positifs sur les nombres de carrés négatifs des formes U et U_1 ; δ et δ_1 les nombres des racines réelles comptées avec leur ordre de multiplicité des polynômes $D(x)$ et $D_1(x)$ p.g.c.d. respectifs de f et g et de f_1 et g_1, le nombre k de racines situées dans la bande $a < x < b$ est :

$$k = \frac{E - E_1 - \delta - \delta_1}{2}$$

et le nombre k_1 de racines situées dans la bande $a \leqslant x \leqslant b$ est :

$$k_1 = \frac{E_1 - E + \delta + \delta_1}{2}$$

1° **Exemple :** $P(z) = (z^4 + 4)(z^2 + 1) = z^6 + z^4 + 4z^2 + 4$. On veut déterminer les racines situées dans la bande $0 < x < 1$. On forme :

$$P(iy) = -y^6 + y^4 - 4y^2 + 4 \qquad g(y) = y^6 - y^4 + 4y^2 - 4 \qquad f(y) \equiv 0$$

les racines sont deux à deux symétriques par rapport à Oy ou situées sur cet axe car le p.g.c.d. de $g(y)$ et de $f(y)$ est $g(y)$. On détermine le nombre de racines réelles de $g(y)$ en appliquant la méthode de la forme quadratique à $g(y)$ et à $\dfrac{g'(y)}{2} = 3y^5 - 2y^3 + 4y$.

On a :

$$\begin{array}{r|l}
3y^5 - 2y^3 + 4y & \underline{y^6 - y^4 + 4y^2 - 4} \\
\underline{-3y^5 + 3y^3 - 12y + \frac{12}{y}} & \frac{3}{y} + \frac{1}{y^3} - \frac{7}{y^5} \\
y^3 - 8y + \frac{12}{y} & \\
\underline{-y^3 + y - \frac{4}{y} + \frac{4}{y^3}} & \\
-7y + \frac{8}{y} + \frac{4}{y^3} & \\
\underline{7y - \frac{7}{y} + \frac{28}{y^3} - \frac{28}{y^5}} & \\
\frac{1}{y} + \frac{32}{y^3} - \frac{28}{y^5} &
\end{array}$$

$$r_0(y) = 3y^5 - 2y^3 + 4y$$

$$R_1^1(y) = y^4 - 8y^2 + 12$$

$$R'_2(y) = y^5 - 8y^3 + 12y$$

$$R'_3(y) = -7y^4 - 8y^2 + 4$$

$$R'_4(y) = -7y^5 + 8y^3 + 4y$$

$$R'_5(y) = y^4 + 32y^2 - 28$$

$$M_f = \begin{Vmatrix} 3 & 0 & -2 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -8 & 0 & 12 \\ 1 & 0 & -8 & 0 & 12 & 0 \\ 0 & -7 & 0 & 8 & 0 & 4 \\ -7 & 0 & 8 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 32 & 0 & -28 \end{Vmatrix}$$

On a la suite :

$$1 ; d_1 > 0 ; d_2 > 0 ; d_3 < 0 ; d_4 > 0 ; d_5 > 0 ; d_6 > 0$$

Il y a deux variations, donc deux carrés négatifs pour la forme U associée à $g(y)$ et à $g'(y)$ ce qui correspond à 4 racines imaginaires, donc à deux racines réelles pour $g(y)$. On a les résultats : $p = N = E = 0$; $\delta = 2$

Formons ensuite :

$$P(1 + iy) = -y^6 + 6iy^5 + 16y^4 - 24iy^3 - 25y^2 + 18iy + 10$$

$$g_1(y) = y^6 - 16y^4 + 25y^2 - 10 \qquad \frac{f_1(y)}{6} = y^5 - 4y^3 + 3y$$

La division généralisée de $f_1(y)$ par $g_1(y)$ conduit à :

$$\begin{array}{l|l} y^5 - 4y^3 + 3y & y^6 - 16y^4 + 25y^2 - 10 \\ \hline -y^5 + 16y^3 - 25y + \dfrac{10}{y} & \dfrac{1}{y} + \dfrac{12}{y^3} + \dfrac{170}{y^5} \\ \hline 12y^3 - 22y + \dfrac{10}{y} & \\ -12y^3 + 192y - \dfrac{300}{y} + \dfrac{120}{y^3} & \\ \hline 170y - \dfrac{290}{y} + \dfrac{120}{y^3} & \\ -170y + \dfrac{2720}{y} - \dfrac{4250}{y^3} + \dfrac{1700}{y^5} & \\ \hline \dfrac{2430}{y} - \dfrac{4130}{y^3} + \dfrac{1700}{y^5} & \end{array}$$

$$r_0(y) = y^5 - 4y^3 + 3y$$

$$R'_1(y) = 12y^4 - 22y^2 + 10$$

$$R'_2(y) = 12y^5 - 22y^3 + 10y$$

$$R'_3(y) = 170y^4 - 290y^2 + 120$$

$$R'_4(y) = 170y^5 - 290y^3 + 120y$$

$$R'_5(y) = 2430y^4 - 4130y^2 + 1700$$

$$M = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & -4 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 12 & 0 & -22 & 0 & 10 \\ 12 & 0 & -22 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & 170 & 0 & -290 & 0 & 0 \\ 170 & 0 & -290 & 0 & 120 & 0 \\ 0 & 2430 & 0 & -4130 & 0 & 1700 \end{Vmatrix}$$

On a la suite :

1 ; $d_1 = 1$; $d_2 = 12$; $d_3 = 12 \times 26$; $d_4 = 26\,[12 \times 190 + 22 \times 170] > 0$; $d_5 = d_6 = 0$, le p.g.c.d. de f_1 et g_1 est :

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -4 & 3y \\ 0 & 12 & 0 & -22y^2 + 10 \\ 12 & 0 & -22 & 10y \\ 0 & 170 & 0 & -290y^2 + 120 \end{vmatrix} = 26 \times 260(y^2 - 1)$$

donc $P_1 = 4 \quad N_1 = 0 \quad E_1 = P_1 = N_1 = 4 \quad \delta_1 = 2$

et $h = \dfrac{E_1 - E - \delta - \delta_1}{2} = \dfrac{4 - 2 - 2}{2} = 0$

l'équation proposée n'admet aucune racine dans la bande $0 < x < 1$

2° **Exemple :** Nombre de racines de l'équation $(z^2 - 1)(z^2 + z + 1) = z^4 + z^3 - z - 1 = 0$ situées dans la bande $-1 < x < 0$ du plan complexe.

On calcule $P(iy) = y^4 - iy^3 - iy - 1 \quad g_1(y) = y^4 - 1 \quad f_1(y) = y^3 + y$

La division euclidienne généralisée donne :

$$\begin{array}{l|l} y^3 + y & y^4 - 1 \\ \cline{2-2} -y^3 \qquad + \frac{1}{y} & \frac{1}{y} \\ \cline{1-1} y + \frac{1}{y} & \end{array}$$

$$r_0(x) = y^3 + y$$

$$R'_1(x) = y^2 + 1$$

$$R'_2(x) = y^3 + y$$

$$R'_3(x) = y^2 + y$$

d'où :

$$M_{f_1} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{Vmatrix}$$

on a $d_1 = 1$, $d_2 = 1$, $d_3 = d_4 = 0$; $c = 2$, U_{1c} admet 2 carrés positifs, le p.g.c.d. est :

$$\begin{vmatrix} 1 & y \\ 0 & y^2 + 1 \end{vmatrix} = y^2 + 1$$ et n'admet aucune racine réelle $\delta_1 = 0$; $E_1 = 2$

$$P(-1 + iy) = y^4 + 3iy^3 - 3y^3 - 2iy$$

$$g(y) = y^4 - 3y^2 \qquad f(y) = -3y^3 + 2y$$

La division euclidienne généralisée conduit à :

$$\begin{array}{l|l} -3y^3 + 2y & y^4 - 3y^2 \\ \cline{2-2} \underline{3y^3 - 9y} & -\frac{3}{y} - \frac{7}{y^3} \\ \quad -7y & \\ \quad \underline{+7y - \frac{21}{y}} & \\ \qquad -\frac{21}{y} & \end{array}$$

$$\begin{aligned} r_0(x) &= -3y^3 + 2y \\ R'_1(x) &= -7y^2 \\ R'_2(x) &= -7y^3 \\ R'_4(x) &= -21y^2 \end{aligned}$$

On a la suite

$$1, d_1 = -3 \; ; d_2 = 21 \; ; d_3 = -98 \; ; d_4 = 0$$

donc $D(x)$ du premier degré, la forme quadratique U_c admet 3 carrés négatifs

$$E = -3, \quad \delta = 0 \quad h = \frac{2 - (-3) - 1}{2} = 2 \quad h_1 = \frac{2 - (-3) + 1}{2} = 3$$

il y a deux racines situées dans la bande $-1 < x < 0$ et trois racines dans la bande $-1 \leqslant x \leqslant 0$

3° **Exemple :** Dans les 2 exemples précédents on aurait pu employer les schémas de Routh, voici un exemple où il n'en est pas ainsi. On veut situer les racines de $z^4 + i$ situées dans la bande $0 < x < 1$

$P(iy) = y^4 + i \quad g(y) = y^4 \quad f(y) = -1$. La division euclidienne généralisée est immédiate et donne les restes : $-1, -x, -x^2, -x^3$ d'où :

$$M = L = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}$$

$$U(t_0, t_1, t_2, t_3) = -(2t_0t_3 + 2t_1t_2) =$$
$$-\frac{(t_0 + t_3)^2}{2} + \frac{(t_0 - t_3)^2}{2} - \frac{(t_1 + t_3)^2}{2} + \frac{(t_1 - t_3)^2}{2}$$

d'où : $P = 2 \quad N = 2 \quad E = 0 \quad \delta_1 = 0$

$$P(1 + iy) = 1 + i + 4iy - 6y^2 - 4iy^3 + y^4 \quad g(y) = y^4 - 6y^2 + 1$$
$$f(y) = 4y^3 - 4y - 1$$

d'où la division euclidienne généralisée de $f(y)$ par $g(y)$:

$$\begin{array}{l|l}
4y^3 - 4y - 1 & y^4 - 6y^2 + 1 \\ \hline
-4y^3 + 24y \quad -\frac{4}{y} & \frac{4}{y} + \frac{20}{y^3} \\ \hline
20y - 1 - \frac{4}{y} & \\
-20y \quad + \frac{120}{y} - \frac{20}{y^3} & \\ \hline
-1 + \frac{116}{y} - \frac{120}{y^3} &
\end{array}$$

$$r_0(y) = 4y^3 - 4y - 1$$
$$R'_1(y) = 20y^2 - y - 4$$
$$R'_2(y) = 20y^3 - y^2 - 4y$$
$$R'_3(y) = -y^3 + 116y^2 - 120$$

$$M = \begin{Vmatrix} 4 & 0 & -4 & -1 \\ 0 & 20 & -1 & -4 \\ 20 & -1 & -4 & 0 \\ -1 & 116 & 0 & -20 \end{Vmatrix}$$

On a la suite 1, $d_1 > 0$, $d_2 > 0$, $d_3 > 0$, $d_4 > 0$, $P_1 = 4$, $N_1 = 0$, $E_1 = 4$.

$$k = \frac{E_1 - E - \delta - \delta_1}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

Il y a donc 2 racines comprises dans la bande $0 < x < 1$

III. FORMES MATRICIELLES REMARQUABLES

On considère deux polynômes $f(x)$ et $g(x)$ premiers entre eux.

1° **On suppose les racines de $g(x)$ deux à deux distinctes.** Dans l'espace

$$K^p(x_0 x_1 \dots x_{p-1}) = K_1^p \text{ où } x_0, x_1, \dots, x_{p-1},$$

désignent les racines de $g(x)$ on considère la matrice régulière :

$$\mu = \begin{Vmatrix} x_0^{p-1} & x_0^{p-2} & \dots & x_0 & 1 \\ x_1^{p-1} & x_1^{p-2} & \dots & x_1 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{p-1}^{p-1} & x_{p-1}^{p-2} & \dots & x_{p-1} & 1 \end{Vmatrix} \qquad \det \mu = \prod (x_i - x_j) = \Delta \quad 0 \leqslant i < j \leqslant p-1$$

On vérifie que, m désignant encore la matrice de Frobénius relative à $g(x)$:

$$\mu m = \begin{Vmatrix} x_0^p & x_0^{p-1} & \dots & x_0^2 & x_0 \\ x_1^p & x_1^{p-1} & \dots & x_1^2 & x_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{p-1}^p & x_{p-1}^{p-1} & \dots & x_{p-1}^2 & x_{p-1} \end{Vmatrix}$$

μ^{-1} désignant la matrice inverse de μ et en remarquant que les lignes de μm se déduisent des lignes de μ en multipliant ces dernières respectivement par $x_0, x_1 \dots x_{p-1}$ on a :

$$\mu\mu^{-1} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & ! & 0 \\ 0 & 1 & ! & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & ! & 1 \end{Vmatrix} = I\,; \qquad \mu m \mu^{-1} = \begin{Vmatrix} x_0 & 0 & ! & 0 \\ 0 & x_1 & ! & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & ! & x_{p-1} \end{Vmatrix}$$

Les vecteurs :

$$\vec{V}(x_0) = \sum_{i=0}^{i=p-1} x_0^i \vec{e}_{p-i},$$

$$\vec{V}(x_1) = \sum_{i=0}^{i=p-1} x_1 \vec{e}_{p-i} \dots \vec{V}(x_{p-1}) = \sum_{i=0}^{i=p-1} x_{p-1}^i \vec{e}_{p-i}$$

sont donc les vecteurs propres de la matrice m dont les composantes sont les éléments des lignes de μ.

On a d'autre part :

$$[G_0(x)]_{x=x_0} = \left[\frac{g(x)}{x - x_0}\right]_{x=x_0} = G_0(x_0) \neq 0 \ldots$$

$$[G_i(x)]_{x=x_i} = \left[\frac{g(x)}{x - x_i}\right]_{x=x_i} = G_i(x_i) \neq 0$$

et $G_i(x_j) = 0$ pour $i \neq j$

La division de $g(x)$ par $x - x_0$ suivant les puissances croissantes conduit à :

$$G_0(x) = x^{p-1} + (x_0 - b_1)x^{p-2} + (x_0^2 - b_1x_0 - b_2)x^{p-3} + \ldots x_0^{p-1} - b_1x_0^{p-2} \ldots - b_{p-1}$$

On considère donc les vecteurs $\overrightarrow{W}(x_i)$ définis par :

$$G_i(x_i)\vec{W}(x_i) = \vec{e}_1 + \vec{e}_2(x_i - b_1) + \ldots \vec{e}_p(x_0^{p-1} - b_1x_0^{p-2} \ldots - b_{p-1})$$

On a $\quad \vec{W}(x_i) \cdot \vec{V}(x_i) = 1 \qquad \vec{W}(x_i) \cdot \vec{V}(x_j) = 0 \qquad (i \neq j)$

et on vérifie que $m\overrightarrow{W}(x_i) = x_i\overrightarrow{W}(x_i)$; les vecteurs $\overrightarrow{W}(x_i)$ sont donc les vecteurs propres de la matrice m, leurs composantes sont les éléments des colonnes de μ^{-1}.

On obtient ainsi relativement à la matrice m la matrice modale μ dont les vecteurs lignes sont les $\overrightarrow{V_i}$ et la matrice modale μ^{-1} dont les vecteurs colonnes sont les $\overrightarrow{W}(x_i)$ avec la condition de normalisation :

$$\overrightarrow{W}(x_i) \cdot \overrightarrow{V}(x_i) = 1.$$

D'autre part, de :

$$\mu m \mu^{-1} = \left\|\begin{matrix} x_0 & 0 & ! & 0 \\ 0 & x_1 & ! & 0 \\ 0 & 0 & ! & x_{p-1} \end{matrix}\right\| = m_r$$

on tire d'après une propriété classique :

$$\mu f(m) \mu^{-1} = \left\|\begin{matrix} f(x_0) & 0 \ \ldots & 0 \\ 0 & f(x_1) \ldots & 0 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot \\ 0 & 0 \ \ldots & f(x_{p-1}) \end{matrix}\right\| = f(m_r) \ ;$$

$$\mu \frac{f(m)}{g'(m)} \mu^{-1} = \left\| \begin{matrix} \frac{f(x_0)}{g'(x_0)} & 0 & \dots 0 \\ 0 & \frac{f(x_1)}{g'(x_1)} & \dots 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots \frac{f(x_{p-1})}{g'(x_{p-1})} \end{matrix} \right\| = \frac{f(m_r)}{g'(m_r)}$$

La matrice

$$\mu_T \frac{f(m_r)}{g(m_r)} \mu = \mu_T \mu \frac{f(m)}{g(m)} = \left\| \begin{matrix} \Sigma x_i^{2P-2} \frac{f(x_i)}{g'(x_i)} & \dots & \Sigma x_i^{p-1} \frac{f(x_i)}{g'(x_i)} \\ \dots & \dots & \dots \\ \Sigma x_i^{p-1} \frac{f(x_i)}{g'(x_i)} & \dots & \Sigma \frac{f(x_i)}{g'(x_i)} \end{matrix} \right\|$$

est une matrice symétrique H que l'on obtient en effectuant une symétrie sur la matrice L (voir § 1) par rapport à son centre ou par rapport à sa diagonale secondaire. Il suffira d'écrire les variables dans leur ordre inverse pour obtenir la même forme quadratique $U(t_{p-1}, t_{p-2} \dots t_1, t_0)$ qu'au paragraphe I.

On a obtenu [6 p. 7] :

$$H = \mu_T \mu \frac{1}{g'(m)} f(m), \qquad \mu_T \mu \frac{1}{g'(m)} = \mu_T \frac{1}{g'(m_r)} \mu$$

ces résultats montrent que la forme quadratique $U(t_{p-1} t_{p-2} \dots t_0)$ est ramenée à sa forme diagonale si l'on pose :

$$z_i = \sum_{j=1}^{j=p} x_i^{p-j} t_{p-j} \; ; \; U(z_0, z_1 \dots z_{p-1}) = \Sigma z_i^2 \frac{f(x_i)}{g'(x_i)}$$

ce que l'on peut traduire par :

$$u = \left\| t_{p-1}, t_{p-2} \dots t_0 \right\| \cdot \mu_T \cdot \left\| \begin{matrix} \frac{f(x_0)}{g'(x_0)} & 0 & \dots 0 \\ 0 & \frac{f(x_1)}{g'(x_1)} & \dots 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots \frac{f(x_{p-1})}{g'(x_{p-1})} \end{matrix} \right\| \mu \left\| \begin{matrix} t_{p-1} \\ t_{p-2} \\ \vdots \\ \vdots \\ t_0 \end{matrix} \right\|$$

On pourra étudier (6 chap. I) les importantes conséquences que l'on peut tirer de ces formes matricielles remarquables. Nous nous proposons dans ce qui suit de trouver des formes matricielles des résultats relatifs à la division euclidienne généralisée et à la forme U dans le cas où les racines de $g(x)$ ne sont pas toutes distinctes.

2° $g(x)$ admet des racines multiples.

a) *Définitions et lemmes*

1. — Nous appellerons *dérivée pondérée d'ordre j* d'une fonction scalaire ou vectorielle le quotient de la dérivée d'ordre j de cette fonction par j !

2. — Les résultats relatifs à la dérivée ordinaire se transposent facilement à l'aide de cette notion. On obtient notamment les résultats suivants relatifs à la formule de Leibniz où la dérivée pondérée d'ordre j d'une fonction f est désignée par $\overset{j}{f}$:

$$(1) \qquad \overset{n}{(uv)} = \overset{n}{u}\overset{0}{v} + \overset{n-1}{u}\overset{1}{v} + \ldots + \overset{n-p}{u}\overset{p}{v} + \ldots + \overset{0}{u}\overset{n}{v}$$

$$(2) \qquad \overset{n}{(uvw)} = \Sigma \overset{i}{u}\overset{j}{v}\overset{k}{w} \qquad \forall\, i, \forall\, j$$

$$\text{et} \qquad \forall\, k \in 0, 1 \ldots n \text{ tels que } i + j + k = n$$

La démonstration se réduit à une simple vérification ; en introduisant un produit scalaire dans l'espace K_1^p u, v peuvent désigner des fonctions vectorielles dans (1), deux des trois fonctions u, v, w peuvent désigner des fonctions vectorielles dans (2).

b) *Réduction de m* : 1. Soit x_0 une racine d'ordre j de $g(x) = 0$; x_j la racine que l'on considère immédiatement après et que l'on suppose d'ordre s.

On a relativement à l'opérateur φ de matrice image m par rapport à la base canonique de K_1^p

$$\varphi[\vec{V}(x_0)] = x_0\vec{V}(x_0)$$

Considérons un nombre x_1 voisin de x_0 et racine d'une équation $g_1(x) = 0$ déduite de $g(x) = 0$ par modification de l'une des racines x_0 seulement, les j-1 autres racines restant égales à x_0. On a :

$$(3) \qquad \begin{aligned} \varphi_1[\vec{V}(x_0)] &= x_0\vec{V}(x_0) \\ \varphi_1[\vec{V}(x_1)] &= x_1\vec{V}(x_1) \end{aligned}$$

et compte tenu de la linéarité de l'opérateur φ_1 :

$$\varphi_1\left[\frac{\vec{V}(x_0) - \vec{V}(x_1)}{x_0 - x_1}\right] = \frac{x_0\vec{V}(x_0) - x_1\vec{V}(x_1)}{x_0 - x_1}$$

et par passage à la limite :

$$\varphi[\vec{V}'(x_0)] = x_0\vec{V}'(x_0) + \vec{V}(x_0)$$

Autrement dit la dérivation de (3) consiste dans le premier membre en une dérivation sur $\vec{V}$, dans le 2e membre en une dérivation sur $x_0\vec{V}$. Pour les dérivations suivantes nous appliquons la formule de Leibniz relative aux dérivées pondérées :

$$\varphi[\vec{V}^{k}(x_0)] = x_0\vec{V}^{k}(x_0) + \vec{V}(x_0)^{k-1} \tag{4}$$

Remarque : La théorie ci-dessus est valable pour toute matrice ; elle coïncide exactement avec la théorie des vecteurs principaux et en permet une exposition commode ; dans le cas d'un vecteur caractéristique le deuxième vecteur du second membre de (4) est identiquement nul, ce qui ne se produit jamais ici car la matrice m est non dérogatoire. On le vérifie d'ailleurs directement.

2. — La matrice formée avec les vecteurs lignes $\vec{V}(x_0)\vec{V}^1(x_0)$ ... $\vec{V}^{j-1}(x_0)$ $\vec{V}(x_j)$ $\vec{V}^1(x_j)$ ... est une matrice régulière μ_1. On démontre cette propriété à partir de la matrice μ.

On a :

$$\begin{aligned}\Delta = \det \mu = (x_0 - x_1)(x_0 - x_2)(x_0 - x_3) \dots (x_0 - x_{p-1}) \\ (x_1 - x_2)(x_1 - x_3) \dots (x_1 - x_{p-1}) \\ (x_2 - x_3) \dots (x_2 - x_{p-1}) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ (x_{p-2} - x_{p-1})\end{aligned}$$

μ_1 se déduit de μ :

en formant la dérivée pondérée première de dét μ par rapport à x_1 ce qui revient à remplacer $\vec{V}(x_1)$ par $\vec{V}^1(x_1)$ dans les vecteurs lignes de μ puis on pose $x_1 = x_0$; soit μ_1^1 la matrice obtenue.

en formant la dérivée pondérée seconde de dét μ_1^1 par rapport à x_2 ce qui revient à remplacer $\vec{V}(x_2)$ par $\vec{V}^2(x_2)$ dans les vecteurs lignes de μ_1^1, on pose ensuite $x_2, = x_0$; soit μ_1^2 la matrice obtenue.

. . . .

en formant la dérivée pondérée $(j-1)^{\text{ième}}$ de det μ_1^{j-2} par rapport à x_{j-1} ce qui revient à remplacer $\vec{V}(x_{j-1})$ par $V^{j-1}(x_{j-1})$ dans les vecteurs lignes de μ_1^{j-2} on pose ensuite $x_{j-1} = x_0$, soit μ_1^{j-1} la matrice obtenue, en conservant la $j^{\text{ième}}$ ligne de μ_1^{j-1} puis en recommençant les dérivations pondérées sur les lignes suivantes comme il vient d'être dit puisque x_j est supposée d'ordre s et on pose ensuite $x_{j+1} = x_j$, $x_{j+2} = x_j$ etc...

On voit que par ce procédé on obtient la matrice μ_1 définie précédemment ; calculons son déterminant. Si nous dérivons Δ écrit comme ci-dessus sous forme de produit, par dérivation par rapport à x_1 puis posant $x_0 = x_1$, on remarque que seule la dérivation portant sur $x_0 - x_1$ est utile, d'où le résultat :

$$\begin{aligned}\det \mu_1^1 = (-1)(x_0 - x_2)^2(x_0 - x_3)^2 \dots (x_0 - x_{p-1})^2 \\ (x_2 - x_3) \dots (x_2 - x_{p-1}) \\ \dots\dots\dots\dots \\ (x_{p-2} - x_{p-1})\end{aligned}$$

le même raisonnement aboutit ensuite à :

$$\begin{aligned}\det \mu_1^2 = (-1)(-1)^2(x_0 - x_3)^3 \dots (x_0 - x_{p-1})^3 \\ \dots\dots\dots\dots \\ (x_{p-2} - x_{p-1})\end{aligned}$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\begin{aligned}\det \mu_1^{j-1} = (-1)(-1)^2 \dots (-1)^{j-1}(x_0 - x_j)^j \dots (x_0 - x_{p-1})^j \\ \dots\dots\dots\dots \\ (x_{p-2} - x_{p-1})\end{aligned}$$

on utilise $1 + 2 + \dots (j - 1) = \dfrac{j(j-1)}{2}$ et on continue ainsi jusqu'à ce que toutes les lignes de la matrice μ aient été modifiées. Finalement si x_0 est racine d'ordre j ; si x_j est racine d'ordre s, x_{j+1} racine d'ordre t ...x_λ racine d'ordre α et x_μ d'ordre β on a :

$$\begin{aligned}\Delta_1 = \det \mu_1 = (-1)^{\frac{j(j-1)}{2}}(-1)^{\frac{s(s-1)}{2}}(-1)^{\frac{j(t-1)}{2}} \\ \dots (-1)^{\frac{\beta(\beta-1)}{2}}(x_0 - x_j)^{js}(x_0 - x_{j+s})^{jt} \\ \dots (x_0 - x_\lambda)^{j\alpha}(x_j - x_{j+s})^{st} \dots (x_\lambda - x_\mu)^{\alpha\beta}\end{aligned}$$

et on démontre bien ainsi que μ_1 est une matrice régulière.

3. — Soient $\overrightarrow{W_1}, \overrightarrow{W_2} \ldots \overrightarrow{W_p}$ les vecteurs colonnes de μ_1^{-1}. En utilisant l'égalité (4) appliquée aux vecteurs dérivées pondérées on voit que :

$$\begin{Bmatrix} \vec{V}(x_0) \\ \vec{V}^1(x_0) \\ \vec{V}^2(x_0) \\ \vdots \\ \vdots \\ \vec{V}^{j-1}(x_0) \\ \vec{V}(x_j) \\ \vec{V}^1(x_j) \\ \vdots \\ \vdots \end{Bmatrix} m = \begin{Bmatrix} x_0\vec{V}(x_0) \\ x_0\vec{V}^1(x_0) + \vec{V}(x_0) \\ x_0\vec{V}^2(x_0) + \vec{V}^1(x_0) \\ \\ \cdots\cdots\cdots \\ x_0\vec{V}^{j-1}(x_0) + \vec{V}^{j-2}(x_0) \\ x_j\vec{V}(x_j) \\ x_j\vec{V}^1(x_j) + \vec{V}(x_j) \\ \cdots\cdots\cdots \\ \\ \end{Bmatrix}$$

Il suffit en effet d'appliquer la règle de multiplication des matrices ou de tenir compte de ce que le vecteur $\vec{V}_j$ de la $j^{\text{ième}}$ ligne de μ_1 est orthogonal à tous les $\overrightarrow{W_i}$ sauf à $\overrightarrow{W_j}$, le produit scalaire $\overrightarrow{W_j}\vec{V}_j$ étant égal à l'unité. On obtient donc une matrice $m_r = \mu_1\, m\, \mu_1^{-1}$ semblable à m et m_r est non dérogatoire comme m puisque cette propriété est commune à toutes les matrices semblables à m ; *m_r est une matrice de Jordan.* On a donc :

$$m_r = \mu_1 m \mu_1^{-1} = \begin{Vmatrix} x_0 & 0 & 0 & 0 \ldots 0 & 0 & \ldots & \\ 1 & x_0 & 0 & 0 \ldots 0 & 0 & \vdots & \\ 0 & 1 & x_0 & 0 \ldots 0 & 0 & \ldots & \\ & & & & & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 \ldots 1 & x_0 & \ldots & \\ 0 & 0 & 0 & 0 \ldots\ldots & x_j & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 \ldots\ldots & 1 & x_j & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdot \end{Vmatrix}$$

Théorème : *Soit m une matrice de Frobénius de polynôme caractéristique $g(x)$; à toute racine x_0 multiple d'ordre j de $g(x)$ on peut associer un vecteur propre $V(x_0)$ et $j - 1$ vecteurs principaux $V^1(x_0) \ldots V^{j-1}(x_0)$ dérivées pondérées successives de $V(x_0)$ jusqu'à l'ordre $j - 1$. En appliquant ce* *procédé à toutes les racines de $g(x)$ on construit une matrice μ_1 qui assure la mise sous forme normale de Jordan de la matrice m.*

4. — **Forme quadratique** $U(t_0, t_1 \dots t_{p-1})$. |On l'obtient par la division euclidienne généralisée sans avoir à considérer les racines de $g(x)$; nous nous proposons seulement d'expliciter les éléments de H compte tenu des résultats ci-dessus.

Considérons :

$$z(x) = x^{p-1} t_{p-1} + x^{p-2} t_{p-2} + \dots + x t_1 + t_0$$

$\varphi(x)$ fonction scalaire de x
et formons l'expression :

$$U(x) = z^2 \varphi = z \varphi z$$

dont nous prenons les dérivées pondérées successives. On a :

$$U^{1}(x) = z^{1} \varphi z + z \varphi^{1} z + z \varphi z^{1}$$

On peut vérifier en introduisant une matrice carrée d'ordre p que :

$$U^{1}(x) = \| z, z^{1}, 0 \;..\; 0 \| \cdot \left\| \begin{matrix} \varphi^{1} & \varphi & 0 \dots \\ \varphi & 0 & 0 \dots \\ 0 & 0 & 0 \dots \\ . & . & . \; . \; . \; . \\ & & \\ & & \end{matrix} \right\| \left\| \begin{matrix} z \\ z^{1} \\ 0 \\ . \\ . \\ . \end{matrix} \right\|$$

Démontrons ensuite par récurrence sur k que :

$$U^{k}(x) = \| z, z^{1}, \dots z^{k}, 0 \dots 0 \| \cdot \left\| \begin{matrix} \varphi^{k} & \varphi^{k-1} \dots \varphi^{1} & \varphi & 0 \dots 0 \\ \varphi^{k-1} & \varphi^{k-2} \dots \varphi & 0 & 0 \dots 0 \\ \vdots & \vdots \quad\; \vdots & \vdots & \vdots \quad \vdots \\ \vdots & \vdots \quad\; \vdots & \vdots & \vdots \quad \vdots \\ \varphi^{1} & \varphi \quad \dots 0 & 0 & 0 \quad 0 \\ \varphi & 0 \quad \dots 0 & 0 & 0 \quad 0 \\ 0 & 0 \quad \dots 0 & 0 & 0 \quad 0 \\ . \; . \; . & . \; . \; . \; . \; . & . \; . & . \; . \; . \; . \\ 0 & 0 \qquad 0 & 0 & 0 \quad 0 \end{matrix} \right\| \cdot \left\| \begin{matrix} z \\ z^{1} \\ \vdots \\ \vdots \\ z^{k} \\ 0 \\ \vdots \\ \\ \\ \end{matrix} \right\|$$

$$\boxed{U^{k}(x) = \| z \dots \| \cdot \| N_k \| \cdot \left\| \begin{matrix} z \\ . \\ . \\ . \end{matrix} \right\|}$$

Pour cela on a par hypothèse :

$$U^{k-1}(x) = \left\| z, z^1 \dots z^{k-1} 0 \dots 0 \right\| \cdot \begin{Vmatrix} \varphi^{k-1} & \varphi^{k-2} & \dots \varphi^1 & \varphi & 0 \dots 0 \\ \varphi^{k-2} & \varphi^{k-3} & \dots \varphi & 0 & 0 \dots 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \varphi^1 & \varphi & \dots 0 & 0 & 0 \dots 0 \\ \varphi & 0 & \dots 0 & 0 & 0 \dots 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots 0 & 0 & 0 \dots 0 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} z \\ z^1 \\ \vdots \\ z^{k-1} \\ 0 \\ \\ 0 \end{Vmatrix}$$

$$\boxed{U^{k-1} = \left\| z \dots \right\| \cdot \left\| N_{k-1} \right\| \cdot \begin{Vmatrix} z \\ \cdot \\ \cdot \end{Vmatrix}}$$

Calculons les dérivées pondérées d'ordre 1 de la ligne $z, z^1 \dots z^{k-1}\ 0 \dots 0$ dans l'expression de U^{k-1}, décalons-les de un rang vers la droite et remplaçons par 0 le premier élément on a donc la ligne $0, z^1 \dots z^{k-1}, z^k\ 0 \dots 0$; si nous décalons toutes les lignes de N_{k-1} d'un rang vers le bas la première ligne étant remplacée par des zéros nous obtiendrons toutes les dérivations sur les facteurs de gauche des produits partiels $z^m \varphi^n z^l (m + n + l = k - 1)$ qui prendront la forme $z^{m+1} \varphi^n z^l$. Pour les dérivations pondérées de droite on décalera les éléments de la matrice colonne de un rang vers le bas après dérivation pondérée soit $\begin{Vmatrix} 0 \\ z^1 \\ \vdots \\ \vdots \\ z^k \end{Vmatrix}$ et il faudra décaler les colonnes de N_{k-1} d'un rang vers la gauche, enfin pour les dérivations portant sur les φ^j il suffit de dériver pondérément les éléments de N_{k-1} ; on voit bien que par ces trois opérations on passe de l'expression de $U^{k-1}(x)$ à celle de $U^k(x)$, ce qui démontre notre proposition. On aurait pu se contenter d'une simple vérification portant sur la dérivation pondérée à l'ordre k d'un produit de trois fonctions.

D'autre part $f(x)$ et $g(x)$ étant supposés premiers entre eux on obtient la décomposition de $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ en éléments simples de 1^re^ espèce :

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{F_j^0}{(x - x_0)^j} + \frac{F_{j-1}^0}{(x - x_0)^{j-1}} + \dots + \frac{F_1^0}{(x - x_0)} + \frac{F_s^j}{(x - x_j)^s} + \frac{F_{s-1}^j}{(x - x_j)^{s-1}} + \dots \frac{F_1^j}{(x - x_j)} + \dots$$

Posons $g(x) = (x - x_0)^j G_0(x) = (x - x_j)^s G_j(x) = \dots = (x - x_\mu)^\beta G_\mu(x)$
On a :

$$F_1^0 = \frac{1}{(j-1)!}\left[\frac{f(x)}{G_0(x)}\right]_{x=x_0}^{(j-1)}$$

$$F_1^j = \frac{1}{(s-1)!}\left[\frac{f(x)}{G_j(x)}\right]_{x=x_j}^{(s-1)} \dots F_1^\mu = \frac{1}{(\beta-1)!}\left[\frac{f(x)}{G(x)}\right]_{x=x_\mu}^{(\beta-1)}$$

et le coefficient directeur du reste de la division euclidienne de $f(x)$ par $g(x)$ est égal à $F_1^0 + F_1^j + \dots + F_1^\mu = A^0_{n-p+1}$

$$A^0_{n-p+1} = \sum \frac{1}{(j-1)!}\left[\frac{f(x)}{G_0(x)}\right]_{x=x_0}^{(j-1)}$$

$$A^0_{n-p+k+1} = \sum \frac{1}{(j-1)!}\left[\frac{x^k f(x)}{G_0(x)}\right]_{x=x_0}^{(j-1)}$$

Or, nous avons vu que :

$$U(t_{p-1}t_{p-2} \dots t_1, t_0) = A^0_{n+p-1}t^2_{p-1} + A^0_{n+p+2}(2t_{p-1}t_{p-2}) + \dots + A^0_{n-p+1}t_0^2$$

Ce qui permet après regroupement des termes d'écrire :

$$U(t_{p-1}, t_{p-2} \dots t_1, t_0) = \sum \frac{1}{(j-1)!}\left[z(x)\,\frac{f(x)}{G_0(x)}\right]_{x=x_0}^{(j-1)} = \sum\left[z(x)\,\frac{f(x)}{G_0(x)}\right]_{x=x_0}^{(j-1)}$$

On tient compte enfin du résultat obtenu pour la matrice $[U(x)]^{\mathbf{k}}$ et on en déduit la possibilité d'écrire la forme quadratique à l'aide de blocs successifs correspondant aux racines $x_0 x_j \dots x_\mu$:

$$\left\|\begin{matrix} A_0 & & \\ & \text{zéros} & \\ & A_j & \\ \text{zéros} & \cdot & \\ & \cdot & A_\mu \end{matrix}\right\| \qquad \begin{matrix} \text{bloc } A_0 \text{ d'ordre } j \\ \\ \text{bloc } A_j \text{ d'ordre } s \\ \dots\dots\dots\dots \\ \text{bloc } A_\mu \text{ d'ordre } \beta \end{matrix}$$

Explicitons l'un de ces blocs par exemple A_0. On a, d'après les résultats précédents :

$$A_0 = \left\|\begin{matrix} \left[\frac{f(x)}{G(x)}\right]_{x=x_0}^{\mathbf{j-1}} \dots & \left[\frac{f(x)}{G(x)}\right]_{x=x_0}^{\mathbf{1}}, & \frac{f(x_0)}{G(x_0)} \\ \left[\frac{f(x)}{G(x)}\right]_{x=x_0}^{\mathbf{j-2}} \dots & \frac{f(x_0)}{G(x_0)} & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{f(x_0)}{G(x_0)} \dots & \dots & 0 \end{matrix}\right\|$$

Nous obtenons donc les trois résultats concernant la forme quadratique U :

(I)

$$U(t_{p-1}t_{p-2}\dots t_1, t_0) = \|t_{p-1}, t_{p-2}\dots t_1, t_0\|\ \mu_{1T}\left\|\begin{matrix} A_0 & & & \text{zéros} \\ & A_j & & \\ & & \cdot & \\ & & \cdot & \\ \text{zéros} & & \cdot & \\ & & & \cdot \\ & & & & A_\mu \end{matrix}\right\| \mu \left\|\begin{matrix} t_{p-1} \\ t_{p-2} \\ \vdots \\ t_1 \\ t_0 \end{matrix}\right\|$$

(II) $$U[z(x_0), \overset{1}{z}(x_0), \overset{2}{z}(x_0)\dots \overset{j-1}{z}(x_0), z(x_j)\dots \overset{\beta-1}{z}(x_\mu)]$$

$$= \|z(x_0), \overset{1}{z}(x_0)\dots \overset{\beta-1}{z}(x_\mu)\| \cdot \left\|\begin{matrix} A_0 & & & \text{zéros} \\ & A_j & & \\ & & \cdot & \\ \text{zéros} & & \cdot & \\ & & & \cdot \\ & & & & A_\mu \end{matrix}\right\| \left\|\begin{matrix} z(x_0) \\ \overset{1}{z}(x_0) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \overset{\beta-1}{z}(x_\mu) \end{matrix}\right\|$$

(III) $$U(t_{p-1}, t_{p-2}\dots t_1, t_0) = \|t_{p-1}t_{p-2}\dots t_1, t_0\| \cdot \|H\| \cdot \left\|\begin{matrix} t_{p-1} \\ t_{p-2} \\ \vdots \\ t_1 \\ t_0 \end{matrix}\right\|$$

(III)′ $$U(t_0, t_1, \dots, t_{p-2}, t_p) = \|t_0, t_1\dots t_{p-2}, t_{p-1}\| \cdot \|L\| \cdot \left\|\begin{matrix} t_0 \\ t_1 \\ \vdots \\ t_{p-2} \\ t_{p-1} \end{matrix}\right\|$$

Signalons que nous avons donné la préférence à la forme (III)′ issue directement de la division euclidienne généralisée mais qu'il peut être parfois plus commode de déterminer la signature de U à partir de (III).

On voit à présent la concordance parfaite qui existe entre la théorie des indices et la méthode de la forme quadratique. La décomposition de la matrice H en blocs symétriques tels que A_0 nous conduit aux résultats suivants :

1° On peut étudier séparément les signatures des divers blocs.

2° Si x_0 est une racine réelle d'ordre impair j nous avons déjà signalé (6, p. 178) que toute matrice régulière et symétrique dont les éléments situés au-dessous de la diagonale secondaire sont nuls est associée à une forme quadratique qui admet une décomposition de type de Gauss en $\frac{j-1}{2}$ carrés positifs et $\frac{j-1}{2}$ carrés négatifs, le dernier carré étant du signe du terme situé au centre de la matrice, soit $\frac{f(x_0)}{G(x_0)}$, ce qui concorde avec le résultat rappelé au début du paragraphe II $[f(x) = r_0(x)]$

3° Si x_0 est une racine réelle d'ordre pair j il existe une décomposition de Gauss en $\frac{j}{2}$ carrés négatifs et $\frac{j}{2}$ carrés positifs ; c'est le cas où l'indice ne varie pas au passage en x_0.

4° Si x_0 est racine imaginaire d'ordre j par groupement avec les carrés négatifs à la racine imaginaire conjuguée x_0 on obtient pour l'ensemble des deux racines j carrés positifs et j carrés négatifs.

5° Enfin la correspondance qui existe entre la théorie des indices et les suites de Sturm fournit une justification très simple de l'emploi des méthodes de Sturm dans l'étude des critères de stabilité.

Appelons signature de la forme U l'excès du nombre de carrés positifs sur le nombre de carrés négatifs de cette forme. Nous énoncerons la proposition suivante qui résume les résultats obtenus dans ce paragraphe :

Soient $f(x)$ et $g(x)$ deux polynômes à coefficients réels de degrés respectifs n et p ; $A^0_{n-p+1}, A^0_{n-p+2}, \ldots, A^0_{n+p-1}$ les coefficients directeurs des restes des divisions euclidiennes de $f(x)$; $xf(x)$ ... ; $x^{2p-2}f(x)$ auxquels on associe la forme quadratique U de matrice H :

$$U(t_{p-1} \ldots t_0) = A^0_{n+p-1}t^2_{p-1} + A^0_{n+p-2}(2t_{p-1}t_{p-2})$$
$$+ A^0_{n+p-3}(t^2_{p-2} + 2t_{p-1}t_{p-3}) + \ldots + A^0_{n-p+1}t^2_0$$

$$H = \begin{Vmatrix} A^0_{n+p-1} & A^0_{n+p-2} \ldots & A^0_n \\ A^0_{n+p-2} & A^0_{n+p-3} \ldots & A^0_{n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ A^0_n & A^0_{n-1} & A^0_{n-p+1} \end{Vmatrix}$$

$$U = \|t_{p-1} \ldots t_0\| \cdot \|H\| \cdot \begin{Vmatrix} t_{p-1} \\ ! \\ ! \\ ! \\ t_0 \end{Vmatrix}$$

1° *Si $f(x)$ et $g(x)$ sont premiers entre eux U est non dégénérée et sa signature est égale à* $-\ I_{-\infty}^{+\infty}$, *c'est-à-dire à l'indice de* $\frac{f(x)}{g(x)}$ *changé de signe entre* $-\infty$ *et* $+\infty$

2° *Si $f(x)$ et $g(x)$ admettent $D_1(x)$ comme p.g.c.d. normalisé de degré $p-c$ la division euclidienne généralisée appliquée à* $f_1(x) = \frac{f(x)}{D_1(x)}$ *et à* $g_1(x) = \frac{g(x)}{D_1(x)}$ *conduit à la construction de la forme non dégénérée U_c de même signature que U.*

3° *Il en résulte que dans tous les cas la signature de la forme U fournit l'indice changé de signe entre* $-\infty$ *et* $+\infty$ *de la fraction* $\frac{f(x)}{g(x)}$ *après simplification s'il y a lieu.*

4° *En particulier l'étude de la position des zéros du polynôme $P(z)$ dans le plan complexe peut être entreprise sans aucune hypothèse restrictive en associant convenablement* (§ I, n° 13) *à $P(z)$ les polynômes $f(y)$ et $g(y)$ puis la forme quadratique U relative à f et à g.*

Nous avons donc obtenu dans ces deux derniers paragraphes les résultats annoncés concernant la méthode de la forme quadratique U. S'il n'est pas toujours nécessaire de former U il sera cependant indispensable de s'y ramener dès que des cas singuliers apparaîtront. Les méthodes qui permettent de déterminer la signature de U sont variées et c'est à l'utilisateur de choisir mais il sait que lorsque les procédés classiques ne réussissent pas il pourra revenir aux algorithmes que nous avons étudiés et qui se rattachent à des structures algébriques fondamentales ; c'est ce que nous nous sommes efforcés de montrer dans le présent mémoire tout en soulignant les multiples avantages de la méthode de la forme quadratique.

BIBLIOGRAPHIE

[1] DERWIDUE, *Sur les déterminants de Hurwitz et la séparation des racines complexes des équations à coefficients réels* (Mathésis, 1957).

[2] DERWIDUE, *Introduction à l'Algèbre Supérieure et au Calcul Numérique Algébrique*, (Masson, 1957).

[3] E. DURAND, *Solutions numériques des équations algébriques* (T. I et II), Masson, 1960.

[4] R. DUSSAUD, *Décomposition en facteurs et division euclidienne* [I.C.N. Toulouse, mai 1964].

[5] R. DUSSAUD, *Sur les critères de stabilité relatifs aux équations algébriques*, C. R. Acad. sci. Paris, avril 1965, T. 260, p. 4140-4142.

[6] R. DUSSAUD, *Généralisation des Formules de Bairstow et étude des critères de stabilité* (thèse Fac. Sc. Toulouse, novembre 1965, n° 25).

[7] R. DUSSAUD, *Méthode de la forme quadratique et étude des critères de stabilité* (I.C.N. Toulouse, 1966).