

DAMIEN ROY

## Une formule d'interpolation en deux variables

*Journal de Théorie des Nombres de Bordeaux*, tome 13, n° 1 (2001),  
p. 315-323

[http://www.numdam.org/item?id=JTNB\\_2001\\_\\_13\\_1\\_315\\_0](http://www.numdam.org/item?id=JTNB_2001__13_1_315_0)

© Université Bordeaux 1, 2001, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Journal de Théorie des Nombres de Bordeaux » (<http://jtnb.cedram.org/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

# Une formule d'interpolation en deux variables

par DAMIEN ROY

**RÉSUMÉ.** On démontre une formule d'interpolation pour une fonction  $F(z, w)$  de deux variables complexes qui tient compte des valeurs de cette fonction ainsi que de ses dérivées partielles par rapport à  $w$  en des points d'un sous-groupe de  $\mathbf{C}^2$  de rang 2. On explique préalablement comment, dans les grandes lignes, une telle formule permet de ramener la conjecture de Schanuel à un énoncé dont la forme est celle d'un critère d'indépendance algébrique.

**ABSTRACT.** We prove an interpolation formula for a function  $F(z, w)$  of two complex variables which takes into account the values of this function as well as those of its partial derivatives with respect to  $w$  on a subgroup of  $\mathbf{C}^2$  of rank 2. We also outline how such a formula reduces Schanuel's conjecture to a statement of the form of a criterion of algebraic independence.

## 1. Introduction

Une formule d'interpolation vise à contrôler la croissance d'une fonction holomorphe sur un ouvert de  $\mathbf{C}^n$  en termes des valeurs de cette fonction ou de certaines de ses dérivées en les points d'un sous-ensemble fini  $S$  de cet ouvert. Un critère dû à M. Waldschmidt et J.-C. Moreau, dont on rappelle l'énoncé au paragraphe 3 ci-dessous pour  $n = 2$ , réduit le problème au cas des polynômes. En conséquence, on possède des formules satisfaisantes lorsque  $S$  est un produit cartésien ou qu'il vérifie certaines hypothèses de bonne répartition (pour le second cas, voir le théorème 7.4.13 de [5] déduit du théorème A de [2] et la proposition 2.6 de [3] déduite du théorème 2.1 de [3]). Ce type de résultat est utile en théorie des nombres transcendants, mais il reste des problèmes ouverts, autour de la conjecture 7.1.10 de M. Waldschmidt dans [5], qui pourraient jouer un rôle important.

Dans le cadre de l'exposé, nous avons présenté une nouvelle formule d'interpolation qui s'accorde, dans l'esprit, à la conjecture de M. Waldschmidt mentionnée ci-dessus. On trouvera son énoncé au paragraphe

---

Manuscrit reçu le 1er novembre 1999.

Recherche partiellement subventionnée par le CRSNG et le CICMA.

suisant. Grâce à cette formule, nous avons montré qu'une autre conjecture, due à S. Schanuel celle-là, est équivalente à un énoncé arithmétique dont la forme est celle d'un critère d'indépendance algébrique. Cette conjecture de Schanuel prédit que, si  $y_1, \dots, y_\ell$  sont des nombres complexes linéairement indépendants sur  $\mathbf{Q}$ , alors le corps  $\mathbf{Q}(y_1, \dots, y_\ell, e^{y_1}, \dots, e^{y_\ell})$  est de degré de transcendance au moins  $\ell$  sur  $\mathbf{Q}$  (voir les notes historiques du chapitre III de [1]). Elle demeure essentiellement ouverte. Nous avons montré qu'elle est équivalente à l'énoncé suivant, où  $\mathcal{D}$  désigne la dérivation  $\partial/\partial X_0 + X_1(\partial/\partial X_1)$  dans  $\mathbf{C}[X_0, X_1]$  :

**Conjecture.** Soient  $\ell$  un entier strictement positif,  $y_1, \dots, y_\ell$  des nombres complexes linéairement indépendants sur  $\mathbf{Q}$ ,  $\alpha_1, \dots, \alpha_\ell$  des nombres complexes non nuls. De plus, soient  $s_0, s_1, t_0, t_1, u$  des nombres réels strictement positifs vérifiant

$$(1) \quad \begin{aligned} \max\{1, t_0, 2t_1\} &< \min\{s_0, 2s_1\} \quad \text{et} \\ \max\{s_0, s_1 + t_1\} &< u < \frac{1}{2}(1 + t_0 + t_1). \end{aligned}$$

Supposons que, pour tout entier  $N \geq 1$  assez grand, il existe un polynôme non nul  $P_N \in \mathbf{Z}[X_0, X_1]$ , de degré partiel en  $X_j$  majoré par  $N^{t_j}$  pour  $j = 0, 1$ , à coefficients entiers en valeur absolue majorés par  $e^N$ , qui vérifie

$$\left| (\mathcal{D}^k P_N) \left( \sum_{j=1}^{\ell} m_j y_j, \prod_{j=1}^{\ell} \alpha_j^{m_j} \right) \right| \leq \exp(-N^u),$$

pour tout choix d'entiers  $k, m_1, \dots, m_\ell \geq 0$  avec  $k \leq N^{s_0}$  et  $\max\{m_1, \dots, m_\ell\} \leq N^{s_1}$ . Alors, le corps  $\mathbf{Q}(y_1, \dots, y_\ell, \alpha_1, \dots, \alpha_\ell)$  est de degré de transcendance au moins  $\ell$  sur  $\mathbf{Q}$ .

La preuve de l'équivalence entre les deux conjectures est établie en détails dans [4]. Nous en rappelons les grandes lignes ci-dessous. Auparavant, mentionnons que, pour tout couple  $(t_0, t_1)$  à l'intérieur du triangle de sommets  $(1/2, 1/2)$ ,  $(1, 0)$  et  $(2, 1)$ , il existe des nombres réels  $s_0, s_1$  et  $u$  qui vérifient les conditions (1). En particulier, pour tout choix de nombres réels  $s$  et  $u$  avec  $1 < s < u < 5/4$ , ces conditions sont remplies avec  $s_0 = 2s_1 = s$  et  $t_0 = 2t_1 = 1$ . Donc la conjecture ci-dessus n'est pas un énoncé vide.

Pour montrer qu'elle implique celle de Schanuel, on choisit des nombres  $y_1, \dots, y_\ell \in \mathbf{C}$  linéairement indépendants sur  $\mathbf{Q}$ , et on pose  $\alpha_j = e^{y_j}$  pour  $j = 1, \dots, \ell$ . On choisit aussi des nombres réels  $s_0, s_1, t_0, t_1$  et  $u$  qui vérifient (1). Une construction générale de fonction auxiliaire de M. Waldschmidt (théorème 3.1 de [6]) fournit alors, pour chaque entier  $N$  suffisamment grand, un polynôme non nul  $P_N \in \mathbf{Z}[X_0, X_1]$  qui remplit les hypothèses de la conjecture. Donc, si celle-ci est vraie, le corps  $\mathbf{Q}(y_1, \dots, y_\ell, e^{y_1}, \dots, e^{y_\ell})$  est de degré de transcendance au moins  $\ell$  sur  $\mathbf{Q}$ . Réciproquement, si les

hypothèses de la conjecture sont vérifiées, on trouve que  $\alpha_j e^{-y_j}$  est une racine de l'unité pour  $j = 1, \dots, \ell$  et, en supposant vraie la conjecture de Schanuel, on en déduit que le corps  $\mathbf{Q}(y_1, \dots, y_\ell, \alpha_1, \dots, \alpha_\ell)$  est de degré de transcendance au moins  $\ell$  sur  $\mathbf{Q}$ .

Pour établir que, sous les hypothèses de la conjecture, les nombres  $\alpha_j e^{-y_j}$  sont des racines de l'unité, on emploie une formule d'interpolation qu'on applique aux fonctions  $F_N(z, w) = P_N(z, e^w)$ . Plus précisément, pour un indice  $j$  fixé, on pose  $y = y_j$  et  $\alpha = \alpha_j$ . On choisit  $\lambda \in \mathbf{C}$  tel que  $e^\lambda = \alpha$ , et on observe que

$$(\mathcal{D}^k P_N)(my, \alpha^m) = \left( \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial w} \right)^k F_N(my, m\lambda + n2\pi i)$$

pour tout choix d'entiers  $k, m, n \geq 0$ . La formule d'interpolation en question utilise la petitesse de ces nombres pour  $k \leq N^{s_0}$  et  $m, n \leq N^{s_1}$  pour contrôler la croissance de  $F_N$ . Si le rapport  $(y - \lambda)/(2\pi i)$  est irrationnel, on obtient, pour une infinité d'entiers  $N$ ,

$$\sup\{|F_N(z, w)|; |z| \leq N, |w| \leq N\} < 1.$$

Cela fournit la contradiction souhaitée car, en supposant  $N \geq e^\pi$ , on en déduit

$$\sup\{|P_N(z, w)|; |z| = |w| = 1\} < 1,$$

ce qui, en vertu des inégalités de Cauchy, est impossible pour un polynôme non nul à coefficients entiers.

Pour les calculs, on effectue en pratique un changement de variables qui permet de remplacer la dérivation  $\partial/\partial z + \partial/\partial w$  par  $\partial/\partial w$ . La formule d'interpolation énoncée au paragraphe suivant est adaptée à cette situation. Elle est aussi plus précise que la proposition 1 de [4]. Le reste de cet article sera consacré à sa démonstration.

## 2. Une formule d'interpolation

On fixe un point  $(a, b) \in \mathbf{C}^2$  et un entier  $N \geq 1$  tels que

$$\min \left\{ |m + na|; m, n \in \mathbf{Z}, 0 < \max\{|m|, |n|\} < N \right\} \geq 2^{-N}.$$

On considère le sous-ensemble  $E$  de  $\mathbf{C}^2$  de cardinalité  $L := N^2$  donné par

$$E = \{(m + na, nb); m, n \in \mathbf{Z}, 0 \leq m, n < N\},$$

et on le munit d'un ordre total en posant

$$(m + na, nb) < (m' + n'a, n'b) \iff n < n' \text{ ou } (n = n' \text{ et } m < m').$$

Pour tout entier  $k = 0, \dots, L$ , on désigne par  $E(k)$  le sous-ensemble de  $E$  constitué de ses  $L - k$  premiers éléments. Ainsi, on a en particulier  $E(0) = E$  et  $E(L) = \emptyset$ .

Par ailleurs, pour chaque nombre réel  $R > 0$ , on pose

$$B(0, R) = \{(z, w) \in \mathbf{C}^2; |z| \leq R, |w| \leq R\},$$

et on note  $\mathcal{H}_R$  le  $\mathbf{C}$ -espace vectoriel des fonctions continues  $F: B(0, R) \rightarrow \mathbf{C}$  qui sont holomorphes à l'intérieur de  $B(0, R)$ . On munit cet espace de la norme du supremum

$$|F|_R = \sup\{|F(z, w)|; (z, w) \in B(0, R)\}.$$

Le but de cet article est de démontrer le résultat suivant :

**Théorème.** Soit  $r_0 = \max\{2 + |a|, 1 + |b|\}N$ , soient  $r$  et  $R$  des nombres réels avec  $R \geq r \geq r_0$ , et soit  $F: B(0, R) \rightarrow \mathbf{C}$  un élément de  $\mathcal{H}_R$ . Alors, on a

$$|F|_r \leq \left(\frac{cr}{r_0}\right)^L \max \left\{ \frac{1}{k!} \left| \frac{\partial^k F}{\partial w^k}(p) \right| N^k; 0 \leq k < L \text{ et } p \in E(k) \right\} + \left(\frac{ecr}{R}\right)^L |F|_R$$

avec  $c = e^{17} \max\{2 + |a|, 1 + |b|\}^2$ .

La différence essentielle entre ce résultat et la proposition 1 de [4] vient du fait que la majoration de  $|F|_r$  ci-dessus tient compte seulement des dérivées partielles  $(\partial^k F / \partial w^k)(p)$  avec  $p \in E(k)$ , tandis que la proposition 1 de [4] fait intervenir toutes les dérivées partielles de ce type avec  $0 \leq k < L$  et  $p \in E$ , c'est-à-dire un ensemble de valeurs de cardinalité près du double. Cette amélioration pourrait être utile dans la pratique en conduisant à des résultats quantitatifs plus précis. On verra, par les remarques qui terminent le paragraphe suivant, qu'elle est sous-jacente à un lemme de zéros optimal.

### 3. Critère de Waldschmidt-Moreau

Dans [3], J.-C. Moreau propose une méthode générale pour obtenir des lemmes d'approximation. Celle-ci formalise un argument de M. Waldschmidt, implicite dans les preuves des théorèmes 7.3.4 et 7.4.13 de [5]. En poussant un peu plus loin la démarche de Moreau, on obtient le critère suivant pour les fonctions de deux variables complexes :

**Proposition.** Soient  $\gamma$  et  $r_0$  des nombres réels strictement positifs,  $L$  un entier strictement positif et  $S$  un ensemble de fonctionnelles linéaires de norme  $\leq 1$  sur  $\mathcal{H}_{r_0}$ . Alors, les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) pour tout polynôme  $P \in \mathbf{C}[z, w]$  de degré  $< L$  on a

$$|P|_{r_0} \leq \gamma \sup_{\varphi \in S} |\varphi(P)|;$$

(ii) pour toute paire de nombres réels  $r$  et  $R$  avec  $R \geq r \geq r_0$ , et toute fonction  $F \in \mathcal{H}_R$ , on a

$$|F|_r \leq \gamma \left(\frac{r}{r_0}\right)^{L-1} \sup_{\varphi \in S} |\varphi(F)| + \left(1 + \gamma \frac{r_0}{r}\right) \left(\frac{er}{R}\right)^L |F|_R.$$

*Preuve.* Le fait que (ii) implique (i) est immédiat. Si  $P \in \mathbf{C}[z, w]$  est un polynôme de degré  $< L$ , on lui applique l'inégalité de (ii) avec  $r = r_0$ . En passant à la limite pour des valeurs de  $R$  qui tendent vers l'infini, on obtient l'inégalité de (i).

Réciproquement, pour montrer que (i) implique (ii), on reprend la preuve de la proposition 1.6 de [3]. Tout d'abord on écrit  $F = P + G$  où  $P$  est un polynôme de degré  $< L$  et  $G$  un élément de  $\mathcal{H}_R$  qui admet un zéro d'ordre  $\geq L$  à l'origine. On combine ensuite les inégalités suivantes. D'abord, on a  $|F|_r \leq |P|_r + |G|_r$  et le lemme 1.5 de [3] livre  $|P|_r \leq (r/r_0)^{L-1} |P|_{r_0}$  (par le principe du maximum appliqué au polynôme homogène  $t^{L-1}P(z/t, w/t) \in \mathbf{C}[t, z, w]$ ). On combine cette dernière inégalité avec celle de (i) et on utilise

$$\sup_{\varphi \in S} |\varphi(P)| \leq \sup_{\varphi \in S} |\varphi(F)| + \sup_{\varphi \in S} |\varphi(G)| \leq \sup_{\varphi \in S} |\varphi(F)| + |G|_{r_0}.$$

On utilise aussi le fait que  $G$  admet un zéro d'ordre  $\geq L$  à l'origine pour majorer  $|G|_{r_0}$  par  $(r_0/R)^L |G|_R$ , et  $|G|_r$  par  $(r/R)^L |G|_R$ . Enfin on majore  $|G|_R$  par  $|F|_R + |P|_R$  et on utilise la formule de Plancherel pour majorer  $|P|_R$  par  $L|F|_R$ , d'où  $|G|_R \leq (1 + L)|F|_R \leq e^L |F|_R$ .  $\square$

Soit  $r_0$  comme dans l'énoncé du théorème. En reprenant les notations du paragraphe précédent, on associe à chaque entier  $k$  avec  $0 \leq k < L$  et à chaque point  $p \in E(k)$  une fonctionnelle linéaire  $\varphi_{k,p}$  sur  $\mathcal{H}_{r_0}$  en posant

$$\varphi_{k,p}(F) = \frac{1}{k!} \left| \frac{\partial^k F}{\partial w^k}(p) \right| N^k$$

quel que soit  $F \in \mathcal{H}_{r_0}$ . Comme  $E$  est contenu dans  $B(0, r_0 - N)$ , les inégalités de Cauchy donnent  $|\varphi_{k,p}(F)| \leq |F|_{r_0}$ . Donc ces fonctionnelles linéaires sont de norme au plus 1. Soit  $S$  leur ensemble. Pour démontrer le théorème, il suffit donc de vérifier que, pour tout polynôme  $P \in \mathbf{C}[z, w]$  de degré  $< L$ , on a

$$(2) \quad |P|_{r_0} \leq (c^L - 1) \sup_{\varphi \in S} |\varphi(P)|.$$

**Remarque 1.** Si  $S$  est un ensemble fini de fonctionnelles linéaires sur  $\mathbf{C}[z, w]$ , on désigne par  $\omega(S)$  le plus petit entier  $\ell$  pour lequel il existe un polynôme non nul  $P \in \mathbf{C}[z, w]$  de degré  $\ell$  dont l'image sous chaque élément de  $S$  est nulle. Alors, pour  $r_0 > 0$  donné, il existe une constante  $\gamma > 0$  telle que  $|P|_{r_0} \leq \gamma \sup_{\varphi \in S} |\varphi(P)|$  pour tout polynôme  $P$  de degré  $< \omega(S)$ . Dans

le cas qui nous occupe, on vérifie bien que  $\omega(S) = L$ . Cela découle de la remarque générale suivante.

**Remarque 2.** Si  $\{u_1, \dots, u_L\}$  est un ensemble de  $L$  points de  $\mathbf{C}^2$  dont les premières coordonnées sont  $L$  nombres distincts, alors il existe un polynôme non nul  $P \in \mathbf{C}[z, w]$  de degré  $L$  qui vérifie  $(\partial^k P / \partial w^k)(u_j) = 0$  pour chaque couple d'entiers  $(j, k)$  avec  $j \geq 1$ ,  $k \geq 0$  et  $j + k \leq L$ , et il n'en existe pas de degré plus petit.

En effet, comme la dimension du sous-espace de  $\mathbf{C}[z, w]$  constitué des polynômes de degré  $\leq L$  est supérieure au nombre de couples d'entiers  $(j, k)$  avec  $j \geq 1$ ,  $k \geq 0$  et  $j + k \leq L$ , il existe un polynôme non nul  $P$  de degré au plus  $L$  qui satisfait les conditions requises. Il reste à montrer qu'un tel polynôme est de degré  $L$ . Pour cela, on procède par récurrence sur  $L$ . Si  $L = 1$ , la condition  $P(u_1) = 0$  implique que  $P$  n'est pas constant, donc il est de degré 1. Supposons  $L \geq 2$ . Le polynôme  $Q = \partial P / \partial w$  vérifie  $(\partial^k Q / \partial w^k)(u_j) = 0$  pour tout couple d'entiers  $(j, k)$  avec  $j \geq 1$ ,  $k \geq 0$  et  $j + k \leq L - 1$ . S'il est nul, alors  $P$  ne dépend que de  $z$ . Dans ce cas, comme  $P$  s'annule en chacun des points  $u_1, \dots, u_L$  et que ceux-ci ont des premières coordonnées distinctes, son degré doit forcément être au moins  $L$ , donc égal à  $L$ . Enfin, si  $Q$  n'est pas nul, on peut supposer, par récurrence, que son degré est au moins  $L - 1$ . Par suite,  $P$  est de degré  $L$ .

#### 4. Un lemme combinatoire

On désigne par  $x: \mathbf{C}^2 \rightarrow \mathbf{C}$  et  $y: \mathbf{C}^2 \rightarrow \mathbf{C}$  les fonctions coordonnées qui, à un point  $(z, w) \in \mathbf{C}^2$ , associent respectivement  $z$  et  $w$ . Dans les notations du paragraphe 2, pour tout point  $p \in E$  et tout entier  $k$  avec  $0 \leq k \leq L$ , on pose

$$a(p, k) = \prod_{\substack{q \in E(k) \\ q \neq p}} |x(p) - x(q)|,$$

avec la convention que le produit vide est égal à 1. En vertu des hypothèses, un tel produit n'est pas nul puisque  $|x(p) - x(q)| \geq 2^{-N}$  pour toute paire de points distincts  $p$  et  $q$  de  $E$ . On exploite ici cette condition diophantienne pour établir l'estimation suivante :

**Lemme.** Soit  $p \in E$  et soient  $k, k'$  des entiers avec  $0 \leq k < k' \leq L$ . Alors, on a

$$\frac{a(p, k')}{a(p, k)} = \prod_{\substack{q \in E(k) \setminus E(k') \\ q \neq p}} |x(p) - x(q)|^{-1} \leq e^{5N} \left( \frac{e^3}{N} \right)^{k' - k}.$$

*Preuve.* Posons  $I = E(k) \setminus E(k')$  et supposons dans un premier temps que les points de  $I$  soient de la forme  $(m + na, nb)$  avec  $n$  constant. Alors les  $k' - k$  nombres  $x(p) - x(q)$  avec  $q \in I$  diffèrent l'un de l'autre par un entier. Soit  $q_0$  un élément de  $I$  pour lequel  $|\Re(x(p) - x(q_0))|$  est minimal, où  $\Re$

désigne la fonction partie réelle. On peut réordonner les autres éléments  $q$  de  $I$  de telle sorte que les quantités  $|\Re(x(p) - x(q))|$  soient minorées respectivement par  $1/2, 1, 3/2, \dots, (k' - k - 1)/2$ . Si  $q_0 \neq p$ , cela implique

$$\frac{a(p, k')}{a(p, k)} \leq |x(p) - x(q_0)|^{-1} \frac{2^{k'-k-1}}{(k' - k - 1)!} \leq 2^N e^N \left(\frac{2}{N}\right)^{k'-k-1} \\ \leq (2e^{3/2})^N \left(\frac{2}{N}\right)^{k'-k}.$$

Si  $q_0 = p$ , cette majoration demeure valable puisque, dans ce cas, le terme  $|x(p) - x(q_0)|$  n'apparaît pas dans le quotient  $a(p, k')/a(p, k)$ .

En général, on a

$$\frac{a(p, k')}{a(p, k)} = \prod_{j=0}^{s-1} \frac{a(p, k_{j+1})}{a(p, k_j)}$$

pour toute suite croissante d'entiers  $k_0 < \dots < k_s$  avec  $k_0 = k$  et  $k_s = k'$ . On choisit  $k_0, \dots, k_s$  de telle sorte que l'ensemble  $I_j = E(k_j) \setminus E(k_{j+1})$  vérifie l'hypothèse précédente pour  $j = 0, \dots, s - 1$ , et que  $I_j$  contienne  $N$  éléments lorsque  $j \neq 0, s - 1$ . Si  $s = 1$ , la conclusion découle de l'observation précédente. Sinon, on a  $s \geq 2$  et on trouve

$$\frac{a(p, k')}{a(p, k)} \leq (2e^{3/2})^N \left(\frac{2}{N}\right)^{k_1 - k_0} \left(\frac{4e^{3/2}}{N}\right)^{k_{s-1} - k_1} (2e^{3/2})^N \left(\frac{2}{N}\right)^{k_s - k_{s-1}} \\ \leq (4e^3)^N \left(\frac{4e^{3/2}}{N}\right)^{k' - k}.$$

### 5. Preuve du théorème

Soit  $P \in \mathbf{C}[z, w]$  un polynôme de degré  $< L$ . Il reste à démontrer l'inégalité (2) (voir la discussion qui suit la démonstration du critère de Waldschmidt-Moreau). Pour  $w \in \mathbf{C}$  fixé, la formule d'interpolation de Lagrange donne

$$P(z, w) = \sum_{p \in E} \left( \prod_{\substack{q \in E \\ q \neq p}} \frac{z - x(q)}{x(p) - x(q)} \right) P(x(p), w).$$

En développant chacun des termes  $P(x(p), w)$  en série de Taylor autour du point  $w = y(p)$ , on en déduit

$$P(z, w) = \sum_{\substack{p \in E \\ 0 \leq k < L}} \left( \prod_{\substack{q \in E \\ q \neq p}} \frac{z - x(q)}{x(p) - x(q)} \right) (w - y(p))^k \frac{1}{k!} \frac{\partial^k P}{\partial w^k}(p),$$



et par suite

$$|P|_{r_0} \leq \sum_{\substack{p \in E \\ 0 \leq k < L}} \frac{(2r_0)^{L+k}}{a(p, 0)} \frac{1}{k!} \left| \frac{\partial^k P}{\partial w^k}(p) \right|.$$

Pour  $p \in E(k)$ , le terme correspondant de la somme peut s'exprimer en fonction de  $\varphi_{k,p}(P)$ . Pour  $p \notin E(k)$ , on reprend les calculs ci-dessus avec  $P$  remplacé par  $(1/k!) \partial^k P / \partial w^k$  et  $E$  remplacé par  $E(k)$ . On obtient ainsi

$$\begin{aligned} & \frac{1}{k!} \frac{\partial^k P}{\partial w^k}(z, w) \\ &= \sum_{\substack{p' \in E(k) \\ k \leq k' < L}} \left( \prod_{\substack{q \in E(k) \\ q \neq p'}} \frac{z - x(q)}{x(p') - x(q)} \right) \binom{k'}{k} (w - y(p'))^{k'-k} \frac{1}{k'!} \frac{\partial^{k'} P}{\partial w^{k'}}(p'), \end{aligned}$$

et par suite

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{k!} \frac{\partial^k P}{\partial w^k}(p) \right| \\ & \leq \sum_{\substack{p' \in E(k) \\ k \leq k' < L}} \frac{a(p, k)}{|x(p) - x(p')| a(p', k)} \binom{k'}{k} |y(p) - y(p')|^{k'-k} \frac{1}{k'!} \left| \frac{\partial^{k'} P}{\partial w^{k'}}(p') \right| \\ & \leq 2^N \sum_{\substack{p' \in E(k) \\ k \leq k' < L}} \frac{a(p, k)}{a(p', k)} \binom{k'}{k} |y(p) - y(p')|^{k'-k} \frac{1}{k'!} \left| \frac{\partial^{k'} P}{\partial w^{k'}}(p') \right|, \end{aligned}$$

puisque  $|x(p) - x(p')| \geq 2^{-N}$  pour tout point  $p'$  de  $E$  distinct de  $p$ . En itérant ce procédé et en combinant les inégalités obtenues, on déduit que  $|P|_{r_0}$  est majoré par la somme des produits

$$\begin{aligned} & \frac{(2r_0)^{L+k_1}}{a(p_1, 0)} 2^{N(s-1)} \prod_{j=1}^{s-1} \left( \frac{a(p_j, k_j)}{a(p_{j+1}, k_j)} \binom{k_{j+1}}{k_j} |y(p_j) - y(p_{j+1})|^{k_{j+1}-k_j} \right) \\ & \quad \times \frac{1}{k_s!} \left| \frac{\partial^{k_s} P}{\partial w^{k_s}}(p_s) \right|, \end{aligned}$$

où  $s$  désigne un entier strictement positif,  $k_1, \dots, k_s$  des entiers avec  $0 \leq k_1 \leq \dots \leq k_s < L$  et  $p_1, \dots, p_s$  des éléments de  $E$  tels que  $p_j \notin E(k_j)$  et  $p_{j+1} \in E(k_j)$  pour  $j = 1, \dots, s-1$ , et  $p_s \in E(k_s)$ .

Fixons un tel produit. Alors, on a  $p_1 > \dots > p_s$  et  $k_1 < \dots < k_{s-1} \leq k_s$ . Donc, si ce produit n'est pas nul, on doit aussi avoir  $|y(p_1)| > \dots > |y(p_{s-1})| \geq |y(p_s)|$ , et par suite  $s \leq N+1$  (si  $b=0$ , cela implique même  $s \leq 2$ ). Alors, en posant  $k_0 = 0$  et en utilisant le fait que  $a(p_s, L) = 1$ , on obtient, grâce au lemme,

$$\begin{aligned} \frac{1}{a(p_1, 0)} \prod_{j=1}^{s-1} \frac{a(p_j, k_j)}{a(p_{j+1}, k_j)} &= \frac{a(p_s, L)}{a(p_s, k_{s-1})} \prod_{j=1}^{s-1} \frac{a(p_j, k_j)}{a(p_j, k_{j-1})} \\ &\leq e^{5N} \left(\frac{e^3}{N}\right)^{L-k_{s-1}} \prod_{j=1}^{s-1} \left(e^{5N} \left(\frac{e^3}{N}\right)^{k_j - k_{j-1}}\right) \\ &= e^{5sN} \left(\frac{e^3}{N}\right)^L \leq e^{10L} \left(\frac{e^3}{N}\right)^L = \left(\frac{e^{13}}{N}\right)^L. \end{aligned}$$

Donc, le produit en question est majoré par

$$\left(\frac{4e^{13}r_0}{N}\right)^L \frac{k_s!}{k_1!(k_2 - k_1)! \cdots (k_s - k_{s-1})!} (2r_0)^{k_1} \prod_{j=1}^{s-1} |y(p_j) - y(p_{j+1})|^{k_{j+1} - k_j}$$

multiplié par  $(1/k_s!) |(\partial^{k_s} P / \partial w^{k_s})(p_s)|$ . Comme  $p_s \in E(k_s)$ , ce dernier facteur est majoré par  $N^{-k_s} \sup_{\varphi \in S} |\varphi(P)|$ . Donc, pour  $p_1, \dots, p_s$  fixés et  $k_s$  fixé, la somme de ces produits est majorée par

$$\left(\frac{4e^{13}r_0}{N}\right)^L \left(\frac{3r_0}{N}\right)^{k_s} \sup_{\varphi \in S} |\varphi(P)|.$$

Comme  $E$  possède  $2^L$  sous-ensembles et que  $k_s$  est restreint à l'intervalle  $0 \leq k_s < L$ , on en déduit

$$|P|_{r_0} \leq 2^L \left(\frac{4e^{13}r_0}{N}\right)^L \left(\frac{3r_0}{N}\right)^L \sup_{\varphi \in S} |\varphi(P)| \leq (c^L - 1) \sup_{\varphi \in S} |\varphi(P)|.$$

### Bibliographie

- [1] S. LANG, *Introduction to transcendental numbers*. Addison-Wesley, 1966.
- [2] D. MASSER, *Polynomial interpolation in several complex variables*. J. Approx. Theory **24** (1978), 18–34.
- [3] J.-C. MOREAU, *Lemmes de Schwarz en plusieurs variables et applications arithmétiques*. Sémin. P. Lelong, H. Skoda (Analyse) 1978/79, pp. 174–190, *Lecture Notes in Math.* 822, Springer, Berlin-New York, 1980.
- [4] D. ROY, *An arithmetic criterion for the values of the exponential function*. Acta Arith. (à paraître).
- [5] M. WALDSCHMIDT, *Nombres transcendants et groupes algébriques*. Soc. Math. France, Astérisque **69–70** (1979), avec deux appendices par D. Bertrand et J.-P. Serre.
- [6] M. WALDSCHMIDT, *Transcendance et exponentielles en plusieurs variables*. Invent. Math. **63** (1981), 97–127.

Damien ROY  
 Département de Mathématiques et de Statistiques  
 Université d'Ottawa  
 585 King Edward  
 Ottawa  
 Ontario, K1N 6N5  
 Canada  
 E-mail : droy@uottawa.ca