JOURNAL DE THÉORIE DES NOMBRES DE BORDEAUX

P. ERDÖS
J.-L. NICOLAS
A. SÁRKOZY

Sommes de sous-ensembles

Journal de Théorie des Nombres de Bordeaux 2e série, tome 3, nº 1 (1991), p. 55-72
<http://www.numdam.org/item?id=JTNB_1991__3_1_55_0>

Séminaire de Théorie des Nombres,
Bordeaux **3** *(1991), 55-72*

Sommes de sous-ensembles.

par P. ERDÖS, J.-L. NICOLAS, A. SÁRKOZY(1)

Résumé — On dit qu'un ensemble $\mathcal{A}$ est admissible si les sommes des éléments de deux sous ensembles de $\mathcal{A}$ de cardinaux différents sont différentes. Nous démontrons que si $\mathcal{A} \subset \{1, 2, ..., N\}$ est admissible, alors Card $A \leq (1 + o(1))(143/27)^{1/2}\sqrt{N}$, améliorant ainsi les résultats de Erdös et Straus, et nous formulons quelques conjectures d'après des calculs numériques. Enfin nous construisons un ensemble infini admissible $\mathcal{A}$ vérifiant $A(x) = \text{Card}\{a \in \mathcal{A} \ ; \ a \leq x\} >> x^{5-2\sqrt{6}}$.

Abstract — *A set $\mathcal{A}$ is said to be admissible if the sums of the elements of two subsets of $\mathcal{A}$ of different cardinalities are different. We shall prove that if $\mathcal{A} \subset \{1, 2, ..., N\}$ is an admissible set, then Card $\mathcal{A} \leq (1 + o(1))(143/127)^{1/2}\sqrt{N}$ improving preceding results of Erdös and Straus. From numerical calculations, some conjectures are given. Finally, we construct an infinite admissible set $\mathcal{A}$ such that $A(x) = \text{Card}\{a \in \mathcal{A}; a \leq x\} >> x^{5-2\sqrt{6}}$.*

1. Introduction

Tout au long de cet article nous utiliserons les notations suivantes : nous écrirons $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, ...\}$ et $\mathbb{N}_M = \{1, 2, ..., M\}$. Nous dirons qu'un ensemble $\mathcal{A} \subset \mathbb{N}$ est admissible, si les sommes des éléments de deux sous ensembles de $\mathcal{A}$ de cardinaux différents sont différentes. Cette définition a été introduite par E.G. Straus ([2]). Si $\mathcal{A} \subset \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{N}$, nous désignerons par $|\mathcal{A}|$ le cardinal de $\mathcal{A}$ et par $\mathcal{P}(\mathcal{A}, k)$ l'ensemble des entiers qui peuvent être représentés comme la somme d'exactement k éléments distincts de $\mathcal{A}$, et nous écrirons $P(\mathcal{A}, k) = |\mathcal{P}(\mathcal{A}, k)|$. Dire que $\mathcal{A}$ est admissible équivaut à dire que

$$k \neq \ell \quad \Rightarrow P(\mathcal{A}, k) \cap \mathcal{P}(\mathcal{A}, \ell) = \emptyset.$$

En d'autres termes, $\mathcal{A}$ est admissible si la somme des éléments d'une partie de $\mathcal{A}$ détermine le cardinal de cette partie.

Manuscrit reçu le 30 octobre 1990.
(1) Recherche partiellement financée par la Fondation Nationale Hongroise pour la Recherche Scientifique, contrat n° 1811 et par le C.N.R.S. SDI 5614 et PRC Mathématiques-Informatique.

P. Erdös ([1]) a posé et étudié le problème suivant : Quel est le cardinal maximum $F(N)$ d'une partie admissible $\mathcal{A}$ de $\mathbb{N}_N$? Ses résultats ont été améliorés par E.G. Straus ([2]), qui a démontré :

$$(i)(1) \qquad \limsup_{N\to\infty} F(N)N^{-1/2} \leq 4/\sqrt{3} \qquad (= 2.309401...).$$

De plus, Erdös a conjecturé que le cardinal maximum $F(N)$ est atteint lorsque $\mathcal{A}$ est formé d'entiers consécutifs incluant N, c'est-à-dire

$$\mathcal{A} = \{N - F(N) + i \ ; \ 1 \leq i \leq F(N)\}.$$

En rapport avec cette conjecture, Straus a démontré :

(ii) L'ensemble $\mathcal{A} = \{N - k + 1, \ N - k + 2, ..., N\}$ est admissible pour $k = 2m-1$ si $m^2 \leq N < m^2+m$ et pour $k = 2m$ si $m^2+m \leq N < (m+1)^2$.

Ceci implique :

$$(2) \qquad \liminf_{N\to+\infty} \ F(N) \ N^{-1/2} \geq 2.$$

Nous nous proposons dans cet article d'étendre et de préciser les résultats de Erdős et Straus. D'abord, nous améliorons la borne supérieure de (i). Ensuite, au paragraphe 4, à l'aide des tables numériques construites par J.-P. Massias et M. Deléglise, que nous avons plaisir à remercier ici, nous ferons des conjectures sur ce problème. Finalement, nous étudierons les ensembles infinis admissibles, dans le cinquième paragraphe.

2. Théorème 1. *On a :*

$$(3) \qquad \limsup_{N\to\infty} F(N)N^{-1/2} \leq (143/27)^{1/2} \qquad (= 2.301368...).$$

Il serait possible d'améliorer ce résultat par une application plus élaborée de nos idées. Cependant, il semble impossible d'obtenir de cette façon la limite conjecturée : $\limsup F(N)N^{-1/2} = 2$ et en fait, une nouvelle idée semble nécessaire pour donner une borne supérieure plus petite que 2.2.

Pour démontrer le théorème 1, nous avons besoin de deux lemmes.

Lemme 1. *Soit $\mathcal{A}$ un ensemble fini, et $k \in \mathbb{N}$ vérifiant $k \leq |\mathcal{A}|$. Alors on a :*

$$P(\mathcal{A}, k) \geq k(|\mathcal{A}| - k) + 1.$$

Démonstration. C'est le théorème 2 de Straus [2], qui se démontre facilement par récurrence sur $|\mathcal{A}|$.

Nous utiliserons le théorème 4 de Straus sous la forme suivante :

LEMME 2. *Soit $N \in \mathbb{N}$. On a :*

$$F(N) < \tfrac{4}{\sqrt{3}} N^{1/2} + 1 \tag{4}$$

Démonstration. Nous suivons la preuve de Straus. Soit $\mathcal{A} \subset \mathbb{N}_N$ un ensemble admissible. Il est clair que les éléments de $\mathcal{P}(\mathcal{A}, k)$ sont inférieurs à kN. Donc, pour $x \geq 1$, nous avons par le lemme 1 :

$$\begin{aligned} xN &\geq \left| \bigcup_{k=1}^{x} \mathcal{P}(\mathcal{A}, k) \right| = \sum_{k=1}^{x} P(\mathcal{A}, k) \\ &\geq \sum_{k=1}^{x} (k(|\mathcal{A}| - k) + 1) = |\mathcal{A}| \frac{x(x+1)}{2} - \frac{x(x+1)(2x+1)}{6} + x \end{aligned}$$

d'où il vient, en posant $x = [3|\mathcal{A}|/4]$ (la notation $[u]$ désigne la partie entière de u)

$$\begin{aligned} 6(N-1) &\geq 3|\mathcal{A}|(x+1) - (x+1)(2x+1) \\ &> 3|\mathcal{A}|.\frac{3|\mathcal{A}|}{4} - (3\frac{|\mathcal{A}|}{4} + 1)(2\frac{3|\mathcal{A}|}{4} + 1) \\ &= \frac{9}{8}|\mathcal{A}|^2 - \frac{9}{4}|\mathcal{A}| - 1 = \frac{9}{8}|\mathcal{A}|(|\mathcal{A}| - 2) - 1. \end{aligned} \tag{5}$$

Supposons maintenant que l'on ait :

$$|\mathcal{A}| \geq \frac{4}{\sqrt{3}} N^{1/2} + 1$$

contrairement à (4). Cela impliquerait

$$\begin{aligned} \frac{9}{8}|\mathcal{A}|(|\mathcal{A}| - 2) - 1 &\geq \frac{9}{8}(\frac{4}{\sqrt{3}} N^{1/2} + 1)(\frac{4}{\sqrt{3}} N^{1/2} - 1) - 1 \\ &= 6N - \frac{9}{8} - 1 > 6(N-1) \end{aligned}$$

ce qui contredit (5), et achève la preuve du lemme 2.

3. Démonstration du Théorème 1.

Nous distinguerons 3 cas. Soit $\mathcal{A} = \{a_1, a_2, ..., a_y\} \subset \mathbb{N}_N$, $(a_1 < a_2 < ... < a_y)$ un ensemble admissible. On pose :

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_1 &= \{a \; ; \; a \in \mathcal{A}, \; a \leq N/2\} \\ \mathcal{A}_2 &= \{a \; ; \; a \in \mathcal{A}, \; N/2 < a \leq 17N/18\} \\ \text{et} \qquad \mathcal{A}_3 &= \{a \; ; \; a \in \mathcal{A}, \; 17N/18 < a\}. \end{aligned}$$

PREMIER CAS. On suppose que

(6) $\qquad |\mathcal{A}_3| < \frac{21}{32} y = \frac{21}{32}|\mathcal{A}|.$

Comme dans la démonstration du lemme 2, nous partons de la relation $|\bigcup_{k=1}^{x} \mathcal{P}(\mathcal{A}, k)| = \sum_{k=1}^{x} P(\mathcal{A}, k)$ avec toujours $x = [3y/4]$. Le plus grand élément de $\bigcup_{k=1}^{x} \mathcal{P}(\mathcal{A}, k)$ est évidemment le plus grand élément de $\mathcal{P}(\mathcal{A}, x)$, et par (6), il vaut

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{x-1} a_{y-j} &\leq \sum_{a \in \mathcal{A}_3} a + (x - |\mathcal{A}_3|)\frac{17N}{18} \\ &\leq |\mathcal{A}_3| N + (x - |\mathcal{A}_3|)\frac{17N}{18} = |\mathcal{A}_3|\frac{N}{18} + x\frac{17N}{18} \\ &< \frac{21}{32} y \frac{N}{18} + \frac{17}{18} xN = \frac{3}{4} y \frac{7}{144} N + \frac{17}{18} xN \\ &< (x+1)\frac{7}{144} N + \frac{17}{18} xN < \frac{143}{144} xN + \frac{N}{20}. \end{aligned}$$

Nous avons donc :

$$\sum_{k=1}^{x} P(\mathcal{A}, k) = |\bigcup_{k=1}^{x} \mathcal{P}(\mathcal{A}, k)| < \frac{143}{144} xN + \frac{N}{20}.$$

Par le lemme 1, ceci entraîne :

$$\begin{aligned} \frac{143}{144} xN + \frac{N}{20} &> \sum_{k=1}^{x} P(\mathcal{A}, k) \geq \sum_{k=1}^{x} (k(y-k)+1) \\ &= y\sum_{k=1}^{x} k - \sum_{k=1}^{x} k^2 + x = y\frac{x(x+1)}{2} - \frac{x(x+1)(2x+1)}{6} + x \end{aligned}$$

et en utilisant $x = [3y/4]$,

$$\frac{143}{144}\frac{3}{4}yN + O(N) > \frac{1}{2}(\frac{3}{4})^2y^3 - \frac{1}{3}(\frac{3}{4})^3y^3 + O(y^2).$$

Nous avons donc, lorsque $y \to \infty$,

$y^2 < (1+o(1))\frac{143}{192}\left(\frac{1}{2}(\frac{3}{4})^2 - \frac{1}{3}(\frac{3}{4})^3\right)^{-1}N = ((1+o(1))\frac{143}{27}N$

et pour $N \to +\infty$,

$$y < (1+o(1))(\frac{143}{27}N)^{1/2}. \tag{7}$$

DEUXIÈME CAS.

On suppose que

$$|\mathcal{A}_3| \geq \frac{21}{32}y \tag{8}$$

et

$$|\mathcal{A}_1| < \frac{1}{32}y. \tag{9}$$

Posons $z = [\frac{3}{32}y] + 1$. Le plus petit élément de $\bigcup_{k=z}^{x}\mathcal{P}(\mathcal{A},k)$ est le plus petit élément de $\mathcal{P}(\mathcal{A},z)$ et vaut :

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{z}a_j &= \sum_{j=1}^{|\mathcal{A}_1|}a_j + \sum_{j=|\mathcal{A}_1|+1}^{z}a_j > \sum_{j=|\mathcal{A}_1|+1}^{z}N/2\\ &= (z-|\mathcal{A}_1)\frac{N}{2} > (\frac{3}{32}y - \frac{1}{32}y)\frac{N}{2} = \frac{yN}{32},\end{aligned}$$

en utilisant (9). Par ailleurs, le plus grand élément de $\bigcup_{k=z}^{x}\mathcal{P}(\mathcal{A},k)$ est

$$\sum_{j=0}^{x-1}a_{y-j} \leq \sum_{j=0}^{x-1}N = xN \leq \frac{3}{4}yN,$$

et donc

$$\bigcup_{k=z}^{x}\mathcal{P}(\mathcal{A},k) \subset [\frac{yN}{32}, \frac{3}{4}yN].$$

Puisque $\mathcal{A}$ est admissible, ceci entraîne,

$$(10)\quad \sum_{k=z}^{x} P(\mathcal{A},k) = |\bigcup_{k=z}^{x} \mathcal{P}(\mathcal{A},k)| < \frac{3}{4}yN - \frac{1}{32}yN + 1$$
$$= \frac{23}{32}yN + 1.$$

Maintenant, par le lemme 1, nous obtenons la minoration :

(11)
$$\sum_{k=z}^{x} P(\mathcal{A},k) \geq \sum_{k=z}^{x}(k(y-k)+1) = y\sum_{k=z}^{x} k - \sum_{k=z}^{x} k^2 + x - z + 1$$
$$= y\frac{x(x+1)-(z-1)z}{2} - \frac{x(x+1)(2x+1)}{6} + \frac{(z-1)z(2z-1)}{6} + x - z + 1$$
$$= \frac{1}{2}y\left((\frac{3}{4}y)^2 - (\frac{3}{32}y)^2\right) - \frac{1}{3}(\frac{3}{4}y)^3 + \frac{1}{3}\left(\frac{3}{32}y\right)^3 + O(y^2)$$
$$= \frac{4473}{32768}y^3 + O(y^2).$$

On déduit de (10) et (11) que :

$$\frac{23}{32}N > \frac{4473}{32768}y^2 + O(y)$$

d'où il vient lorsque $N \to \infty$,

$$(12)\quad y < (1+o(1))\left(\frac{23552}{4473}N\right)^{1/2} (= (1+o(1))2.294639...N^{1/2}).$$

TROISIÈME CAS. Nous supposons maintenant

$$(13)\quad |\mathcal{A}_3| \geq \frac{21}{32}y$$

et

$$(14)\quad |\mathcal{A}_1| \geq \frac{1}{32}y.$$

Posons $u = [y/32]$. Nous allons d'abord minorer $P(\mathcal{A},k)$ lorsque

$$(15)\quad u \leq k < 9u.$$

Considérons toutes les sommes de la forme

$$(16) \qquad a_1 + a_2 + \ldots + a_u + a_{i_1} + a_{i_2} + \ldots + a_{i_{k-u}}$$

avec

$a_{i_1} < a_{i_2} < \ldots < a_{i_{k-u}}$, *et* $a_{i_j} \in \mathcal{A}_3$ pour $j = 1, 2, \ldots, k-u$. Le nombre de sommes de cette forme est $P(\mathcal{A}_3, k-u)$ et par (14) et (15) chacune de ces sommes ne dépasse pas

$$u\frac{N}{2} + (k-u)N = (k - \frac{u}{2})N < (k - \frac{k}{18})N = \frac{17}{18}kN.$$

De plus, pour

$$(17) \qquad a_{j_1} + a_{j_2} + \ldots + a_{j_k} \in \mathcal{P}(\mathcal{A}_3, k)$$

nous avons

$$a_{j_1} + a_{j_2} + \ldots + a_{j_k} > k\frac{17N}{18} = \frac{17}{18}kN$$

et les sommes dans (17) sont ainsi plus grandes que les sommes dans (16). Par ailleurs, les sommes dans (16) et dans (17) appartiennent à $\mathcal{P}(\mathcal{A}, k)$. Ainsi, $P(\mathcal{A}, k)$ est supérieur ou égal au nombre total des sommes dans (16) et dans (17) :

$$P(\mathcal{A}, k) \geq P(\mathcal{A}_3, k-u) + P(\mathcal{A}_3, k) \quad (\text{pour } u \leq k < 9u).$$

D'où il vient par (13) et le lemme 1 :

$$(18) \qquad \begin{aligned} P(\mathcal{A}, k) &\geq (k-u)(|\mathcal{A}_3| - (k-u)) + 1 + k(|\mathcal{A}_3| - k) + 1 \\ &= (2k-u)|\mathcal{A}_3| - 2k^2 + 2ku - u^2 + 2 \\ &> (2k - \frac{y}{32})\frac{21}{32}y - 2k^2 + 2k(\frac{y}{32} - 1) - (\frac{y}{32})^2 \\ &= (\frac{11}{8}y - 2)k - \frac{11}{512}y^2 - 2k^2 \qquad (\text{pour } u \leq k < 9u). \end{aligned}$$

Le plus grand élément de $\bigcup_{k=1}^{x} \mathcal{P}(\mathcal{A}, k)$ est $\leq xN$ (où, comme précédemment, $x = [3y/4]$), et comme $\mathcal{A}$ est admissible,

$$\sum_{k=1}^{x} P(\mathcal{A}, k) \leq xN.$$

Par le lemme 1 et (18) nous avons :

$$
\begin{aligned}
\frac{3}{4}yN \geq xN &\geq \sum_{k=1}^{x}(k(y-k)+1) \\
&+ \sum_{k=u}^{9u-1}\left(\left((\frac{11}{8}y-2)k-\frac{11}{512}y^2-2k^2\right)-k(y-k)-1\right) \\
&= \sum_{k=1}^{[3y/4]}(k(y-k)+1)+\sum_{k=u}^{9u-1}\left((\frac{3}{8}y-2)k-\frac{11}{512}y^2-k^2-1\right) \\
&= y\sum_{k=1}^{[3y/4]}k-\sum_{k=1}^{[3y/4]}k^2+\mathrm{O}(y)+\frac{3}{8}y\sum_{k=u}^{9u-1}k-\frac{11}{512}y^2.8u-\sum_{k=u}^{9u-1}k^2+\mathrm{O}(y^2) \\
&= \frac{1}{2}y\left(\frac{3y}{4}\right)^2-\frac{1}{3}\left(\frac{3y}{4}\right)^3+\frac{3}{8}y.\frac{1}{2}80u^2-\frac{11}{64}y^2u-\frac{728}{3}u^3+\mathrm{O}(y^2) \\
&= \left(\frac{9}{32}-\frac{9}{64}+15.\frac{1}{32^2}-\frac{11}{64}.\frac{1}{32}-\frac{728}{3}.\frac{1}{32^3}\right)y^3+\mathrm{O}(y^2) \\
&= \frac{1751}{12288}y^3+\mathrm{O}(y^2)
\end{aligned}
$$

d'où l'on déduit

$$
y \leq ((1+\mathrm{o}(1))\left(\frac{9216}{1751}N\right)^{1/2} (=1+\mathrm{o}(1))2.294183...N^{1/2}). \tag{19}
$$

La démonstration du théorème 1 résulte alors de (7), (12) et (19).

4. Quelques conjectures

Il est commode de définir :

$$
g(N) = [2\sqrt{N+1/4}-1].
$$

On a donc

$$
\begin{array}{ll}
\text{pour } m^2 \leq N < m(m+1) & g(N) = 2m-1 \\
\text{pour } m(m+1) \leq N < (m+1)^2 & g(N) = 2m.
\end{array}
$$

Nous dirons ensuite qu'un ensemble admissible $\mathcal{A}$ est N-optimal si $\mathcal{A} \subset \mathbb{N}_N$, et $|\mathcal{A}| = F(N)$. Nous noterons $p(N)$ le nombre d'ensembles admissibles

N optimaux, et par $a(N)$ le nombre d'ensembles admissibles non vides $\mathcal{A} \subset \mathbb{N}_N$.

Nous dirons aussi qu'un ensemble $\mathcal{A}$ est impair si tous les éléments de $\mathcal{A}$ sont impairs. Dans le cas contraire, c'est-à-dire si $\mathcal{A}$ contient un nombre pair, nous dirons que $\mathcal{A}$ est non impair. Nous définissons

$$h(N) = \min_{\mathcal{A} \in E_N} (\min \mathcal{A})$$

où $\mathcal{A}$ parcourt l'ensemble E_N des ensembles admissibles N-optimaux et non impairs. Si $E_N = \emptyset$, alors $h(N) = +\infty$.

J.-P. Massias et M. Deléglise ont donné la liste des ensembles N-optimaux pour $N \leq 50$, et l'on trouvera un extrait de leurs résultats dans la table en annexe. Ces calculs sur ordinateur montrent un comportement très régulier qui nous conduit aux conjectures suivantes :

CONJECTURE 1. *On a pour tout $N \geq 1$]*

$$F(N) = g(N) = [2\sqrt{N + 1/4} - 1],$$

et l'ensemble (ii) de Straus est N-optimal.

Conjecture 2. *Lorsque N est de la forme m^2 ou $m(m+1)$, on a $p(N) = 1$, autrement dit l'ensemble (ii) de Straus est le seul ensemble admissible N-optimal. De façon plus générale, soit $t \geq 0$. Il existe deux fonctions $m_0(t)$ et $q(t)$ telles que, pour $m \geq m_0(t)$ on ait*

$$p(m^2 + t) = p(m(m+1) + t) = q(t)$$

et l'on a $q(0) = 1$, $q(1) = 2$, $q(2) = 5$.

Conjecture 3. *Les ensembles admissibles N-optimaux impairs sont :*

$\mathcal{A}_1 = \{N, N-2, ..., N-2g(N)+2\}$ *lorsque $N = m^2 - 2$ et m impair, lorsque $N = m^2 - 1$ et m pair et lorsque $N = m(m+1) - 1$ et*

$\mathcal{A}_2 = \{N, N-2, ..., N-2g(N)+4,\ N-2g(N)\}$ *lorsque $N = m^2 - 1$ avec m pair et lorsque $N = m(m+1) - 1$.*

Il est facile de voir que les ensembles ci-dessus ont $g(N)$ éléments et sont admissibles, et donc sous réserve de la conjecture 1 sont N- optimaux.

De façon plus générale on peut caractériser les progressions arithmétiques admissibles

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}(k, r, N) = \{N, N - r, ..., N - (k - 1)r\}$$

avec $r \geq 1$, $k \geq 1$ et $(N, r) = 1$ par la condition :

$$(k + r)^2 \leq 4N + 2r(r + 1) - 3.$$

Ce résultat se démontre comme (*ii*) en observant que, comme $(N, r) = 1$, il suffit de comparer la somme des j plus grands termes de $\mathcal{A}$ avec la somme des $(j + r)$ plus petits termes de $\mathcal{A}$, et ceci pour $1 \leq j \leq k - r$.

Un calcul un peu technique montre que pour $r \geq 3, \mathcal{A}(g(N), r, N)$ n'est pas admissible, et pour $r = 2$ et N impair, $\mathcal{A}(g(N), 2, N)$ est admissible seulement dans les cas décrits à la conjecture 3.

Conjecture 4. *Pour $N \geq 16$, la fonction $N \mapsto h(N)$ est constante sur les intervalles $(m^2, m(m+1) - 1)$ et $(m(m+1), (m+1)^2 - 1)$. On a de plus $h(m^2) = m^2 - 2m + 2$ et $h(m(m + 1)) = m^2 - m + 1$.*

Comportement de $a(N)$. Il est clair que toute partie d'un ensemble admissible est admissible. Il résulte donc de (*ii*) que

$$a(N) \geq 2^{g(N)} - 1 \geq 2^{2\sqrt{N}-2} - 1.$$

Par ailleurs, il résulte du lemme 2, en posant $k = [\frac{4}{\sqrt{3}} N^{1/2} + 1]$, que

$$a(N) \leq \sum_{j=0}^{k} \binom{N}{j} \leq N \binom{N}{k} \leq N \left(\frac{Ne}{k}\right)^k \leq \exp(c\sqrt{N} \log N)$$

pour un certain c.

Il nous semble difficile de préciser davantage le comportement de $a(N)$. L'étude de la table numérique laisse penser que

$$\log\ a(N) \asymp \sqrt{N \log N},$$

mais nous conjecturons cependant que l'on a $\log\ a(N) \asymp \sqrt{N}$.

5. Suites infinies.

Nous allons maintenant étudier les ensembles infinis admissibles. Si $\mathcal{A} \subset \mathbb{N}$, et $x > 0$, on pose

$$A(x) = \sum_{n \in \mathcal{A}, n \leq x} 1$$

et nous conjecturons que si $\mathcal{A}$ est admissible, alors

$$\liminf_{x \to \infty} A(x) x^{-1/2} = 0.$$

(La limite ci-dessus est finie par (1).) Malheureusement nous n'avons pas été capables de le démontrer.

Par ailleurs, Erdös [1] a démontré qu'il existe $c > 0$ (la valeur de c n'est pas précisée) et un ensemble infini admissible $\mathcal{A}$ tel que

$$A(x) > x^c \text{ pour } x > x_0.$$

Peut-être est-il possible d'obtenir

$$A(x) \gg x^{1/2 - \epsilon}.$$

Nous prouvons seulement le résultat plus faible :

THÉORÈME 2. *Il existe un ensemble infini admissible $\mathcal{A} \subset \mathbb{N}$ vérifiant pour $x > x_0$:*

$$A(x) \gg x^{5 - 2\sqrt{6}} \quad (= x^{0.10102\ldots}) \tag{20}$$

Démonstration. Soit $x_0 = 0$, et pour $N = 1, 2, \ldots$, posons $x_N = K^{((2+\sqrt{6})/2)^N}$, avec $K = 40$.

Par récurrence nous allons définir les ensembles de nombres entiers positifs $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \ldots$ vérifiant

$$\mathcal{A}_N \subset]x_{N-1}, x_N]. \tag{21}$$

Lorsque $N = 1$, on pose $T_1 = 1$ et

$$\mathcal{A}_1 = \{[x_1] - i \; ; \; 1 \leq i \leq x_1^{(\sqrt{6}-2)/2}\}.$$

Pour $N \geq 2$, supposant construits $\mathcal{A}_1, ..., \mathcal{A}_{N-1}$, on pose

$$T_N = \sum_{n=1}^{N-1} \left(\sum_{a \in \mathcal{A}_n} a \right) + 1$$

et

$$\mathcal{A}_N = \{T_N[x_N/T_N] - iT_N \; ; \; 1 \leq i \leq x_N^{(\sqrt{6}-2)/2}\}.$$

Maintenant nous allons démontrer l'inclusion (21) pour tout N. On remarque d'abord que, pour $N \geq 1$, on a :

$$x_{N-1} \leq \frac{1}{K} x_N \quad \text{et} \quad x_N \geq K. \tag{22}$$

De plus, d'après la définition de $\mathcal{A}_N$, on a :

$$\mathcal{A}_N \subset]x_N - (1 + x_N^{(\sqrt{6}-2)/2})T_N, x_N]. \tag{23}$$

En tenant compte de (22) et (23), il suffit de démontrer

$$(x_N^{(\sqrt{6}-2)/2} + 1)T_N < \frac{K-1}{K} x_N \tag{24}$$

pour démontrer (21).

Or (24) se vérifie numériquement lorsque $N = 1$. Pour $N > 1$, les définitions de $\mathcal{A}_1, ..., \mathcal{A}_{N-1}$ et T_N entraînent, par (22)

$$\begin{aligned} T_N &\leq \sum_{n=1}^{N-1} |\mathcal{A}_n| x_n + 1 \\ &\leq 1 + \sum_{n=1}^{N-1} x_n^{(\sqrt{6}-2)/2} x_n = 1 + \sum_{n=1}^{N-1} x_n^{\sqrt{6}/2} \\ &\leq x_{N-1}^{\sqrt{6}/2} \left(1 + \frac{1}{K} + ... + \frac{1}{K^{N-2}} + \frac{1}{x_{N-1}}\right) \leq x_{N-1}^{\sqrt{6}/2} \left(\frac{K}{K-1} + \frac{1}{K}\right) \\ &\leq \frac{K+1}{K-1} x_{N-1}^{\sqrt{6}/2} = \frac{K+1}{K-1} (x_N^{(2/(2+\sqrt{6})})^{\sqrt{6}/2} = \frac{K+1}{K-1} x_N^{\sqrt{6}/(\sqrt{6}+2)}. \end{aligned} \tag{25}$$

Nous avons ainsi

$$x_N^{(\sqrt{6}-2)/2} T_N \leq \frac{K+1}{K-1} x_N^{(\sqrt{6}-2)/2 + \sqrt{6}/(\sqrt{6}+2)}$$

$$= \frac{K+1}{K-1} x_N^{1-1/(\sqrt{6}+2)} \leq \frac{K+1}{K-1} K^{-1/(\sqrt{6}+2)} x_N$$

d'où l'on déduit (24) en vérifiant numériquement que

$$2\frac{K+1}{K-1} K^{-1/(\sqrt{6}+2)} \leq \frac{K-1}{K}.$$

On pose $\mathcal{A} = \bigcup_{N=1}^{\infty} \mathcal{A}_N$. Nous allons montrer que cet ensemble est admissible et qu'il vérifie (20).

D'abord nous allons montrer que pour tout N, l'ensemble $\mathcal{A}_N$ est admissible. Il suffit pour cela de montrer que pour $1 \leq k \leq |\mathcal{A}_N| - 1$,

$$r \in \mathcal{P}(\mathcal{A}_N, k), \quad s \in \mathcal{P}(\mathcal{A}_N, k+1), \tag{26}$$

on a

$$r < s. \tag{27}$$

On pose $y_N = T_N[x_N/T_N]$ et

$$z_N = |\mathcal{A}_N| = [x_N^{(\sqrt{6}-2)/2}]. \tag{28}$$

Nous avons alors

$$\begin{aligned} s - r &\geq (y_N - z_N T_N) + (y_N - (z_N - 1)T_N) + \ldots + (y_N - (z_N - k)T_N) \\ &\quad - (y_N + (y_N - T_N) + \ldots + (y_N - (k-1)T_N)) \\ &= (y_N - (k+1)z_N T_N + (\frac{k(k+1)}{2} + \frac{(k-1)k}{2})T_N \\ &= y_N - (k+1)z_N T_N + k^2 T_N + k^2 T_N \overset{\text{def}}{=} f(k). \end{aligned}$$

Le minimum du trinôme $f(k)$ est atteint en $k = z_N/2$ et donc

$$\begin{aligned} s - r &\geq f(z_N/2) = y_N - (\frac{z_N}{2} + 1)z_N T_N + \frac{z_N^2}{4} T_N \\ &= y_N - (\frac{z_N^2}{4} + z_N)T_N \geq x_N - (\frac{z_N^2}{4} + z_N + 1)T_N. \end{aligned} \tag{29}$$

Par (25) et (28), (29) devient :

$$\begin{aligned}
s - r &\geq x_N - \left(\frac{x_N^{\sqrt{6}-2}}{4} + x_N^{(\sqrt{6}-2)/2} + 1 \right) \frac{K+1}{K-1} x_N^{\sqrt{6}/(\sqrt{6}+2)} \\
&= x_N \left(1 - \frac{K+1}{K-1} \left(\frac{1}{4} + x_N^{-1/(2+\sqrt{6})} + x_N^{-2/(2+\sqrt{6})} \right) \right) \\
&\geq x_N \left(1 - \frac{K+1}{K-1} \left(\frac{1}{4} + K^{-1/(2+\sqrt{6})} + K^{-2/(2+\sqrt{6})} \right) \right) \\
&\geq 7x_N/100 > 0
\end{aligned}$$

ce qui prouve (27), et donc que pour tout $N \geq 1$, $\mathcal{A}_N$ est admissible.

Nous devons montrer maintenant que l'ensemble $\mathcal{A} = \bigcup_{N=1}^{\infty} \mathcal{A}_N = \{a_1 < a_2 < \ldots\}$ est aussi admissible. Raisonnons par l'absurde, et supposons que $\mathcal{A}$ a deux sous-ensembles de mêmes sommes, avec un nombre différent d'éléments, c'est-à-dire qu'il existe des entiers $i_1 < i_2 < \ldots < i_u, j_1 < j_2 < \ldots < j_v$ tels que

$$\sum_{k=1}^{u} a_{i_k} = \sum_{k=1}^{v} a_{j_k} \ , \ u \neq v. \tag{30}$$

Nous pouvons supposer que $i_u \leq j_v$, et que $a_{i_1}, \ldots, a_{i_u}, a_{j_1}, \ldots, a_{j_v}$ (avec $u \neq v$) est une solution telle que $j_v = \max(i_u, j_v)$ est minimal. On définit N par $a_{j_v} \in \mathcal{A}_N$ (on a évidemment $N \geq 2$) et soit u' et v' les plus grands nombres tels que

$$\{a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_{u'}}\} \subset \bigcup_{n=1}^{N-1} \mathcal{A}_n$$

(et l'on a, ou bien $u' = u$, ou bien $a_{i_{u'+1}} \in \mathcal{A}_N$) et

$$\{a_{j_1}, a_{j_2}, \ldots, a_{j_{v'}}\} \subset \bigcup_{n=1}^{N-1} \mathcal{A}_n \ ;$$

si l'on a $a_{i_1} \in \mathcal{A}_N$, on pose $u' = 0$. Alors $T_n | a_{i_k}$ pour $u' < k \leq u$ et $T_N | a_{j_k}$ pour $v' < k \leq v$, et (30) entraîne

$$\sum_{k=1}^{u'} a_{i_k} \equiv \sum_{k=1}^{v'} a_{j_k} \mod T_N. \tag{31}$$

De plus, nous avons

$$(32) \qquad \left|\sum_{k=1}^{u'} a_{i_k} - \sum_{k=1}^{v'} a_{j_k}\right| \leq \sum_{n=1}^{N-1} \sum_{a\in\mathcal{A}_n} a < T_N.$$

Par (31) et (32), il vient

$$(33) \qquad \sum_{k=1}^{u'} a_{i_k} = \sum_{k=1}^{v'} a_{j_k}$$

et tous les termes ci-dessus appartiennent à $\bigcup_{n=1}^{N-1} \mathcal{A}_n$. Mais j_v a été choisi minimum ; cela implique

$$(34) \qquad u' = v'.$$

On a ensuite par (30), (33) et (34)

$$\sum_{k=u'+1}^{u} a_{i_k} = \sum_{k=v'+1}^{v} a_{i_k}$$

et les nombres de termes dans les deux sommes ci-dessus sont différents : $u - u' \neq v - v'$. De plus tous ces termes appartiennent à $\mathcal{A}_N$, mais ceci est impossible puisque nous avons démontré que $\mathcal{A}_N$ est admissible. Cette contradiction termine la preuve que $\mathcal{A}$ est admissible.

Il reste à démontrer (20). Pour $x > x_1$, on définit N par $x_{N-1} < x \leq x_N$. D'après la définition de $\mathcal{A}$, nous avons

$$\begin{aligned} A(x) &\geq A(x_{N-1}) \geq |\mathcal{A}_{N-1}| = \lceil x_{N-1}^{(\sqrt{6}-2)/2} \rceil = \\ &= \lceil (x_N^{2/(2+\sqrt{6})})^{(\sqrt{6}-2)/2} \rceil = \lceil x_N^{5-2\sqrt{6}} \rceil > x_N^{5-2\sqrt{6}} - 1 \end{aligned}$$

et cela achève la démonstration du théorème 2.

Table numérique

N	$a(N)$	$F(N)$	$p(N)$	*Nombre de solutions impaires* N*−optimales*	$h(N)$
1	1	1	1		1
2	3	2	1		1
3	6	2	2	1	2
4	12	3	2		1
5	21	3	4	1	1
6	36	4	1		3
7	59	4	4	1	2
8	98	4	13		1
9	152	5	1		5
10	241	5	5		2
11	362	5	10	2	3
12	545	6	1		7
13	794	6	2		7
14	1165	6	5		7
15	1650	6	13	2	6
16	2378	7	1		10
17	3315	7	2		10
18	4621	7	6		10
19	6335	7	14	2	10
20	8742	8	1		13
21	11688	8	2		13
22	15792	8	5		13
23	20918	8	11	1	13
24	27713	8	20		13
25	36260	9	1		17

.../...

N	$a(N)$	$F(N)$	$p(N)$	*Nombre de solutions impaires* N*–optimales*	$h(N)$
26	47479	9	2		17
27	61065	9	5		17
28	79139	9	11		17
29	101145	9	23	2	17
30	128998	10	1		21
31	163421	10	2		21
32	207304	10	5		21
33	259298	10	10		21
34	325692	10	20		21
35	405614	10	38	2	21
36	503625	11	1		26
37	622853	11	2		26
38	769232	11	5		26
39	941482	11	10		26
40	1156143	11	21		26
41	1410171	11	39	2	26
42	1711663	12	1		31
43	2076250	12	2		31
44	2513965	12	5		31
45	3023894	12	10		31
46	3639397	12	20		31
47	4366367	12	37	1	31
48	5212730	12	65		31
49	6225734	13	1		37
50	7413601	13	2		37

References

[1] P. ERDÖS, *Számelméleti megjegyzések, III*, Mat. Lapok **13** (1962), 28–38.

[2] E.G. STRAUS, *On a problem in combinatorial number theory*, J. Math. Sci. I (1966), 77–80.

P. Erdös, A. Sárközy
Magyar Tudományos Akadémia

Matematikai Kutató Intézete
Realtanoda utca 13-15
PF 127
H-1364 BUDAPEST V - HONGRIE.
et
J.-L. NICOLAS
Departement de Mathématiques, bât. 101
Université Claude Bernard, Lyon 1
F-69622 VILLEURBANNE Cedex - FRANCE.