

FRANÇOIS SIGRIST

## Formes quadratiques encapsulées

*Journal de Théorie des Nombres de Bordeaux 2<sup>e</sup> série*, tome 2, n° 2 (1990),  
p. 425-429

[http://www.numdam.org/item?id=JTNB\\_1990\\_\\_2\\_2\\_425\\_0](http://www.numdam.org/item?id=JTNB_1990__2_2_425_0)

© Université Bordeaux 1, 1990, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Journal de Théorie des Nombres de Bordeaux » (<http://jtnb.cedram.org/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

## Formes quadratiques encapsulées.

par FRANÇOIS SIGRIST

### 1. Introduction et notations.

Soit  $x^t Ax$  une forme quadratique positive à  $n$  variables, donnée par sa matrice symétrique  $A$ . On associe à  $A$  un réseau  $R$  de  $\mathbb{R}^n$ , décrit par une matrice  $R$  telle que  $R^t R = A$ . Le minimum  $m(A)$  de la forme sur  $Z^n - \{0\}$  s'appelle le *minimum de  $A$* , c'est le carré de la norme minimale du réseau  $R$ .

La fonction d'Hermite  $\gamma_n(A) = m(A) (\det(A))^{-1/n}$  est un invariant de la classe d'équivalence de  $A$  (pour l'action de  $Gl(n, Z) \times \mathbb{R}^+$ ), et donc un invariant de la géométrie euclidienne du réseau  $R$ . On démontre facilement (cf. [5]) que  $\gamma_n(A)$  est bornée, et atteint son maximum  $\gamma_n$  en une forme quadratique rationnelle. La fonction  $\Delta_n(A) = 2^n \gamma_n(A)^{-n}$ , dite *déterminant au minimum 2*, a donc la propriété que son minimum  $\Delta_n$  est rationnel. Les huit premières valeurs de  $\Delta_n$  sont les seules connues actuellement, et sont 2,3,4,4,4,3,2,1. Les formes correspondantes sont  $A_1, A_2, D_3, D_4, D_5, E_6, E_7, E_8$ . Pour les valeurs supérieures de  $n$ , on ne dispose que d'inégalités. Par exemple,  $\Delta_{12} \leq 2^{-12} 3^6$  s'obtient à l'aide de la forme  $K_{12}$  de Coxeter-Todd [3].

Parmi les ingrédients ad hoc nécessaires à la construction du réseau  $K_{12}$ , l'un d'eux au moins est susceptible d'être généralisé de manière à s'appliquer en toute dimension. Je me propose dans cet article de le décrire en détail, et de montrer comment il permet la construction de nombreuses formes quadratiques intéressantes, parmi lesquelles  $K_{12}$  qui apparaît ainsi avec une nouvelle description. L'argument s'inspire des méthodes associant des réseaux aux codes binaires. Cependant, la lecture de ce qui suit ne requiert aucune connaissance préalable en théorie des codes.

Je noterai  $M^t$  la matrice transposée d'une matrice  $M$ , et j'utiliserai, pour les réseaux et les formes quadratiques, les dénominations en vigueur dans le livre de Conway-Sloane [1].

**Construction de formes encapsulées.**

Soit  $A$  une forme quadratique de réseau  $R$  et de minimum  $m$ . On suppose que  $R$  contient un sous-réseau  $RL$  ( $L$  est ici une matrice entière, et l'indice du sous-réseau considéré est égal à  $|\det L|$ ), tel que sa forme quadratique  $L^tAL$  soit de minimum  $cm$ , avec  $c$  entier. On pose  $B = c^{-1}L^tAL$ , qui est donc à nouveau une forme de minimum  $m$ . Je dirai, pour abrégé, que la forme quadratique  $A$  contient la forme  $cB$ . Une condition nécessaire est fournie par le

LEMME. Si  $A$  contient  $cB$ , l'indice  $f$  de  $RL$  dans  $R$  satisfait l'équation  $f^2 = c^n \Delta_n(B) \Delta_n(A)^{-1}$ .

Preuve :  $c^n \det(B) = \det(L^tAL) = f^2 \det(A)$ . Comme les formes  $A$  et  $B$  ont même minimum, on peut remplacer le déterminant par  $\Delta_n$ , d'où l'assertion.

Dans le cas où la forme  $A$  contient  $cB$ , on considère le réseau de  $\mathbb{R}^{cn}$  engendré par  $RL \oplus \dots \oplus RL$  ( $c$  fois) et par la diagonale  $(R, R, \dots, R)$ . Une base convenable de ce réseau est donnée par la matrice  $S$ , donnée ci-dessous en même temps que  $S^tS$  :

$$S = \begin{pmatrix} R & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ R & RL & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \\ R & 0 & \cdot & \cdot & RL \end{pmatrix} \quad S^tS = \begin{pmatrix} cA & AL & \cdot & \cdot & AL \\ L^tA & cB & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \\ L^tA & 0 & \cdot & \cdot & cB \end{pmatrix}$$

Je noterai  $K(A, cB)$  la forme quadratique  $c^{-1}S^tS$ . Pour conserver l'idée de sa construction, je dirai que la forme quadratique  $K$  est obtenue en encapsulant la forme  $A$  dans  $c$  fois la forme  $B$ . Il est utile de remarquer que le calcul de  $K$  n'utilise que les matrices  $A, B$  et  $L$  (et pas  $R$ ).

THÉORÈME. La forme quadratique  $K(A, cB)$  est de minimum  $m$ .

Corollaire :  $\Delta_{cm}(K) = c^{-n} \Delta_n(A) \Delta_n(B)^{c-1} = f^2 \Delta_n(B)^c$ .

Preuve : Le réseau  $S$  est formé des vecteurs  $w = (w_1, w_2, \dots, w_c)$  ayant la propriété  $w_i = u_0 + v_i$ , avec  $u_0 \in R$  et  $v_i \in RL$ . Par hypothèse,  $|u_0|^2 \geq m$ , et  $|v_i|^2 \geq cm$ . Dès que  $w$  a une composante nulle  $w_i$ , les autres  $w_j$  appartiennent à  $RL$ , et  $|w|^2 \geq cm$ . Si  $w$  a toutes ses composantes non nulles,  $|w|^2 \geq cm$  par Pythagore, d'où le théorème. Pour

le corollaire, on calcule  $c^n \det(K) = \det(S)^2 = \det(R)^2 \det(RL)^{2c-2} = \det(A) \det(cB)^{c-1} = c^{n(c-1)} \det(A) \det(B)^{c-1}$ , et on conclut avec le lemme, CQFD.

### Quelques exemples.

1. Le réseau  $Z^n$  de matrice  $I$  contient le sous-réseau  $D_n$  des points dont la somme des coordonnées est paire (réseau cubique à faces centrées pour  $n = 3$ ). Par conséquent, la forme  $2I$  contient  $2D_n$ , et la forme encapsulée  $K(2I, 2D_n)$  a la propriété que  $\Delta_{2n}(K) = 2^{-n} 2^n 4 = 4$ . Il s'agit bien sûr de  $D_{2n}$ .

2. La forme  $A_2$  est celle du réseau hexagonal dans le plan, qui contient un sous-réseau d'indice 3 dont la forme est  $3A_2$ . L'encapsulation fournit la forme  $K(A_2, 3A_2)$  qui n'est autre que  $E_6$ , puisque  $\Delta_6(K) = 3^{-2} 3^3 = 3$ , et que la matrice  $K$  est entière de minimum 2. Le calcul donne en effet

$$K = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

3. Les quaternions de Hurwitz forment en dimension 4 le réseau  $D_4^*$ , semblable à  $D_4$ . Par multiplication par  $(1+i)$ , on applique ce réseau sur un sous-réseau d'indice 4. Par conséquent,  $D_4$  contient  $2D_4$ , et le calcul fournit

$$K(D_4, 2D_4) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Comme  $\Delta_8(K(D_4, 2D_4)) = 2^{-4} 4^2 = 1$ , cette matrice est celle de  $E_8$ .

4. En itérant la multiplication par  $(1+i)$  de l'exemple 3, on obtient une suite de formes  $F_m$ , de dimension  $2^m$ , telles que  $F_{m+1} = K(F_m, 2F_m)$ , et un calcul facile montre que

$$\Delta_{2^m}(F_m) = 2^{-(m-3)2^{m-1}}$$

Cette valeur est celle prise par les réseaux de Barnes-Wall  $BW_{2^m}$ , qui sont vraisemblablement égaux aux  $F_m$ . C'est le cas pour  $m = 2$  et  $3$  par ce qui précède. En outre pour  $m = 4$ , les formes  $F_4$  et  $BW_{16}$  ont toutes deux 2160 paires de vecteurs minimaux.

5. Une exploration parmi les formes parfaites de dimension 6 révèle que la forme  $E_6$  contient  $2E_6^*$  ( $E_6^*$  est la forme adjointe). On obtient pour la forme encapsulée  $\Delta_{12}(K(E_6, 2E_6^*)) = 2^{-12}3^6$ , valeur prise par la forme de Coxeter-Todd  $K_{12}$ . Voici les matrices  $E$  et  $L$  qui permettent le calcul de  $K$  :

$$E_6 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -2 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -2 & 0 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & 2 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$L^t E_6 L = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 4 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 4 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 4 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 4 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} = 2E_6^*$$

La forme obtenue est équivalente à la forme  $K_{12}$ . Je dois ce fait à David-Olivier JAQUET, qui a obtenu explicitement une équivalence entre  $K(E_6, 2E_6^*)$  et la matrice de  $K_{12}$  donnée dans [3]. La méthode, déjà utilisée dans [4], est basée sur la comparaison des spectres (au sens de Conway-Sloane [2]).

## REFERENCES

- [1] J.H. CONWAY et N.J.A. SLOANE, *Sphere packings, lattices, and groups*, Springer Verlag, New York (1988).
- [2] J.H. CONWAY et N.J.A. SLOANE, *Low-dimensional lattices, III, perfect forms*, Proc. R. Soc. Lond., A 418 (1988), 43-80.
- [3] H.S.M. COXETER et J.A. TODD, *An extreme duodenary form*, Can. J. of Math., 5 (1951), 384-392.
- [4] D.O. JAQUET et F. SIGRIST *Formes quadratiques contiguës à  $D_7$* , C.R. Acad. Sci. Paris 309. (1989) série I, 641-644.

- [5] J. OESTERLÉ, *Empilements de sphères.*, Séminaire Bourbaki 42 (1989-90, n° 727).

Institut de Mathématiques et d'Informatique  
Université de Neuchâtel  
Chantemerle 20  
CH-2007 NEUCHÂTEL (Suisse)