

OLIVIER SALON

Quelles tuiles ! (Pavages apériodiques du plan et automates bidimensionnels)

Journal de Théorie des Nombres de Bordeaux 2^e série, tome 1, n° 1 (1989),
p. 1-26

http://www.numdam.org/item?id=JTNB_1989__1_1_1_0

© Université Bordeaux 1, 1989, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Journal de Théorie des Nombres de Bordeaux » (<http://jtnb.cedram.org/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

Quelles tuiles ! (Pavages apériodiques du plan et automates bidimensionnels)

par OLIVIER SALON

Résumé — La récente découverte des “quasicristaux” et leurs liens avec les pavages de Penrose ont entraîné un regain d’intérêt pour les pavages apériodiques du plan. Nous montrons ici que le pavage régulier de Robinson est engendré par un automate fini bidimensionnel, et qu’il donne une généralisation à deux dimensions du pliage de papier.

Abstract — *Since the recent discovery of “quasicrystals” and of their relationships with the Penrose tilings, the aperiodic tilings of the plane have been studied again by several authors. We show in this paper that the regular Robinson tiling of the plane is generated by a two-dimensional finite automaton ; moreover this tiling is a 2-D generalization of the paperfolding sequence.*

I - Où il est question de pavages du plan

Depuis fort longtemps, et pour des raisons diverses tenant tant à l’esthétique qu’à la nécessité, la nature, son maître d’oeuvre et ses artisans se sont intéressés à certains pavages du plan, c’est-à-dire des recouvrements de ce dernier par des figures planes à motifs -appelés pavés, ou tuiles- assujetties à certaines conditions. Il en va ainsi, par exemple, de l’abeille et des ses précieux alvéoles, ou du carreleur de cuisine.

On peut imposer, par exemple, aux pavés d’être tous des polygones réguliers identiques et d’être placés côté contre côté : il n’existe alors –cela est bien connu– que trois pavages possibles (par des triangles équilatéraux, des carrés ou des hexagones réguliers, voir les trois dessins au haut de la figure 1) ; on peut également chercher les pavages du plan au moyen de polygones réguliers placés côté contre côté tels que les configurations autour de chaque sommet soient toutes identiques, et dans ce cas -on parle de pavages archimédiens- il n’existe que onze types distincts ([Gr-Sh p. 59], voir figure 1).

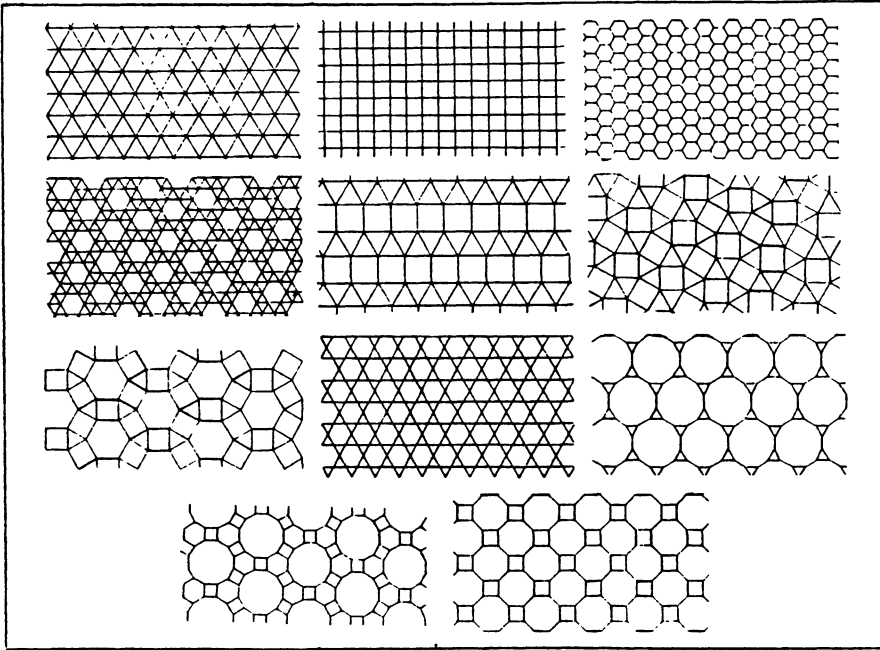


Figure 1

On peut encore demander aux pavés d'être tous images d'un même pavé dans des isométries du plan. Les exemples sont innombrables ; un fort beau est celui de Voderberg, dont le pavé-type est un polygone à neuf côtés ([Vo], voir figure 2).

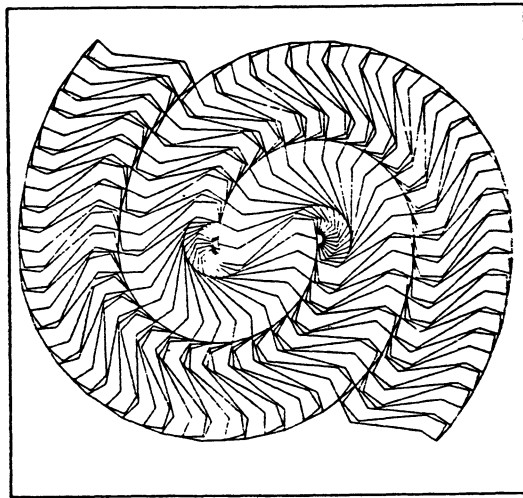


Figure 2

Mais si l'on impose aux isométries de parcourir un sous-groupe de l'ensemble des isométries du plan, on ne trouve alors plus que dix-sept pavages réguliers –c'est-à-dire dix-sept sous-groupes convenables : on parle de groupes de paveurs ([Be], voir figure 4) –bien que, bien entendu, les formes et les motifs des pavés puissent varier à l'infini.¹ Un remarquable exemple de motif est le cavalier de Maurits Cornelis Escher ([Be p. 43], voir aussi Foundation-Haags Gemeentemuseum– La Haye ; figure 3).

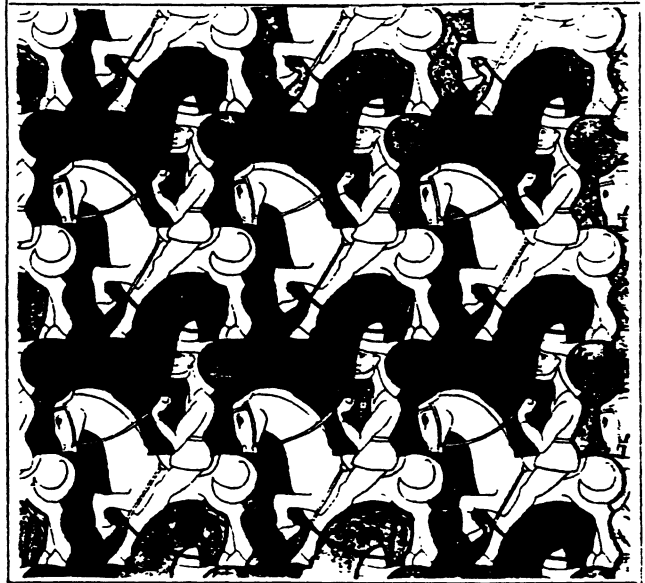


Figure 3

Les cinq premiers pavages sont ceux qui correspondent à un sous-groupe d'isométries positives du plan:

¹to have a tile loose ne signifie-t-il pas perdre la boule ?

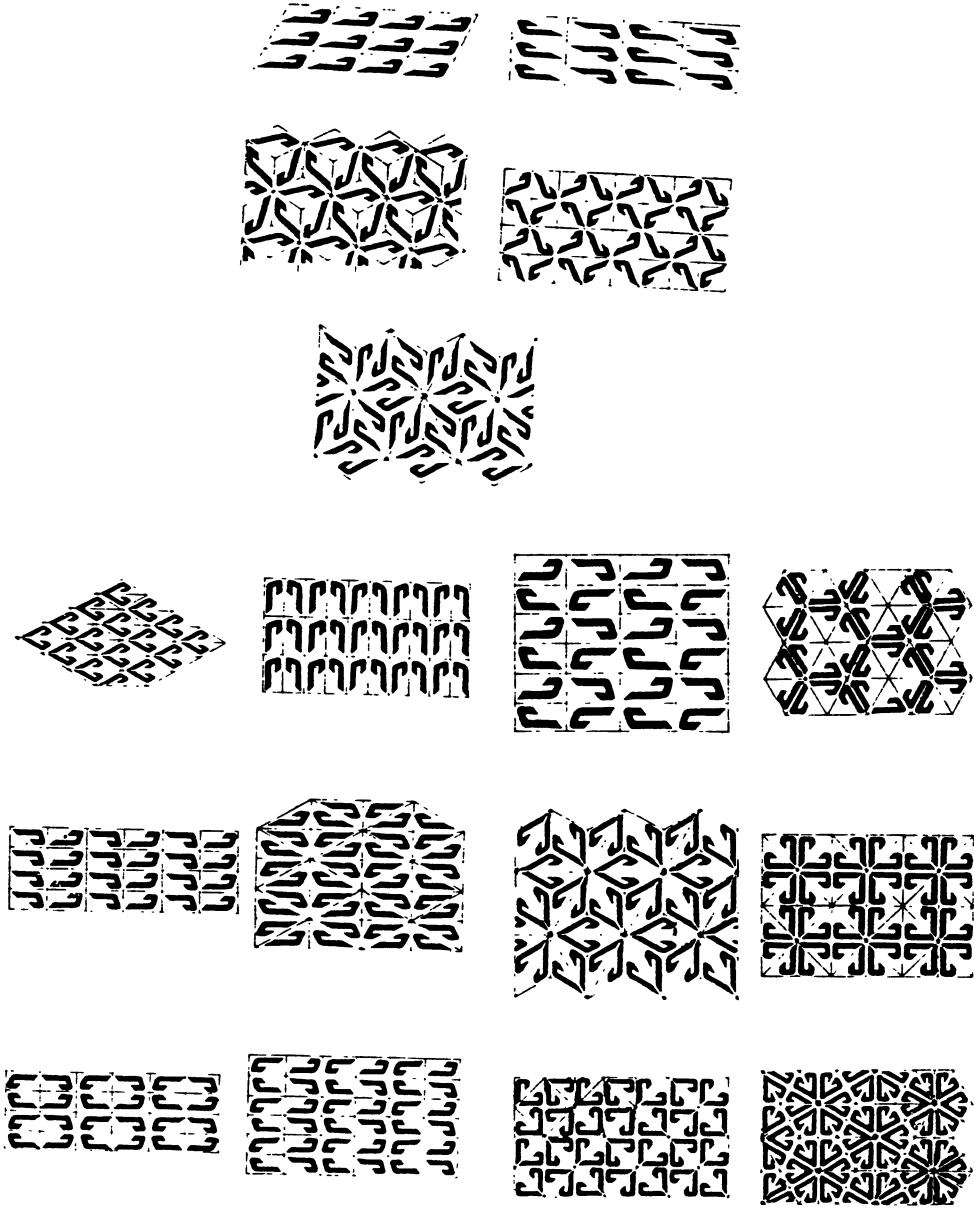


Figure 4

Construite au XIV^e siècle l'Alhambra de Grenade (voir figure 5), richement décorée, comporte des frises à motifs se référant à chacun des dix-sept groupes de paveurs. Il est probable que l'interdiction musulmane de représenter des figures humaines ou animales réduisait les artistes à

n'utiliser que des motifs géométriques, et les avait poussés à découvrir les dix-sept constructions possibles, lesquelles donnent toutes lieu à des pavages périodiques du plan.

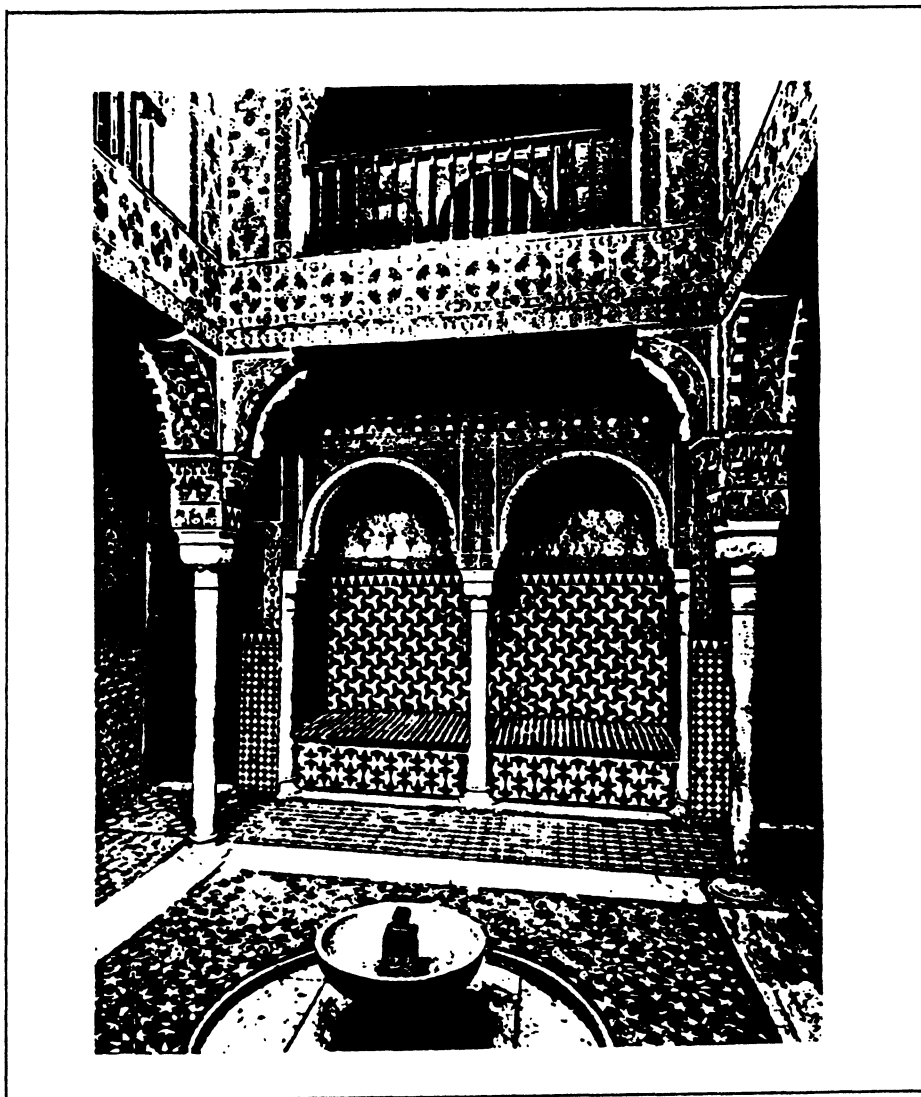


Figure 5

En 1619, l'astronome Johannes Kepler publiait ses travaux concernant des pavages du plan : il mentionnait notamment un étonnant pavage de pentagones réguliers, de décagones réguliers, d'étoiles (tirées du ciel ?) à cinq branches et de "monstres" (sic), couples de décagones réguliers imbriqués ([Gr-Sh p. 57], voir figure 6) ; une façon d'obtenir ce pavage, disséqué par Dessecker en 1964, prouve qu'il s'agit là d'un recouvrement non périodique du plan [Gr-Sh p. 89].

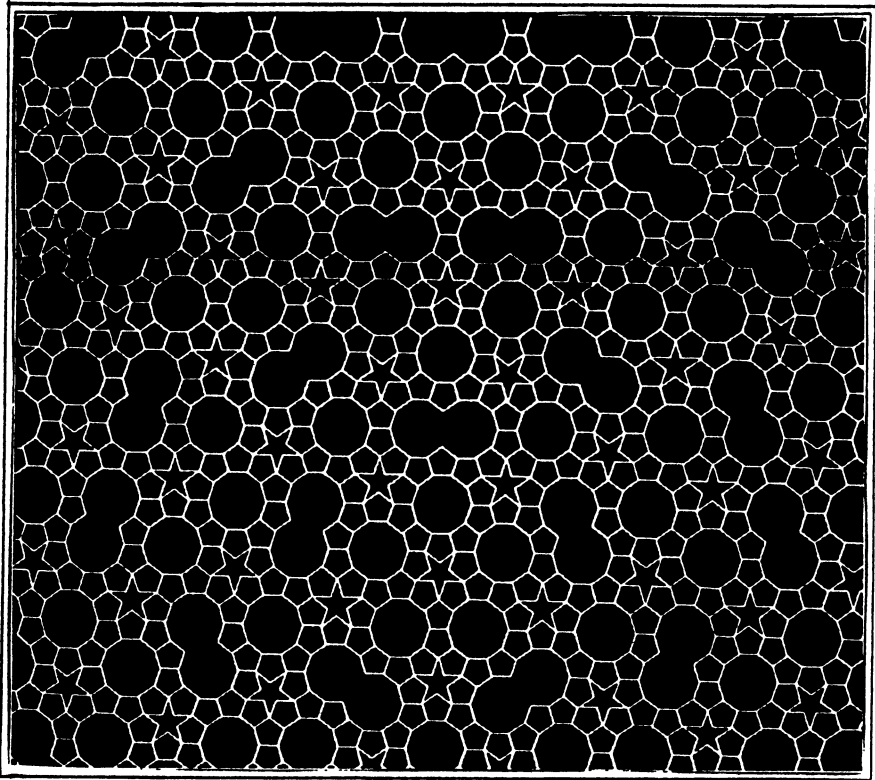


Figure 6

Beaucoup plus récemment, dans les années 1970, furent découvertes de nouvelles façons non périodiques de paver le plan ; en particulier, Penrose mit au jour des pavages du plan présentant une symétrie d'ordre cinq (invariance dans certaines rotations d'angle de mesure $2\pi/5$) ainsi qu'une indiscutable beauté esthétique [Pe] ; nous y revenons plus loin (figure 10).

Dans un tout autre domaine, en cristallographie, depuis les premières expériences à l'aide de rayons X en 1912, tous les cristaux étudiés par diverses méthodes présentaient des structures périodiques, auxquelles

s'adaptait une théorie mathématique, généralisation à un espace de dimension 3 des pavages périodiques du plan.

Mais en 1984, les physiciens Schechtman, Blech, Gratias et Cahn fabriquent un alliage d'aluminium et de manganèse dont le schéma de diffraction présente une symétrie d'ordre cinq ; d'autres alliages sont découverts par la suite, possédant la même propriété. Qui plus est, les expériences prouvent l'existence d'une phase non plus périodique, mais "presque périodique" (voir figure 7) : ce sont les quasi-cristaux, qui remettent en cause certains axiomes de la théorie cristallographique classique ([S-B-G-C] et [S]).

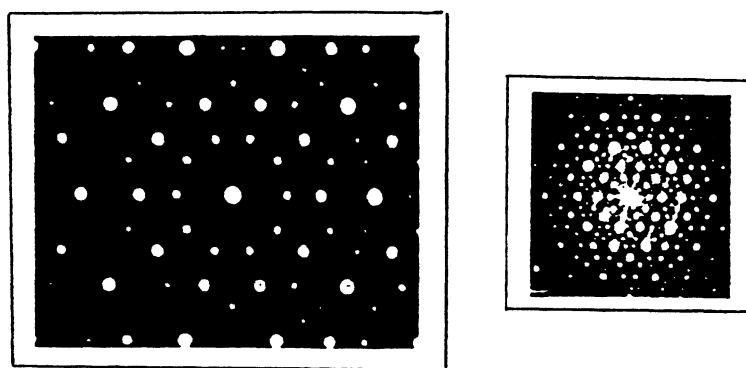


Figure 7

Les pavages de Penrose et leurs extensions dans un espace de dimension trois sont dès lors pressentis par les physiciens comme un modèle concret susceptible de favoriser la compréhension de la structure des alliages en question.

D'où également un regain d'intérêt pour les pavages non périodiques du plan, tel celui de Robinson (étudié au III A de cet article, voir aussi [Al-Sa]) ou celui d'Ammann ([Gr-Sh p. 529-530]).

Notons enfin, pour clore cette liste non exhaustive de pavages que si le plan est en fer, on peut toujours le paver... de bonnes intentions : ce sont les pavages méphistophéliens.

II - Où les automates apparaissent

p désigne un entier supérieur ou égal à 2.

Rappelons qu'un p -automate est un quintuplet (A, x_0, \cdot, T, τ) , où A est un ensemble fini non vide (ensemble d'états), x_0 un élément particulier de A (état initial), \cdot une application de $\{0, 1, \dots, p-1\}^2 \times A$ dans A (qui, à $((m, n), x)$ associe l'élément de A noté $(m, n).x$, et τ une application de A dans un ensemble fini T .

Une suite double $t = (t(m, n))_{(m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}}$ à valeurs dans un ensemble fini T est p -automatique lorsqu'il existe un p -automate (A, x_0, \cdot, T, τ) tel que t soit l'image par τ d'une suite $a = (a(m, n))$ qui vérifie : en écrivant m et n en base p et en complétant éventuellement à gauche par des zéros, de sorte que les deux écritures aient le même nombre de chiffres, et que ce chiffre soit minimum,

$$(m = \sum_{i=0}^{i=k} e_i(m)p^i \text{ et } n = \sum_{i=0}^{i=k} e_i(n)p^i, \text{ avec}$$

$$(e_k(m), e_k(n)) \neq (0, 0) \text{ si } (m, n) \neq (0, 0)), \text{ l'on a :}$$

$$a(m, n) = (e_k(m), e_k(n)).[(e_{k-1}(m), e_{k-1}(n)).[\dots [(e_0(m), e_0(n)).x_0] \dots]]$$

Si l'on considère, par exemple, la suite $\epsilon = (\epsilon(n))$ de Thue-Morse, définie par les relations : $\epsilon(0) = 0$ et, pour tout entier naturel n ,

$$\epsilon(2n) = \epsilon(n) \text{ et } \epsilon(2n+1) = 1 - \epsilon(n),$$

alors on montre [Sa] que la suite double $u = (u(m, n))$ définie par $u(m, n) = \epsilon(m+n)$ est 2-automatique. Une schématisation d'un 2-automate reconnaissant u est donnée en figure 8, avec $A = \{a, b, c, d\}$, $x_0 = a$, et $\tau(a) = 0$, $\tau(b) = 1$, $\tau(c) = 1$, $\tau(d) = 0$.

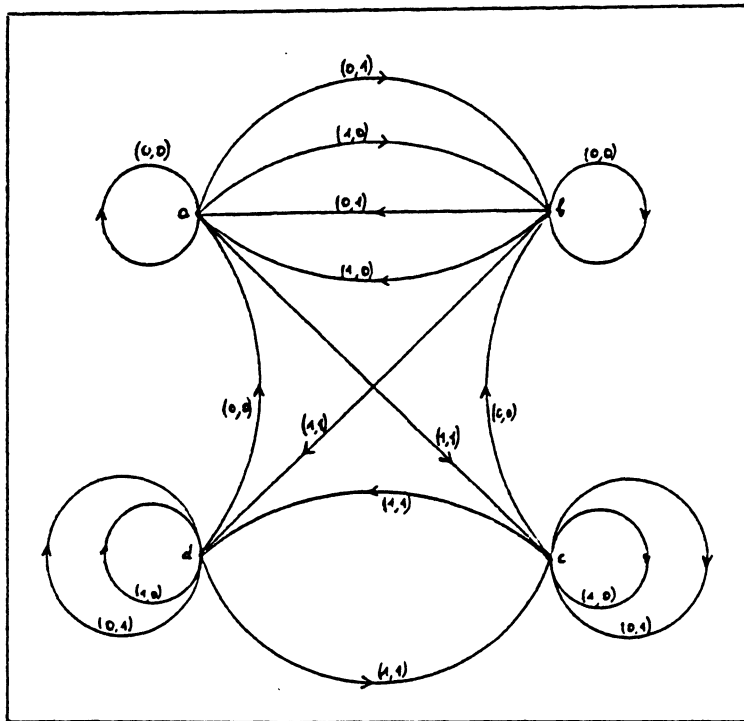


Figure 8

Rappelons également qu'une (p, p) -substitution σ est une application d'un ensemble fini non vide A dans l'ensemble $[A]^{p,p}$ des tableaux d'éléments de A à p lignes et p colonnes, application que l'on prolonge à l'ensemble $[A]^{kp, kp}$ des tableaux d'éléments de A à kp lignes et kp colonnes (où k est un élément quelconque de \mathbf{N}^*), puis à l'ensemble $[A]^{\mathbf{N}, \mathbf{N}}$ des tableaux d'éléments de A possédant une infinité de lignes et une infinité de colonnes. S'il existe dans A un élément x qui figure en haut à gauche du tableau $\sigma(x)$, alors la suite $(\sigma^n(x))_{n \in \mathbf{N}}$ converge vers un élément t de $[A]^{\mathbf{N}, \mathbf{N}}$ qui vérifie $\sigma(t) = t$.

Enfin, le théorème dû à Cobham [Co], puis à Christol, Kamae, Mendès France et Rauzy [C-K-MF-R] et généralisé dans [Sa] pour des suites doubles prouve l'équivalence des quatre propositions suivantes, concernant une suite double $t = (t(m, n))$ à valeurs dans un ensemble fini T et un nombre premier p :

- (i) la suite t est p -automatique

- (ii) t est l'image par une application d'un point fixe d'une (p, p) -substitution (on dit aussi que t est engendrée par une (p, p) -substitution).
- (iii) le p -noyau de t , c'est-à-dire l'ensemble $N_p(t)$ de sous-suites de t : $N_p(t) = \{t(p^a m + r, p^a n + s) ; a \in \mathbf{N}, 0 \leq r, s \leq p^a - 1\}$ est un ensemble fini.
- (iv) Il existe un corps fini K de caractéristique p et une injection I de T dans K tels que la série formelle

$$\sum_{(m,n) \in \mathbf{N}^2} I(t(m,n)) X^m Y^n$$

soit algébrique sur $K(X, Y)$.

Notons que les équivalences des propositions (i), (ii), (iii) ne requièrent pas la primalité de p .

III - Où l'on établit des liens entre pavages et automates

A - Les pavages de Penrose et de Robinson

Certains pavages de Penrose sont constitués des seules tuiles de types A (cerf-volant) et B (flèche) (figure 9). Remarquons que le nombre d'or $\tau = (1 + \sqrt{5})/2$ est égal au rapport de l'aire d'un cerf-volant à l'aire d'une flèche ; τ est aussi le rapport du nombre moyen de cerfs-volants au nombre moyen de flèches par unité d'aire [Gr-Sh. p. 563].

Ces pavages (figure 10) ne présentant aucune structure carrée sous-jacente, il paraît difficile de leur associer une suite double. Néanmoins, on peut observer (figure 11) des bandes infinies formées de pièces de deux types ("noeud papillon long" et "noeud papillon court"), chaque bande -ou ver- pouvant être interprétée comme une suite de 0 et de 1 ; une telle suite, bien que non 2-automatique, est cependant la limite de la suite $(\sigma^n(0))_{n \in \mathbf{N}}$, où σ est la 2-substitution de longueur non constante définie par $\sigma(0) = 01$ et $\sigma(1) = 0$. Cette suite vérifie aussi, pour tout entier naturel n , $\sigma^{n+2}(0) = \sigma^{n+1}(0)\sigma^n(0)$ (concaténation de $\sigma^{n+1}(0)$ et de $\sigma^n(0)$), de sorte que la suite formée du nombre de 0 et de 1 de l'écriture de $\sigma^n(0)$, est la suite de Fibonacci.

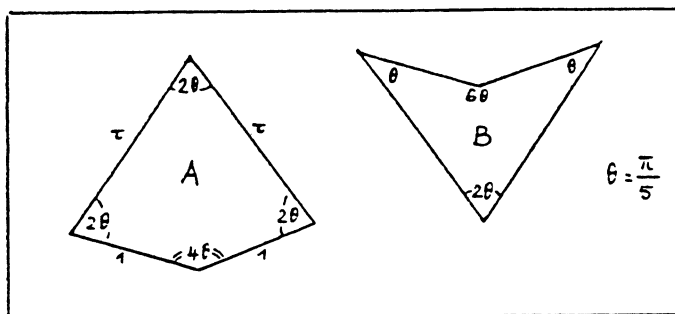


Figure 9

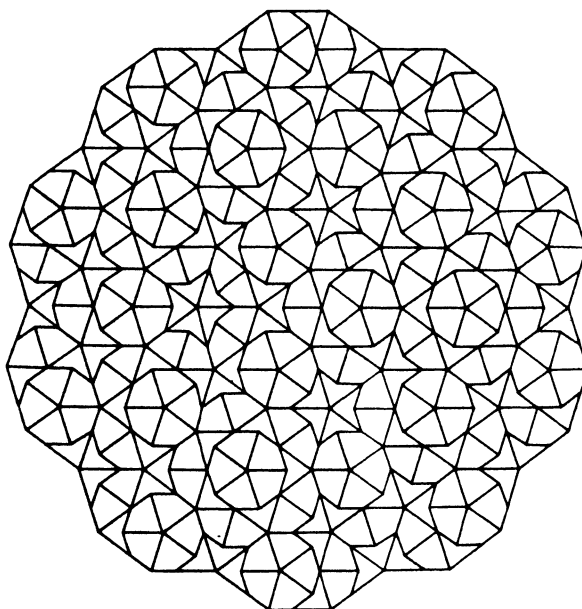


Figure 10

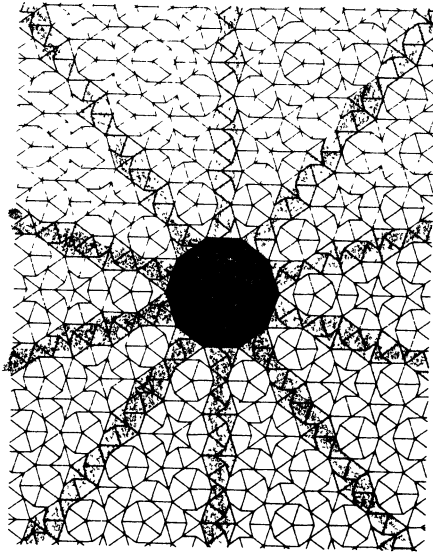


Figure 11

Le pavage de Robinson [Gr-Sh p. 525-529] découvert en 1971, est un recouvrement du plan par des tuiles de six sortes différentes, au départ ; chaque tuile a une base carrée, est soit écornée, soit à coins (quand on lui a rajouté des coins en saillie), et présente sur ses côtés des triangles isocèles ou rectangles en saillie ou en creux (voir figure 12). Pour faciliter la représentation et la notation, les tuiles initiales seront schématisées comme en figure 13 ; les tuiles des types (c), (d), (e) ou (f) auront pour indice la direction (point cardinal) du triangle saillant qu'elles comportent sur un côté, alors que les tuiles des types (a) ou (b) auront pour indice la direction du coin contigu aux deux triangles rectangles en saillie. Enfin les images des tuiles des types (c) ou (d) par un antidéplacement du plan seront respectivement notées (c') ou (d').

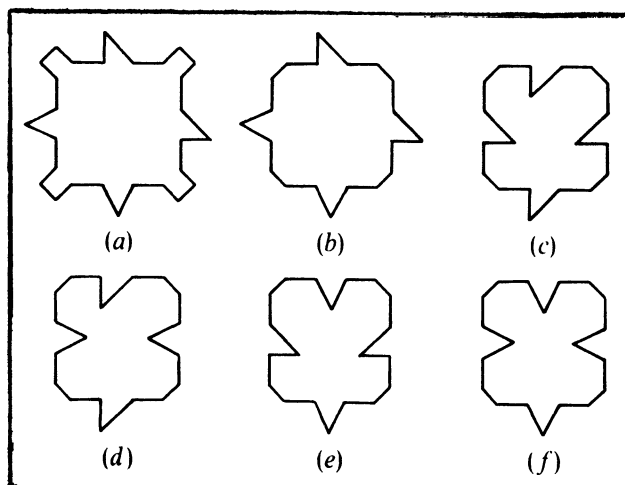


Figure 12

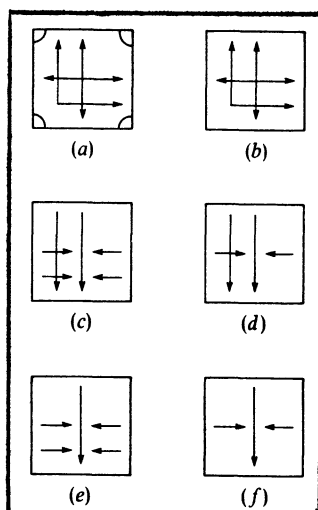


Figure 13

Ainsi, les figures 12 et 13 représentent-elles dans cet ordre :

a_{NE} , b_{NE} , c_S , d_S , e_S , f_S .

Au moyen des six tuiles initiales et de leurs images dans les isométries du carré -ce qui porte à trente-deux le nombre de tuiles modèles distinctes, à une translation près-, R.M. Robinson prouve que l'on peut paver au choix le plan tout entier, un demi-plan, ou encore un quart de plan.

Voici comment l'on peut procéder pour recouvrir un quart de plan : on commence par placer un bloc 3×3 (3 lignes et 3 colonnes), que nous noterons A^1 (voir figure 14) :

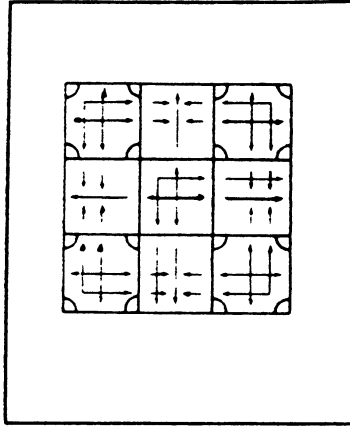


Figure 14

A partir de A^1 , l'on construit un bloc A^2 de taille 7×7 puis un bloc A^3 de taille 15×15 etc..., le bloc A^{k+1} de taille $(2^{k+2} - 1) \times (2^{k+2} - 1)$ se déduisant du bloc A^k , pour k élément de \mathbb{N}^* , par

$$A^{k+1} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline & \begin{array}{c} f_N \\ \cdot \\ \cdot \\ f_N \\ e_N \\ f_N \\ \cdot \\ \cdot \\ f_N \end{array} & \\ \hline \begin{array}{c} A^k \end{array} & & \begin{array}{c} A^k_y \end{array} \\ \hline f_0 \dots f_0 e_0 f_0 \dots f_0 & \begin{array}{c} b_{SE} \\ d'_E \dots d'_E c'_E d'_E \dots d'_E \end{array} & \\ \hline & \begin{array}{c} d_S \\ \cdot \\ \cdot \\ d_S \\ c_S \\ d_S \\ \cdot \\ \cdot \\ d_S \end{array} & \\ \hline \begin{array}{c} A^k_x \end{array} & & \begin{array}{c} A^k_u \end{array} \\ \hline \end{array}$$

où A_x^k, A_y^k et A_w^k désignent respectivement les blocs symétriques de A^k par rapport à la barre horizontale de la croix, la barre verticale de la croix et le centre du carré central de la croix, et où les pointillés représentent $2^k - 1$ fois.

La figure 15 montre une partie de ce que l'on obtient avec $k = 4$; les traits gras délimitent A^1, A^2 et A^3 , les tuiles centrales des blocs sont également entourées en gras.

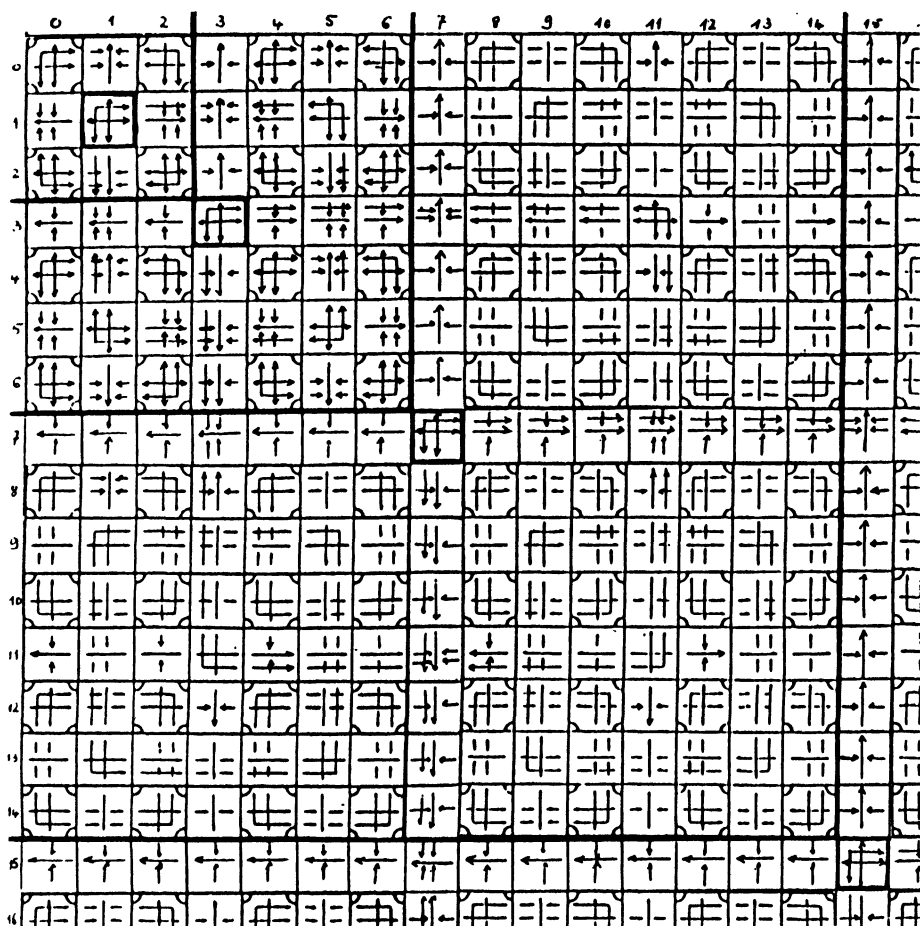


Figure 15

En fait, Robinson explique [Gr-Sh p. 527] que dans chaque bloc A^k , il est possible de faire tourner la croix centrale d'un quart de tour, ou d'un demi-tour ou de trois quarts de tour, cette variation étant déterminée par l'orientation de la tuile (b) centrale, laquelle indique les deux directions dans lesquelles a lieu l'extension de A^k à A^{k+1} . Ainsi, si, au lieu de placer une tuile (b_{SE}) au centre de chaque bloc, ce qui conduit au pavage d'un quart de plan, l'on place une infinité de tuiles (b_{SE}) et une infinité de tuiles (b_{NE}) on aura alors obtenu un pavage d'un demi-plan ; de la même manière, on peut paver le plan en situant, aux centres des blocs A^k , une infinité de tuiles (b) dans chacune des quatre directions possibles.

Au pavage du quart de plan exposé ci-dessus correspond la suite $t = (t(m, n))_{(m, n) \in \mathbf{N}^2}$, où $t(m, n)$ désigne celle des trente-deux tuiles qui se trouve au croisement de la $(m + 1)^{\text{ème}}$ ligne et de la $(n + 1)^{\text{ème}}$ colonne.

On peut démontrer que ce pavage ne présente aucune période. Cela est dû, par exemple, au fait que les tuiles (b_{SE}) n'apparaissent qu'aux rangs $(2^k - 1) \times (2^k - 1)$ (avec k élément de \mathbf{N}^*).

Cependant, la manière même d'obtenir ce pavage nous fait nous poser légitimement la question de la 2-automatisme de la suite t . Et de fait, certaines relations (démontrées au paragraphe IV) entre diverses sous-suites de t permettent de démontrer le théorème :

le 2-noyau de t est fini : il est exactement composé de quarantè-huit suites, dont les trente-deux suites constantes correspondant aux trente-deux tuiles distinctes qui forment le pavage. Ainsi donc la suite t est 2-automatique, et il existe un 2-automate à quarante-huit états (à lecture de la droite vers la gauche) qui la décrit.

B - Où l'on passe de mouchoirs à carreaux

On peut étudier [Bl-MF] le pliage de papier qui consiste à plier une feuille en deux, la moitié droite sur la moitié gauche, puis à recommencer avec la feuille pliée et à poursuivre indéfiniment. Cette manipulation donne lieu, une fois la feuille redépliée et sa tranche considérée, à une suite

$u = (u(p))_{p \in \mathbf{N}}$ qui peut être engendrée de la manière suivante : pour n élément de \mathbf{N} , L_n désigne la suite finie de 0 et de 1 définie par $L_0 = 1$ et $L_{n+1} = L_n \ 1 \ L_n^*$, par concaténation, (L_n^* consiste à écrire les termes successifs de L_n de la droite vers la gauche et à échanger les 0 et les 1; le passage de L_n à L_{n+1} est un effet de "symétrie perturbée"), la suite $(L_n)_{n \in \mathbf{N}}$ converge alors vers la suite u . On peut démontrer que la suite u est 2-automatique.

Et maintenant, plions un large mouchoir en quatre, de la droite vers la gauche, puis la partie inférieure sur la partie supérieure et itérons indéfiniment ce procédé ; intéressons-nous, après avoir redéplié le mouchoir, aux faces (F), aux plis saillants (0) ou rentrants (1), et aux intersections de plis, qui sont le croisement soit de trois plis rentrants et d'un pli saillant (X), soit de trois plis saillants et d'un pli rentrant (Y). Notons B_n le tableau obtenu après avoir n fois plié le mouchoir en quatre (la figure 16 représente B_2).

F	1	F	1	F	0	F
1	X	0	X	1	Y	0
F	1	F	1	F	0	F
1	X	1	X	0	Y	0
F	0	F	1	F	1	F
0	Y	1	X	0	X	1
F	0	F	1	F	1	F

Figure 16

On peut alors vérifier d'une part que le tableau B_n figure en haut à gauche du tableau B_{n+1} , ce qui justifie l'existence d'une limite B à cette suite (B_n) de tableaux ; d'autre part, et plus précisément, que B_{n+1} peut s'obtenir à partir de B_n par la méthode suivante :

$$B_{n+1} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline & \begin{array}{c} 1 \\ X \\ 1 \\ \cdot \\ \cdot \\ X \\ 1 \end{array} & \\ \hline B_n & & B_n^y \\ \hline 1 & X & 1 \dots X & 1 & X & 0 & Y & 0 \dots Y & 0 \\ \hline & \begin{array}{c} 1 \\ X \\ 1 \\ \cdot \\ \cdot \\ X \\ 1 \end{array} & \\ \hline B_n^x & & B_n^w \\ \hline \end{array}$$

où B_n^x , B_n^y et B_n^w sont les tableaux images de B_n dans les symétries respectives s_x , s_y et s_w par rapport à la médiane horizontale du carré B_{n+1} , la médiane verticale et le centre de ce même carré, l'effet de s_x , tout comme celui de s_y , sur les éléments des tableaux étant de conserver F , d'échanger 0 et 1 et d'échanger X et Y , et s_w étant la composée commutative de s_x et de s_y .

Ainsi l'effet du pliage peut également être considéré comme celui d'un dépliage, où le passage de B_n à B_{n+1} s'effectue dans une symétrie perturbée, par une technique analogue à celle du pavage de Robinson.

Le tableau infini B constitue une suite double

$$(b(m, n))_{(m, n) \in \mathbf{N} \times \mathbf{N}}$$

dont la suite aux indices de colonnes impairs de la première ligne n'est autre, par construction, que la suite u obtenue (au début du paragraphe B) par pliage de papier (pour tout entier naturel p , $b(0, 2p + 1) = u(p)$).

Ces raisons font que le pliage de mouchoir est une bonne généralisation à deux dimensions du pliage de papier.

Quant à la suite $c = (c(m, n))$ formée par les intersections des plis dans le "pliage infini" de mouchoir, déjà étudiée dans [Sa], elle apparaît comme la suite double aux deux indices impairs extraite de la suite $b = (b(m, n))$; et puisque la suite b , à l'instar de la suite t (étudiée au III A) représentant le pavage du quart de plan de Robinson, est 2-automatique, il était normal que la suite c le fût également.

IV - Où l'on se retrouve les manches

Nous allons démontrer que la suite $t = (t(m, n))$ évoquée au III A est 2-automatique.

Il suffit pour cela, d'après le théorème rappelé au II, de démontrer que le 2-noyau de t , c'est-à-dire l'ensemble

$$N_2(t) = \{t(2^a m + r, 2^a n + s); a \in \mathbf{N}, 0 \leq r, s \leq 2^a - 1\},$$

est fini, ou encore, ce qui revient au même, de trouver un ensemble fini de sous-suites de t , contenant la suite t elle-même, et stable par les quatre applications λ_i :

$$\begin{aligned} t(m, n) &\xrightarrow{\lambda_1} t(2m, 2n), \quad t(m, n) \xrightarrow{\lambda_2} t(2m + 1, 2n), \\ t(m, n) &\xrightarrow{\lambda_3} t(2m, 2n + 1) \quad \text{et} \quad t(m, n) \xrightarrow{\lambda_4} t(2m + 1, 2n + 1). \end{aligned}$$

LEMME 1.. *Pour tout couple (m, n) de \mathbf{N}^2 , on a $t(n, m) = \bar{t}(m, n)$, $\bar{t}(m, n)$ désignant la tuile symétrique de $t(m, n)$ par rapport à la diagonale NO-SE du carré $t(m, n)$.*

PREUVE: Celle-ci s'effectue par récurrence sur k , indice du premier bloc, parmi les blocs A^1, A^2, \dots définis au III A, qui contient l'élément $t(m, n)$.

On vérifie que le bloc A^1 est symétrique par rapport à sa diagonale NO-SE (figure 14). Il en est de même de la croix centrale de chaque bloc.

On note S_{D_i} la réflexion d'axe D_i ($i \in \{1, 2, 3, 4\}$) et S_ω la symétrie centrale de centre ω , les droites D_i étant les axes de symétrie du bloc A^{k+1} , et ω le centre de ce bloc. Dès lors, en supposant A^k symétrique par rapport à D_1 , on a, pour $a_1 = t(m, n)$ et $b_1 = t(p, q)$ indiqués en figure 17 :

$a_4 = t(n, m) = S_{D_2} \circ S_{D_1} \circ S_{D_4}(a_1) = S_{D_1}(a_1) = \bar{t}(m, n)$
 (car $S_{D_2} \circ S_{D_1} \circ S_{D_4} = S_{D_1}$)
 $b_4 = t(q, p) = S_\omega \circ S_{D_1} \circ S_\omega(b_1) = S_{D_1}(b_1) = \bar{t}(p, q)$
 (car $S_\omega \circ S_{D_1} \circ S_\omega = S_{D_1}$)
 ce qui prouve que A^{k+1} est symétrique par rapport à D_1 .

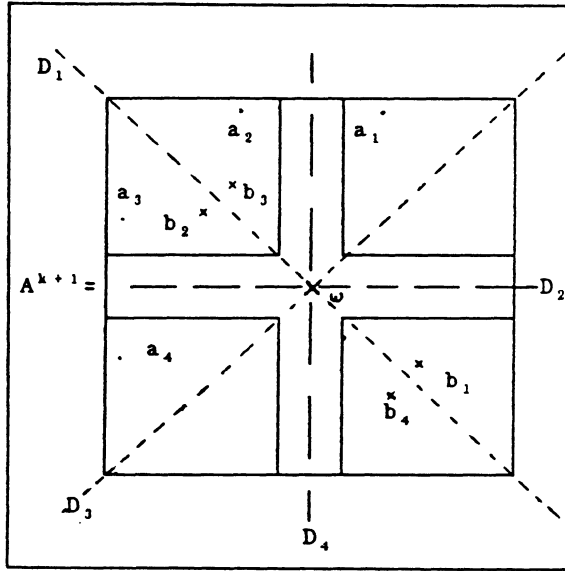


Figure 17

LEMME 2. Pour tout couple (m, n) de \mathbf{N}^2 , on a $t(8m + 1, 8n) = e_O$ et $t(8m + 1, 8n + 6) = e_E$.

PREUVE: D'après la construction même du pavage du quart de plan de Robinson, chaque ligne d'indice m , entier fixé qui n'est pas de la forme $8k + 7$ (où k est un entier naturel), peut être considérée comme limite de la suite $(\ell_n)_{n \in \mathbf{N}}$ définie comme suit :

$\ell_0 = (t(m, i))_{0 \leq i \leq 6}$ et pour tout entier naturel n , $\ell_{n+1} = \ell_n s_n \ell_n^*$, par concaténation, où ℓ_n^* consiste à écrire les termes de ℓ_n de la droite vers la gauche, après avoir transformé chacun de ces termes dans une réflexion d'axe une droite Nord-Sud, et où s_n est un représentant des trente-deux

tuiles du pavage, il est la "perturbation" de cette symétrie.

Ainsi, (toujours à m entier fixé dans \mathbf{N}), la suite formée alternativement d'un terme de $(t(8m + 1, 8n))_{n \in \mathbf{N}}$ et d'un terme de $(t(8m + 1, 8n + 6))_{n \in \mathbf{N}}$ dans l'ordre où ils apparaissent

$$t(m, 0), t(m, 6), t(m, 8), t(m, 14), \text{etc...}$$

est-elle la limite de la suite $(\ell'_n)_{n \in \mathbf{N}}$:

$$\ell'_0 = e_O e_E ; \ell'_1 = \ell'_0 \ell'_0{}^* = e_O e_E e_O e_E ;$$

$$\ell'_2 = \ell'_2 \ell'_2{}^* = e_O e_E e_O e_E e_O e_E e_O e_E ; \text{etc...}$$

D'où : $t(8m + 1, 8n) = e_O$ et $t(8m + 1, 8n + 6) = e_E$.

Et c'est par un argument du même ordre que l'on prouve toutes les relations suivantes, valables pour tout couple (m, n) d'entiers naturels :

$$t(4m + 4n) = a_{SE} ; t_s(4m + 2, 4n) = a_{NE} ;$$

$$t(4m, 4n + 2) = a_{SO} ; t(4m + 2, 4n + 2) = a_{NO} ;$$

$$t(8m + 1, 8n + 1) = b_{SE} ; t(8m + 5, 8n + 1) = b_{NE} ;$$

$$t(8m + 1, 8n + 5) = b_{SO} ; t(8m + 5, 8n + 5) = b_{NO} ;$$

$$t(8m + 1, 8n) = e_O ; t(8m + 5, 8n) = e_O ;$$

$$t(8m + 1, 8n + 4) = c_O ; t(8m + 5, 8n + 4) = c'_O ;$$

$$t(8m + 1, 8n + 2) = c'_E ; t(8m + 5, 8n + 2) = c_E ;$$

$$t(8m + 1, 8n + 6) = e_E ; t(8m + 5, 8n + 6) = e_E ;$$

$$t(8m, 8n + 1) = e_N ; t(8m, 8n + 5) = e_N ;$$

$$t(8m + 4, 8n + 1) = c'_N ; t(8m + 4, 8n + 5) = c_N ;$$

$$t(8m + 2, 8n + 1) = c_S ; t(8m + 2, 8n + 5) = c'_S ;$$

$$t(8m + 6, 8n + 1) = e_S ; t(8m + 6, 8n + 5) = e_S ;$$

$$t(16m + 3, 16n) = f_O ; t(16m + 11, 16n) = f_O ;$$

$$t(16m + 3, 16n + 8) = d_O ; t(16m + 11, 16n + 8) = d'_O ;$$

$$t(16m + 3, 16n + 4) = d'_E ; t(16m + 11, 16n + 4) = d_E ;$$

$$t(16m + 3, 16n + 12) = f_E ; t(16m + 11, 16n + 12) = f_E ;$$

$$t(16m, 16n + 3) = f_N ; t(16m, 16n + 11) = f_N ;$$

$$t(16m + 8, 16n + 3) = d'_N ; t(16m + 8, 16n + 11) = d_N ;$$

$$t(16m + 4, 16n + 3) = d_S ; t(16m + 4, 16n + 11) = d'_S ;$$

$$t(16m + 12, 16n + 3) = f_S ; t(16m + 12, 16n + 11) = f'_S ;$$

LEMME 3. Pour tout couple (m, n) d'entiers naturels, $t(2m + 1, 2n + 1) = \tilde{t}(m, n)$, où $\tilde{t}(m, n)$ représente la tuile $t(m, n)$ à laquelle on a supprimé ses éventuels coins (c'est-à-dire que si $t(m, n)$ est une tuile (a) , alors $\tilde{t}(m, n)$ est la tuile b ayant les mêmes indices, et dans tous les autres cas, $\tilde{t}(m, n) = t(m, n)$, voir figure 13).

PREUVE: Ce résultat est en fait déjà utilisé par Robinson ([Gr-Sh p. 528]) et peut être démontré par récurrence sur l'entier k , indice du premier des blocs A^1, A^2, A^3 , etc... qui contient $t(m, n)$.

LEMME 4. Pour tout couple (m, n) d'entiers naturels,

$$t(4m + 3, 4n) = t(4m + 3, 4n + 2) , t(8m + 7, 8n) = t(8m + 7, 8n + 4).$$

PREUVE: Nous indiquons ici comment démontrer la première de ces deux égalités, mais la méthode est la même pour démontrer la deuxième. Constataons tout d'abord que cette formule est vraie lorsqu'elle concerne les lignes horizontales des croix de A^2, A^3, A^4 (c'est-à-dire lorsque $4m + 3 = 2^k - 1$ et $4n + 2 < 2^{k+1} - 1$, avec un entier k supérieur ou égal à 2).

Le cas général se prouve par récurrence sur l'entier k indice du premier bloc qui contient $t(4m + 3, 4n)$, en utilisant les symétries qui permettent de construire A^{k+1} à partir de A^k .

LEMME 5. Pour tout couple (m, n) d'entiers naturels, $t(8m + 7, 8n) = t(4m + 3, 4n)$.

DÉMONSTRATION: Notons d'abord que $4m + 3 = 2^k - 1$ équivaut à $8m + 7 = 2^{k+1} - 1$.

Si donc $4m + 3$ est un entier de la forme $2^k - 1$ (où k est un entier), alors l'égalité

$t(8m + 7, 8n) = t(4m + 3, 4n)$ a bien lieu pour tout entier naturel n , car, selon l'idée de symétrie perturbée déjà évoquée, les deux suites $(t(4m + 3, 4n))_{n \in \mathbf{N}}$ et $(t(8m + 7, 8n))_{n \in \mathbf{N}}$ s'obtiennent de la même façon, comme limite de la suite $(h_p)_{p \in \mathbf{N}}$ ainsi définie :

$$h_0 = \underbrace{f_O \cdots f_O}_{m+1 \text{ fois}} \underbrace{d'_E \cdots d'_E}_{m+1 \text{ fois}}$$

et, pour tout entier p , $h_{p+1} = h_p h_p^*$, où h_p^* consiste à écrire les éléments de h_p de la droite vers la gauche, après les avoir transformés dans une réflexion d'axe N-S

$$(\text{ainsi } h_1 = f_O \dots f_O d'_E \dots d'_E d_E \dots d_E f_E \dots f_E).$$

Effectuons maintenant une récurrence sur m en notant $P(m)$ la propriété : pour tout entier naturel n , $t(8m + 7, 8n) = t(4m + 3, 4n)$. La propriété est vraie pour $m = 0$ d'après la remarque qui précède. Supposons la propriété vraie jusqu'au rang m inclus, et dans le cas où $4(m + 1) + 3$ n'est pas un entier de la forme $2^k - 1$, alors il existe un entier j tel que

$$2^j - 1 < M = 4(m + 1) + 3 < 2^{j+1} - 1$$

(ce qui entraîne $2^{j-2} - 2 < m < 2^{j-1} - 2$)

d'où $2^{j+1} - 1 < M' = 8(m + 1) + 7 < 2^{j+2} - 1$, de sorte que la ligne n° M du pavage a été obtenue, par construction, par symétrie par rapport à une droite $E - O$ de la ligne n° $Q = 2(2^j - 1) - M$, sauf éventuellement aux numéros de colonne de la forme 2^{k-1} , et de même la ligne n° $Q' = 2(2^{j+1} - 1) - M'$, avec la même restriction. Alors

$$\begin{aligned} Q &= 2^{j+1} - 2 - 4(m + 1) - 3 \\ &= 4(2^{j-1} - m - 3) + 3 \\ Q' &= 2^{j+2} - 2 - 8(m + 1) - 7 \\ &= 8(2^{j-1} - m - 3) + 7, \text{ et } 0 \leq 2^{j-1} - m - 3 < m \end{aligned}$$

L'hypothèse de récurrence "pour tout entier n , $t(Q', 8n) = t(Q, 4n)$ " entraîne donc, grâce à la symétrie évoquée ci-dessus, l'égalité de $t(8(m + 1) + 7, 8n)$ et de $t(4(m + 1) + 3, 4n)$, pour tout entier n .

Démontrons enfin la finitude du 2-noyau de la suite t . Nous partirons de la suite t , lui ferons subir les quatre applications λ_i (voir au début du IV), et recommencerons avec les suites ainsi obtenues, en numérotant toutes les "nouvelles" suites ; nous n'arrêterons que s'il n'y a plus création de "nouvelles" suites.

Commençons donc avec $t(m, n)$, qui est la suite n° 1.

A - On applique λ_1 à la suite n° 1. On obtient $t(2m + 2n)$ (n° 2), puis, en appliquant les λ_i : $t(4m, 4n)$ (n° 3), $t(4m + 2, 4n)$ (n° 4), $t(4m, 4n + 2)$

(n° 5), $t(4m+2, 4n+2)$ (n° 6). Ces quatre dernières suites étant constantes (Lemme 2), on arrête là le processus.

B - On applique λ_2 à la suite n°1. On obtient $t(2m+1, 2n)$ (n°7), puis en appliquant les λ_i à cette dernière : $t(4m+1, 4n)$ (n° 8), $t(4m+3, 4n)$ (n° 9), $t(4m+1, 4n+2)$ (n° 10), et $t(4m+3, 4n+2)$ (n° 9, grâce au Lemme 4).

A la suite n° 8, on applique les λ_i , et l'on trouve les suites $t(8m+1, 8n)$ (n° 11), $t(8m+5, 8n)$ (n° 11), $t(8m+1, 8n+4)$ (n° 12) et $t(8m+5, 8n+4)$ (n° 13) qui sont constantes, grâce au Lemme 2.

A la suite n° 10 on applique les λ_i , et l'on aboutit aux suites $t(8m+1, 8n+2)$ (n° 14), $t(8m+5, 8n+2)$ (n° 15), $t(8m+1, 8n+6)$ (n° 16) et $t(8m+5, 8n+6)$ n° 16 qui sont constantes grâce au lemme 2.

A la suite n° 9, on applique les λ_i , et l'on obtient les suites $t(8m+3, 8n)$ (n° 17), $t(8m+7, 8n)$ (n° 9, grâce au Lemme 5), $t(8m+3, 8n+4)$ (n° 18) et $t(8m+7, 8n+4)$ (n° 9 grâce aux Lemmes 4 et 5).

Enfin, en appliquant les λ_i aux suites n° 17 et 18, on trouve les suites suivantes, qui sont toutes constantes, grâce au Lemme 2 :

$t(16m+3, 16n)$ (n° 19), $t(16m+11, 16n)$ (n° 19), $t(16m+3, 16n+8)$ (n° 20) et $t(16m+11, 16n+8)$ (n° 21),

puis $t(16m+3, 16n+4)$ (n° 22), $t(16m+11, 16n+4)$ (n° 23),

$t(16m+3, 16n+12)$ (n° 24), et $t(16m+11, 16n+12)$ (n° 24).

C - Lorsque l'on applique λ_3 à la suite n°1, on obtient, grâce au Lemme 1, dix-huit nouvelles suites (n° 25 à 42), qui s'obtiennent à partir des suites n° 7 à 24 en échangeant les indices et en symétrisant chaque tuile par rapport à sa diagonale NO-SE.

D - On applique enfin λ_4 à la suite n° 1, ce qui conduit à la suite $t(2m+1, 2n+1)$ (n° 43) ; puis en appliquant les λ_i à cette dernière, on trouve, grâce au Lemme 3 :

$$\tilde{t}(4m+1, 4n+1) = \tilde{t}(2m, 2n) \quad (\text{n° 44}).$$

$$t(4m+3, 4n+1) = \tilde{t}(2m+1, 2n) = t(2m+1, 2n) \quad (\text{n° 7})$$

$$t(4m+1, 4n+3) = \tilde{t}(2m, 2n+1) = t(2m, 2n+1) \quad (\text{n° 25})$$

$$t(4m+3, 4n+3) = \tilde{t}(2m+1, 2n+1) = t(2m+1, 2n+1) \quad (\text{n° 43}).$$

Et, pour finir (!), la suite n° 44 engendre, par application des λ_i , les suites $t(8m+1, 8n+1)$ (n° 45), $t(8m+5, 8n+1)$ (n° 46), $t(8m+1, 8n+5)$ (n° 47) et $t(8m+5, 8n+5)$ (n° 48) qui sont toutes quatre constantes, comme l'indique le Lemme 2.

Les quarante-huit suites (n°1 à 48) sont toutes distinctes (la vérification est laissée au lecteur) et l'ensemble de ces suites est stable par les applications λ_i ; cet ensemble est donc le 2-noyau de la suite t et, puisque ce 2-noyau est fini, la suite t est 2-automatique.

BIBLIOGRAPHIE

- [Al-Sa] J.-P. ALLOUCHE, O. SALON, *Quasiperiodic tilings and finite automata*. preprint
- [Be] M. BERGER,, *Géométrie*, Cédic/Fernand Nathan, Tome I (1977), 33–43.
- [Bl-MF] A. BLANCHARD et M. MENDES FRANCE, *Symétrie et transcendance*, Bull. Sci. Math. **106** (1982), 325–335.
- [C-K-MF-R] G. CHRISTOL, T. KAMAE, M. MENDES FRANCE et G. RAUZY, *Suites algébriques, automates et substitutions*, Bull. Soc. Math. France **108** (1980), 401–419.
- [Co] A. COBHAM, *Uniform tag sequences*, Mathem. Syst. Theory **6** (1972), 164–192.
- [Gr-Sh] B. GRUNBAUM et G.C. SHEPHARD, *Tilings and patterns*, W.H. Freeman and Company New-York (1987).
- [Pe] R. PENROSE, *The role of aesthetics in pure and applied mathematical research*, Bull. Inst. Math. Appl. **10** (1974), 266–271.
- [S] D. SCHECHTMAN, *Quasiperiodic crystals - Experimental evidence*, Journal de Physique, Colloque C3 Supplément au n° 7, Tome **47**. juillet 1986
- [S-B-G-C] D. SCHECHTMAN, I.A. BLECH, D. GRATIAS et J.W. CAHN, *Physical Review Letters*, n° 20 **53** (1984), 1951–1953.
- [Sa] O. SALON, *Suites automatiques à multi-indices*, Séminaire de Théorie des Nombres de Bordeaux (1986–1987). exposé n° 4.
- [Vo] H. VODERBERG, *Zur Zerlegung eines ebenen Bereiches in kongruente Bereiche in Form einer Spirale*, Jber. dtsh. Math. Ver., **46** (1936), 229–231. et aussi **46**, (1937), 159–160.

Les figures 2,3,4 de cet article sont tirées de [Be], les figures 5,6,10,11,12,13,14 sont extraites de [Gr-Sh] et la figure 7 provient de [S].

Mots clefs: Pavages de Robinson, automates finis bidimensionnels.

1980 *Mathematics subject classifications*: 10A99, 68D20.

Ceremab, Université Bordeaux I
351, cours de la Libération
33405 Talence Cedex, FRANCE.