

APPLICATION DES CHAÎNES DE MARKOV POUR LE SUIVI DE LA DÉGRADATION DE PRODUITS ALIMENTAIRES

S. LEDAUPHIN¹, D. POMMERET²

et E.M. QANNARI¹

RÉSUMÉ

Nous considérons la situation où un jury entraîné est appelé à s'exprimer sur la qualité d'un ensemble de produits à intervalles de temps réguliers. L'évaluation consiste à attribuer aux produits des états exprimant un niveau de fraîcheur allant de « très frais » à « très dégradé ». Nous cherchons à modéliser la dynamique de la dégradation à l'aide d'une chaîne de Markov homogène. De plus, il est possible d'utiliser la matrice de transition associée à la chaîne de Markov dans le cadre d'une analyse des correspondances. La représentation graphique obtenue permet de comparer par exemple la dégradation de différents produits (composition, mode de conservation, ...). La démarche générale est illustrée sur la base de deux études de cas.

Mots clés : Chaînes de Markov, évaluation sensorielle, date limite de consommation, analyse factorielle des correspondances.

ABSTRACT

We consider an experiment where a panel of assessors are asked to assess the quality of a product at different intervals of time. The assessment of the panellists consists in rating the products on a categorical scale ranging from « fresh » to « very decayed ». We wish to investigate the dynamic of degradation. We propose a Markovian modelisation for the decay of the products in the course of time. Markov chains models are based on the estimation of a transition matrix which states the probability that the assessment of a product changes from one category to another. The advantage of using transition matrices lies in the fact that they give a simple representation of the dynamic of degradation. Moreover, these transition matrices may be used in conjunction with correspondence analysis in order to investigate the evolution of the decay of the products (different conservation modes, different compositions, ...). The efficiency of the general approach is demonstrated on the basis of real data sets.

Keywords: Markov chains, sensory evaluation, shelf life, correspondence analysis.

1. ENITIAA Unité de Sensométrie et de Chimiométrie (ENITIAA / INRA). Rue de la Géraudière, BP 82225 44322 Nantes cedex 03, France.

2. CREST-ENSAI Rue Blaise Pascal BP 37203 35172 Bruz cedex, France

1. Introduction

Dans les industries agro-alimentaires comme dans d'autres secteurs d'activités, l'analyse sensorielle est un passage obligé pour le développement et l'amélioration des produits. Elle est également utilisée pour le suivi de la qualité des produits. Cela permet, entre autres, d'évaluer la date limite de consommation et l'évolution de la qualité des produits en fonction du temps. Dans beaucoup de situations, le vieillissement se manifeste par une dégradation des produits sur le plan organoleptique. C'est pourquoi il est préconisé de procéder à des évaluations sensorielles des produits à différents intervalles de temps. Dans cette publication, nous nous intéressons à l'évaluation sensorielle effectuée par un jury entraîné qui est appelé à s'exprimer sur la qualité d'un ou plusieurs produits à intervalles de temps réguliers. L'évaluation consiste à attribuer aux produits des états exprimant un niveau de fraîcheur allant de « très frais » à « impropre à la consommation ». Nous considérons ces modalités comme étant des états d'une chaîne de Markov homogène et, pour chaque produit, nous ajustons un modèle markovien de premier ordre. L'accent est mis sur les tests d'hypothèses mis en œuvre pour juger de l'adéquation du modèle et la comparaison des produits. Afin d'avoir une vision globale de l'évolution des produits sur la base d'une représentation graphique, nous proposons d'effectuer une analyse factorielle des correspondances (AFC) sur un tableau de données obtenu à partir des modèles associés aux différents produits.

Comme nous l'avons souligné ci-dessus, le protocole expérimental qui est à la base de cette étude est utilisé pour la détermination de la date limite de consommation. Des analyses statistiques usuellement proposées dans ce cadre sont basées sur des modèles de survie (Hough *et al.*, 2003; Curia *et al.*, 2005; Salvador *et al.*, 2005; Hough, Garitta et Gomez, 2006). Cependant, leur objectif est relativement restreint en ce sens qu'ils visent à déterminer la date à partir de laquelle les produits deviennent impropres à la consommation. L'approche discutée ici permet d'avoir une vision dynamique de l'évolution des produits.

2. Matériels et méthodes

2.1. Les données

m juges entraînés ont évalué R produits à des temps $t = 0, 1, \dots, T$. L'évaluation de chacun des juges pour un produit donné consiste à attribuer une modalité exprimant l'état de fraîcheur du produit allant de « très frais » à « impropre à la consommation ». Dans la suite, ces modalités (états) sont notées $1, 2, \dots, N$.

Le plus souvent, l'évolution organoleptique des produits se traduit par une dégradation du fait de la prolifération micro-biologique. Bien évidemment, il y a des exceptions à cette règle comme c'est le cas de certains vins. Dans la suite, nous allons considérer que les évaluations au cours du temps données par un juge pour un produit reflètent une dégradation. Dans cette perspective, un pré-traitement des données a été effectué pour pallier quelques inconsistances

des juges. Ce prétraitement a consisté à imposer pour les évaluations de chaque juge à avoir une suite croissante d'états allant dans le sens de la dégradation du produit considéré. Ainsi, si pour l'évaluation d'un produit, un juge donne, par exemple, la suite d'états (2,1,2), celle-ci a été transformée en (2,2,2). Nous évoquerons dans la conclusion, des solutions alternatives à ce pré-traitement. La démarche générale est illustrée sur la base de deux études de cas.

Les données « saumons fumés »

Une analyse sensorielle a été conduite à l'IFREMER (Institut Français de Recherche pour l'Exploitation de la Mer) sur sept saumons différents (notés **A**, **B**, ..., **G**). 33 juges ont ainsi évalué l'altération de ces saumons en considérant trois états : « frais », « dégradé » et « très dégradé » (notés dans la suite : 1, 2 et 3) pendant 6 semaines ($t = 0, \dots, 5$). La figure 1 représente la proportion des notes au cours du temps pour chaque produit. On peut noter que toutes les évaluations ne commencent pas à 'frais' et que les produits **A** et **C** n'ont jamais été observés dans un état 'très dégradé'.

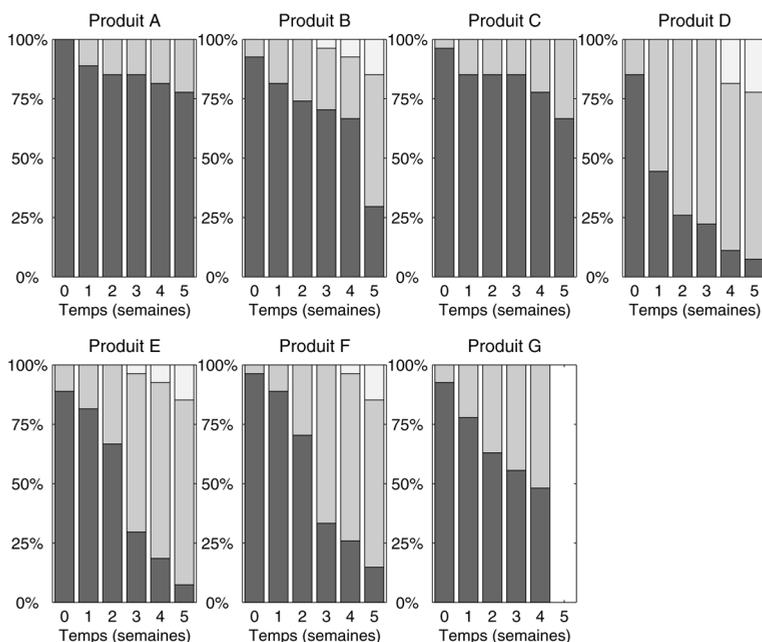


FIG 1. — Pourcentage des évaluations des catégories « frais » (couleur sombre), à « très dégradé » (couleur claire) pour les produits **A** à **G** au cours du temps

Les données « produit déshydraté »

Une évaluation sensorielle a été conduite par une entreprise agro-alimentaire pour déterminer la durée de vie d'un produit déshydraté conservé dans des conditions d'entreposage différentes (réfrigérateur ou à température ambiante). Trois attributs sensoriels (odeur, flaveur et apparence) ont été évalués par six juges en considérant 5 états correspondant à des niveaux de dégradation allant de 1 («très bien») à 5 («très dégradé»). L'étude de cas est décrite avec plus de détails par Freitas, Borges et Ho (2003). Nous ne considérons ici que les données des 30 premières semaines ($t = 0, \dots, 29$) car les données des semaines suivantes comportent beaucoup de valeurs manquantes. La figure 2 représente la proportion des notes (de 'très bien' à 'très dégradé') au cours du temps pour chaque attribut. Pour le produit conservé au réfrigérateur, les trois attributs restaient dans le même état («très bien») pendant les 30 premières semaines, nous n'avons donc représenté dans la figure 2 qu'un seul attribut (flaveur).

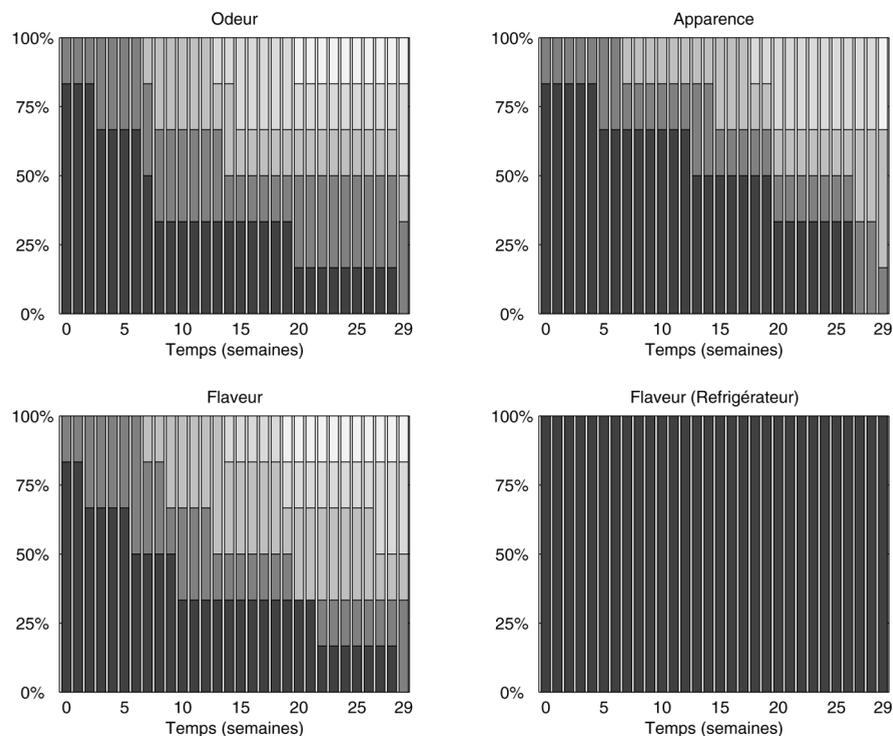


FIG 2. — Pourcentage des évaluations des cinq catégories «très bien» (couleur sombre), à «très dégradé» (couleur claire) pour chaque attribut au cours du temps

2.2. Les chaînes de Markov

A chaque produit (ou chaque attribut), nous proposons d'associer une chaîne de Markov qui reflète sa dégradation. S'agissant d'un jury entraîné censé donner des évaluations homogènes, il est possible d'estimer les paramètres du modèle (matrice de transition) en agrégeant les évaluations des juges. En d'autres termes, la probabilité de transition d'un état i à un état j (pour i et j allant de 1 à N) est estimée par :

$$\hat{p}_{ij} = \frac{n_{ij}}{n_i} = \frac{\sum_{t=0}^{T-1} n_{ij}(t)}{\sum_{t=0}^{T-1} n_i(t)} = \frac{\sum_{t=0}^{T-1} n_{ij}(t)}{N \sum_{k=1}^{T-1} \sum_{t=0} n_{ik}(t)}.$$

où :

- $n_i(t)$ le nombre de fois où le produit est dans l'état i à la date t ($t = 0, \dots, T - 1$).
- $n_{ij}(t)$ le nombre de fois où le produit est passé de l'état i à la date t à l'état j à la date $t + 1$ ($t = 0, \dots, T - 1$)

Afin de fixer les idées, nous illustrons la démarche d'estimation des probabilités de transition sur la base des données concernant le saumon **B**. Le tableau 1 donne les différentes évaluations de neuf juges au cours du temps. Les tableaux 2.a, 2.b et 2.c illustrent le calcul de $n_{ij}(t)$ (pour $t = 0$ et pour les neuf juges considérés), le calcul des effectifs n_{ij} obtenus en cumulant les effectifs $n_{ij}(t)$ pour $t = 0, \dots, T - 1$ et enfin, les estimations \hat{p}_{ij} obtenues à partir des profils lignes de la table 2.b.

Du fait de l'hypothèse de dégradation irréversible des produits au cours du temps, les matrices de transition associées aux produits sont nécessairement triangulaires (supérieures). A titre illustratif, la figure 3 représente les différents états ($N = 3$) et les flèches indiquent les transitions possibles avec leur probabilité respective. Une fois les paramètres du modèle estimés, nous pouvons réaliser des tests sur l'ordre de la chaîne de Markov ainsi que des tests d'homogénéité des produits.

TABLEAU 1. – Suivi du saumon **B** par neuf juges

Date	juge 1	juge 2	juge 3	juge 4	juge 5	juge 6	juge 7	juge 8	juge 9
t=0	1	1	2	1	1	1	1	1	1
t=1 semaine	1	1	2	1	1	2	2	1	2
t=2 semaines	1	1	2	2	1	2	2	2	2
t=3 semaines	1	2	3	2	1	2	2	2	2
t=4 semaines	2	2	3	2	1	3	2	2	2
t=5 semaines	3	2	3	3	2	3	2	2	2

TABLEAU 2. - 2-a. Tableau de contingence indiquant le nombre de fois que le produit **B** est passé de l'état i à l'instant $t = 0$ à l'état j à l'instant $t = 1$ ($i, j = 1, 2, 3$) pour les évaluations des neuf juges du tableau 1. 2-b. Cumul des tables $n_{ij}(t)$ pour $t = 0, \dots, 4$. 2-c. Profils lignes : estimation de la matrice de transition.

$n_{ij}(t)$	j	$n_{i.}(t)$
à $t = 0$	1 2 3	
$i = 1$	5 3 0	8
$i = 2$	0 1 0	1
$i = 3$	0 0 0	0
$n_{.j}(t)$	5 4 0	9

2 - a.

n_{ij}	j	$n_{i.}$
	1 2 3	
$i = 1$	11 8 0	19
$i = 2$	0 19 4	23
$i = 3$	0 0 3	3
$n_{.j}$	11 27 7	45

2 - b.

\hat{p}_{ij} ou $\frac{n_{ij}}{n_{i.}}$	j	$p_{i.}$
	1 2 3	
$i = 1$	0.58 0.42 0	1
$i = 2$	0 0.83 0.17	1
$i = 3$	0 0 1	1
$p_{.j}$	0.58 1.25 1.17	

2 - c.

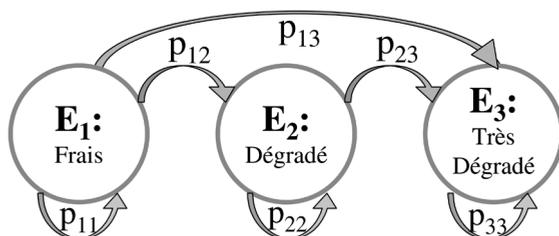


FIG 3. — Graphe des transitions possibles d'une chaîne de Markov pour $N = 3$.

2.3. Les tests d'hypothèses

Préalablement à l'exploration des données à l'aide du modèle Markovien, il convient d'évaluer la validité de ce modèle et de déterminer l'ordre de la chaîne de Markov. Les tests d'hypothèses appropriés à cette situation sont discutés dans plusieurs références (Basawa et Prakasa Rao, 1980, chapitre 4; Collins, 1974; Anderson et Goodman, 1957), ceux-ci ont été adaptés au contexte de la présente étude (matrices triangulaires). Pour la détermination de l'ordre de la chaîne de Markov, il est préconisé de procéder de manière séquentielle en testant, dans un premier temps, si la chaîne est d'ordre 0 ($p_{ij} = p_{i'j}$ pour

tout i, i' dans $\{1, 2, \dots, N\}$) contre l'hypothèse alternative stipulant que la chaîne est d'ordre supérieur ou égal à 1. Par la suite, l'hypothèse stipulant un ordre 1 est testée contre l'hypothèse stipulant un ordre supérieur ou égal à 2. Considérons dans un premier temps la situation :

$H_0^{(1)}$: l'ordre de la chaîne est 0.

$H_1^{(1)}$: l'ordre de la chaîne est supérieur ou égal à 1.

L'hypothèse $H_0^{(1)}$ reflète l'idée qu'il n'y a pas d'évolution dans le temps pour le produit considéré ($p_{ij} = p_{i'j}$ pour tout i, i' dans $\{1, 2, \dots, N\}$) alors que l'hypothèse $H_1^{(1)}$ signifie que le processus a une 'mémoire' : la probabilité pour un produit d'arriver dans un état dépend de l'état dans lequel il se trouve au moment précédent. Dans la pratique, deux statistiques de tests sont proposées pour départager les deux hypothèses. La première statistique est donnée par :

$$K_{O1} = 2 \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \leq j}}^N n_{ij} \ln \left(\frac{n_{ij} n_{..}}{n_{i.} n_{.j}} \right)$$

où $n_{.j} = \sum_{i=1}^N n_{ij}$ et $n_{..} = \sum_{j=1}^N n_{.j}$

Alternativement, nous pouvons utiliser un test de χ^2 basé sur :

$$K_{O2} = \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \leq j}}^N \frac{(n_{ij} - n_{i.} n_{.j} / n_{..})^2}{n_{i.} n_{.j} / n_{..}}$$

Pour les statistiques considérées, il est à noter que les sommes sont restreintes aux cas $i \leq j$ car pour $i > j$, $n_{ij} = 0$. De manière générale, il est démontré que les statistiques de test suivent, sous l'hypothèse $H_0^{(1)}$, une loi de χ^2 à $N(N-1)$ degrés de liberté (Basawa et Prakasa Rao, 1980). Dans le présent contexte, où les matrices considérées sont triangulaires, nous pouvons montrer que le degré de liberté est égal à $\frac{N(N-1)}{2}$. En effet, la marge ligne du tableau (n_{ij}) est constante et fixée à 1 et les éléments en dessous de la diagonale sont nuls. Le nombre de degrés de liberté est égal au nombre de termes du tableau structurellement non nuls moins 1, soit $N(N+1)/2 - 1$ auquel est soustrait le nombre de termes associés à la marge ligne (soit $N-1$). En définitive, le nombre de degrés de libertés est égal à $d = \frac{N(N+1)}{2} - 1 - (N-1) = \frac{N(N-1)}{2}$.

Si à l'issue du test d'hypothèses, $H_0^{(1)}$ est rejetée, nous pouvons considérer la nouvelle situation de tests d'hypothèses :

$H_0^{(2)}$: l'ordre de la chaîne est 1.

$H_1^{(2)}$: l'ordre de la chaîne est supérieur ou égal à 2.

Deux statistiques sont proposées pour départager les hypothèses. Elles sont respectivement données par :

$$K_{O3} = 2 \sum_{\substack{i,j,k=1 \\ i \leq j \leq k}}^N n_{ijk} \ln \left(\frac{n_{ijk} n_{.j}}{n_{ij} n_{.jk}} \right)$$

$$K_{O4} = \sum_{\substack{i,j,k=1 \\ i \leq j \leq k}}^N \frac{(n_{ij} n_{.jk} / n_{.j} - n_{ijk})^2}{n_{ij} n_{.jk} / n_{.j}}$$

avec $n_{ijk} = \sum_{t=0}^{T-2} n_{ijk}(t)$ et $n_{ijk}(t)$ le nombre de fois où le produit est passé de l'état i à la date t à l'état j à la date $t+1$ puis à l'état k à la date $t+2$ ($i, j, k = 1, \dots, N$ et $t = 0, \dots, T-2$). Le terme $n_{.jk}$ est égal à $\sum_{i=1}^N \sum_{t=0}^{T-2} n_{ijk}(t)$.

Sous $H_0^{(2)}$, ces deux statistiques sont asymptotiquement distribuées selon des lois de χ^2 et pour la situation considérée ici, nous pouvons vérifier que le nombre de degrés de liberté est égal à $\frac{N(N+1)(N-1)}{6}$.

Le fait de rejeter $H_0^{(1)}$ dans le premier test et de ne pas rejeter $H_0^{(2)}$ dans le second test procure une raison suffisante, dans le cadre considéré ici, pour adopter un modèle markovien d'ordre 1, même si ces deux derniers tests ne prouvent pas que le modèle considéré est effectivement un modèle Markovien du premier ordre. Ceci est d'autant plus vrai que le second test étant conditionné au rejet de l'hypothèse $H_0^{(1)}$, a en vérité un risque d'erreur supérieur au seuil de signification fixé.

Dans la suite, nous supposons qu'un modèle associé à une chaîne de Markov d'ordre 1 a été validé. De ce fait, l'évolution de la dégradation du produit \mathbf{r} peut être régie par une matrice de transition que nous désignons par $\mathbf{P}^{(\mathbf{r})}$ ($r = \mathbf{1}, \dots, \mathbf{R}$). Naturellement, l'utilisateur est intéressé par la possibilité d'évaluer si les produits constituent un ensemble homogène en ce sens que leurs dégradations au cours du temps sont similaires. Ceci revient en définitive à mettre en balance les deux hypothèses suivantes :

$H_0^{(3)}$: les produits sont homogènes *i.e.* $\mathbf{P}^{(1)} = \mathbf{P}^{(2)} = \dots = \mathbf{P}^{(\mathbf{R})}$

$H_1^{(3)}$: au moins un des produits a une matrice de transition différente des autres.

Sous $H_0^{(3)}$, tous les produits ont la même matrice de transition et une matrice de transition « moyenne » est déterminée en agrégeant tous les produits. En adoptant les mêmes notations que précédemment, les statistiques proposées pour tester $H_0^{(3)}$ contre $H_1^{(3)}$ (Collins, 1974; Basawa et Prakasa Rao, 1980) sont définies par :

$$K_{H1} = 2 \sum_{\mathbf{r}=1}^{\mathbf{R}} \sum_{i,j=1}^N n_{ij}^{(\mathbf{r})} \ln \left(\frac{n_{ij}^{(\mathbf{r})}}{n_{i.} \hat{p}_{ij}^{(0)}} \right)$$

$$K_{H2} = \sum_{\mathbf{r}=1}^{\mathbf{R}} \sum_{i,j=1}^N \frac{(n_{ij}^{(\mathbf{r})} - n_{i.}^{(\mathbf{r})} \hat{p}_{ij}^{(0)})^2}{n_{i.}^{(\mathbf{r})} \hat{p}_{ij}^{(0)}}$$

avec

$$\hat{p}_{ij}^{(0)} = \frac{\sum_{\mathbf{r}=1}^{\mathbf{R}} n_{ij}^{(\mathbf{r})}}{\sum_{\mathbf{r}=1}^{\mathbf{R}} n_{i.}^{(\mathbf{r})}}$$

Ici, l'exposant (\mathbf{r}) réfère au produit \mathbf{r} ($\mathbf{r} = 1, \dots, \mathbf{R}$). Sous $H_0^{(3)}$, les statistiques considérées suivent asymptotiquement une loi de χ^2 à $\frac{N(N-1)}{2}(\mathbf{R}-1)$ degrés de liberté.

2.4. Différences entre les produits

Si à l'issue du test d'hypothèses relatif à l'homogénéité des produits, nous sommes conduits à rejeter l'hypothèse nulle, il convient de « localiser » les différences en identifiant quels sont les produits qui sont différents et en quoi ils sont différents. Un test d'homogénéité en considérant les produits deux par deux peut s'avérer fastidieux lorsque le nombre de produits est relativement important. Comme alternative, nous proposons une démarche exploratoire basée sur l'analyse factorielle des correspondances (AFC).

Considérons un produit \mathbf{r} ($\mathbf{r} = 1, \dots, \mathbf{R}$) auquel est associée la matrice de transition $\mathbf{P}^{(\mathbf{r})}$. Le vecteur ligne $\mu_0 = (1, 0, \dots, 0)$ est le vecteur d'état initial qui indique que le produit considéré est dans un très bon état de fraîcheur. Le vecteur d'état à l'instant t ($t > 0$) est obtenu par la relation bien connue $\mu_t = \mu_{t-1} \mathbf{P}^{(\mathbf{r})}$.

Soit la matrice $\mathbf{M}^{(\mathbf{r})}$ de dimensions $(T+1, N)$ définie par :

$$\mathbf{M}^{(\mathbf{r})} = \begin{pmatrix} \mu_0 \\ \mu_1 \\ \dots \\ \mu_T \end{pmatrix}$$

Les lignes de cette matrice correspondent au temps qui peut éventuellement être fixé à un horizon supérieur à celui de l'experimentation (prédiction) et les colonnes correspondent aux différents états. Afin d'étudier l'évolution de la dégradation du produit considéré nous proposons d'effectuer une AFC sur la matrice $\mathbf{M}^{(\mathbf{r})}$.

Lorsque l'étude comporte plusieurs produits, il est possible de comparer l'évolution des dégradations des différents produits. Pour cela, nous proposons de concaténer verticalement les matrices $\mathbf{M}^{(\mathbf{r})}$ ($\mathbf{r} = 1, \dots, \mathbf{R}$) associés aux différents produits, et de faire l'AFC de la matrice \mathbf{M} associée qui est de dimensions $(\mathbf{R} * (T+1), N)$.

3. Résultats

3.1. Saumons fumés

Rappelons que cette étude de cas concerne l'évolution de la dégradation de sept saumons fumés désignés par **A**, **B**, ..., **G**, pendant 5 semaines. Pour cela, trois états ont été considérés : «frais», «dégradé» et «très dégradé». Pour chacun des produits, nous avons estimé les probabilités de transition d'un état à l'autre. A titre illustratif, la matrice de transition pour le produit **D** est donnée par :

$$\mathbf{P}^{(\mathbf{D})} = \begin{bmatrix} 0.59 & 0.39 & 0.02 \\ 0 & 0.94 & 0.06 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Les résultats du test mettant en balance $H_0^{(1)}$: ordre de la chaîne égal à 0 contre $H_1^{(1)}$: ordre de la chaîne supérieur ou égal à 1, sont consignés dans le tableau 3. Pour tous les produits, l'hypothèse $H_0^{(1)}$ est rejetée au seuil $\alpha = 0.05$. Ceci nous amène à tester l'hypothèse $H_0^{(2)}$: ordre de la chaîne égal à 1 contre $H_1^{(2)}$: ordre de la chaîne supérieur ou égal à 2. Les résultats concernant ce test d'hypothèses sont présentés dans le tableau 4. Tous ces tests ne préconisent pas de rejeter $H_0^{(2)}$ pour le seuil $\alpha = 0.05$. Ce constat confirme la possibilité d'utiliser des chaînes de Markov d'ordre 1 pour modéliser la dégradation des différents produits considérés.

Sur la base des matrices de transition associées aux différents produits, nous avons effectué un test d'homogénéité des sept produits considérés et il s'est révélé que ces sept produits ne peuvent pas être considérés comme étant homogènes pour une erreur de première espèce égale à 0.05 (tableau 5).

En utilisant la matrice de transition associée à chaque produit, nous avons simulé l'évolution de la dégradation des produits au cours du temps en déterminant de manière récurrente les vecteurs d'états aux différents instants. Tous ces vecteurs d'états (associés aux différents produits pour les différents instants) ont été disposés dans un tableau comme indiqué dans le paragraphe 2.4 et le tableau ainsi obtenu de dimensions $(R * (T + 1), N)$ avec $R = 7$, $T = 5$ et $N = 3$ a été soumis à une AFC. Il est à souligner que le premier axe factoriel restitué à lui seul 92.8 % de l'inertie. Le tableau soumis à l'AFC ayant trois colonnes, il s'ensuit que le plan factoriel (figure 4) restitué 100 % de l'inertie. De la figure 4 se dégage de manière évidente un effet Guttman qui très vraisemblablement découle de la structure des matrices de transition considérées ici (matrices triangulaires). Le premier axe factoriel représente un gradient de dégradation allant de «frais» à «très dégradé». Il apparaît que les produit A et C sont très proches et conservent une bonne qualité jusqu'à 5 semaines d'entreposage. A l'opposé les produits D, E et F quittent rapidement l'état «frais» pour rester dans un état «dégradé» intermédiaire avant de se dégrader complètement. Les produits B et G sont intermédiaires, dans le sens où ils conservent une bonne qualité pendant un temps acceptable. Le produit B est particulier puisqu'il reste le moins longtemps dans l'état intermédiaire «dégradé». Pour comparer le produit B aux produits D, E et

TABLEAU 3. – Données « saumons » : Test $H_0^{(1)}$: ordre=0, $H_1^{(1)}$: ordre ≥ 1 .

Saumons	K_{O1}	K_{O2}	$DDL = \frac{N(N-1)}{2}$	Kcritique ($\alpha = 5\%$)	Hyp. retenue
A	72.5	79.8	3	7.8	$H_1^{(1)}$
B	100.0	97.4	3	7.8	$H_1^{(1)}$
C	76.9	73.2	3	7.8	$H_1^{(1)}$
D	99.0	98.6	3	7.8	$H_1^{(1)}$
E	109.2	94.7	3	7.8	$H_1^{(1)}$
F	95.5	73.0	3	7.8	$H_1^{(1)}$
G	77.4	46.9	3	7.8	$H_1^{(1)}$

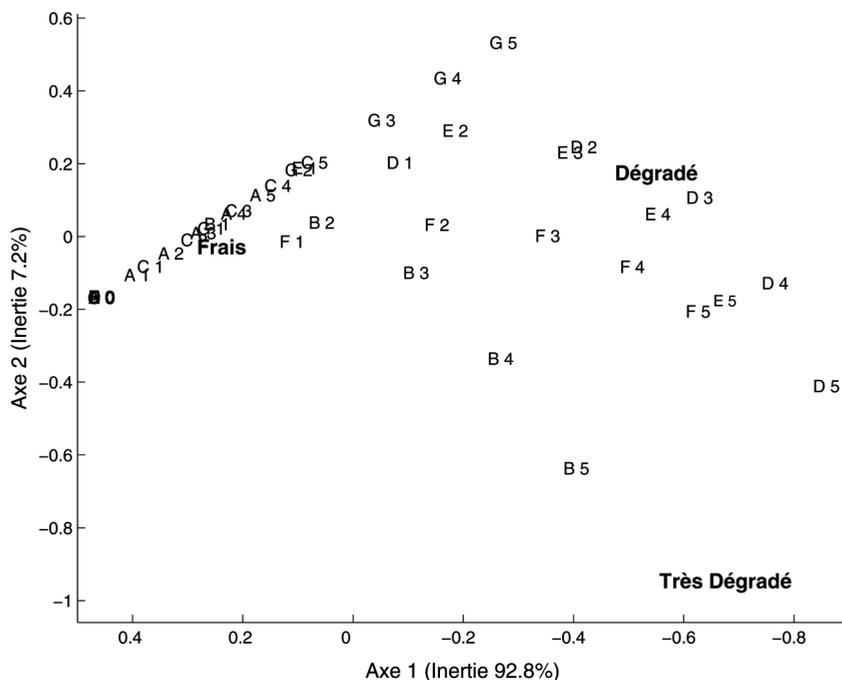


FIG 4. — Données « saumons » : Analyse des correspondances sur les vecteurs d'états avec $T = 5$ et $N = 3$. Pt correspond au produit P à l'instant t , ainsi $B4$ correspond au saumon **B** à l'instant 4.

F, nous pouvons dire qu'ils atteignent un stade « très dégradé » identique après 5 semaines. Cependant, le produit B est préférable puisqu'il conserve une fraîcheur pendant plus longtemps.

TABLEAU 4. – Données « saumons » : Test $H_0^{(2)}$: ordre=1, $H_1^{(2)}$: ordre ≥ 2 .

Saumons	K_{O3}	K_{O4}	DDL = $\frac{N(N-1)(N+1)}{6}$	Kcritique ($\alpha = 5\%$)	Hyp. retenue
A	0.0	0.0	4	9.5	$H_0^{(2)}$
B	0.0	0.0	4	9.5	$H_0^{(2)}$
C	0.0	0.0	4	9.5	$H_0^{(2)}$
D	0.1	0.1	4	9.5	$H_0^{(2)}$
E	0.3	0.3	4	9.5	$H_0^{(2)}$
F	2.1	0.6	4	9.5	$H_0^{(2)}$
G	0	0.0	4	9.5	$H_0^{(2)}$

TABLEAU 5. – Données « saumons » : Test $H_0^{(3)}$: produits homogènes, $H_1^{(3)}$: au moins deux produits distincts.

K_{H1}	K_{H2}	DDL = $\frac{N(N-1)}{2}(\mathbf{R} - 1)$	Kcritique ($\alpha = 5\%$)	Hyp. retenue
70.3	63.8	18	28.9	$H_1^{(3)}$

3.2. Produit déshydraté

La modélisation par une chaîne de Markov a concerné l'évolution de la dégradation du produit considéré pour trois descripteurs (odeur, flaveur et apparence) dans deux conditions d'entreposage (réfrigérateur et à température et taux d'humidité ambiants). A titre illustratif, nous trouvons la matrice de transition suivante pour l'évaluation de l'apparence du produit déshydraté entreposé à température ambiante :

$$\mathbf{P}^{(A)} = \begin{bmatrix} 0.95 & 0.05 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.86 & 0.14 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.93 & 0.07 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.9 & 0.1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Le tableau 6 donne les résultats des tests d'hypothèses stipulant un ordre égal à 0 contre un ordre supérieur ou égal à 1 pour la chaîne de Markov. Pour le seuil $\alpha = 0.05$, il convient de rejeter l'hypothèse $H_0^{(1)}$ pour tous les descripteurs lorsque le produit a été conservé à température ambiante. Au contraire, pour le produit conservé au réfrigérateur, le test d'hypothèses ne préconise pas de rejeter $H_0^{(1)}$ au seuil $\alpha = 0.05$. Ce dernier constat est cohérent avec la figure 2 qui laissait bien apparaître qu'il n'y avait pas d'évolution notable du produit considéré lorsque celui ci était entreposé au réfrigérateur. Pour la suite, nous ne considérerons que les cas où le produit a été entreposé à température ambiante et nous nous intéressons à la comparaison de la dégradation des différents descripteurs. En effet, l'utilisateur peut être intéressé par une telle

comparaison qui peut révéler des directions d’investigation pour l’amélioration des produits. Le tableau 7 concerne les tests d’hypothèses stipulant un modèle markovien d’ordre 1 (hypothèse nulle) contre un modèle markovien d’ordre supérieur ou égal à 2 (hypothèse alternative). Il ressort que pour tous les descripteurs, il n’y a pas lieu de rejeter l’hypothèse nulle $H_0^{(2)}$ au seuil $\alpha = 0.05$.

Nous avons par la suite effectué un test d’hypothèses afin d’évaluer si les matrices de transition associées aux différents descripteurs sont égales. Pour ce test, nous avons procédé de la même manière que pour les six variétés de saumons. Le test d’hypothèses ne rejette pas l’hypothèse $H_0^{(3)}$ pour une erreur de première espèce de 0.05 (tableau 8).

Bien que le test d’hypothèses ne préconise pas le rejet de l’hypothèse stipulant que l’évolution de la dégradation du produit est similaire pour les différents descripteurs, il serait utile d’effectuer l’AFC selon la procédure décrite précédemment. En effet, une telle analyse est de nature à révéler les différences entre les descripteurs qui n’auraient pas été détectées par le test d’hypothèses par manque de puissance.

TABLEAU 6. – Données « produit déshydraté » : Test $H_0^{(1)}$: ordre = 0, $H_1^{(1)}$: ordre ≥ 1 .

Produit déshydraté	K_{O1}	K_{O2}	$DDL = \frac{N(N-1)}{2}$	Kcritique	Hyp. retenue
Apparence (A)	348	332	10	18.3	$H_1^{(1)}$
Flaveur (F)	418	473	10	18.3	$H_1^{(1)}$
Odeur (O)	416	476	10	18.3	$H_1^{(1)}$
Apparence (Af) (produit au réfrigérateur)	0	0	10	18.3	$H_0^{(1)}$
Odeur (Of) (produit au réfrigérateur)	0	0	10	18.3	$H_0^{(1)}$
Flaveur (Ff) (produit au réfrigérateur)	0	0	10	18.3	$H_0^{(1)}$

Pour chaque descripteur, nous avons donc simulé l’évolution de la dégradation du produit en utilisant la matrice de transition et la relation de récurrence reliant le vecteur d’état à un moment donné au vecteur d’état au moment précédent. Ces vecteurs d’états ont été consignés dans un tableau. Par la suite, nous avons concaténé verticalement les tableaux associés aux différents descripteurs et nous avons soumis le tableau de dimension $(R * (T + 1), N)$ soit (90,5) ainsi obtenu à une AFC. Le premier plan qui restitue 96.5 % de l’inertie est représenté dans la figure 5. Il ressort que les dynamiques de dégradation de l’odeur et de la flaveur sont très proches traduisant par là qu’ils relèvent en définitive de la même sensation. Cependant, nous pouvons noter graphiquement que la dégradation du point de vue de l’apparence est légèrement différente de celles des deux autres descripteurs en ce sens qu’elle

semble se détériorer très rapidement dès que le processus de dégradation est entamé.

TABLEAU 7. – Données « produit déshydraté » : Test $H_0^{(2)}$: ordre = 1, $H_1^{(2)}$: ordre ≥ 2 .

Produit déshydraté	K_{O3}	K_{O4}	$DDL = \frac{N(N-1)(N+1)}{6}$	Kcritique	Hyp. retenue
Apparence (A)	2.85	0.40	20	31.4	$H_0^{(2)}$
Flaveur (F)	2.03	0.22	20	31.4	$H_0^{(2)}$
Odeur (O)	1.66	0.16	20	31.4	$H_0^{(2)}$

TABLEAU 8. – Données « produit déshydraté » : Test $H_0^{(3)}$: descripteurs homogènes, $H_1^{(3)}$: au moins deux descripteurs distincts.

	K_{H1}	K_{H2}	$DDL = \frac{N(N-1)(R-1)}{2}$	Kcritique	Hyp. retenue
Produit déshydraté	1.85	1.88	20	31.4	$H_0^{(3)}$

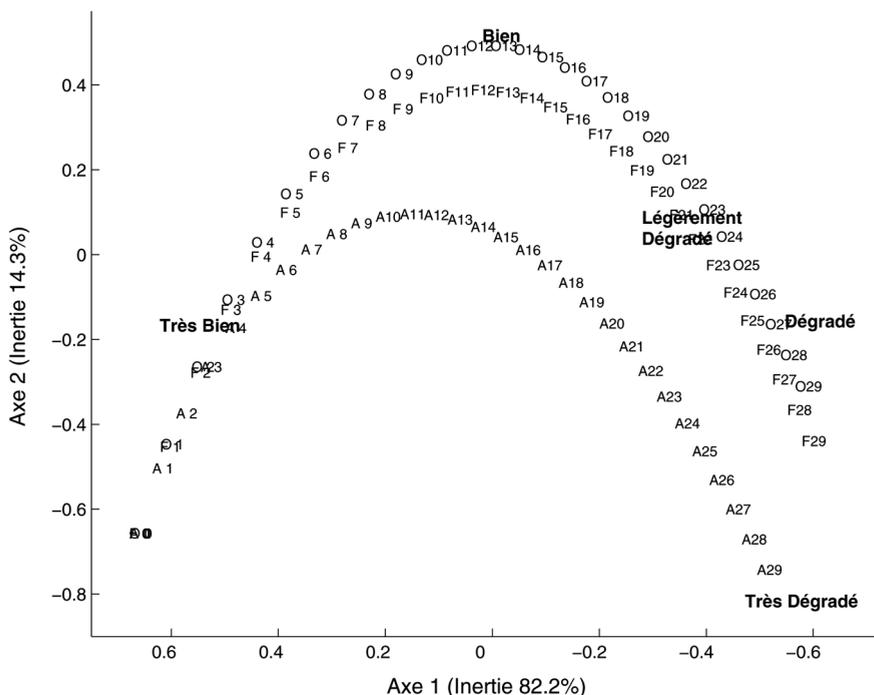


FIG 5. — Données « produit déshydraté » : Analyse des correspondances sur les vecteurs d'états avec $T = 29$ et $N = 6$. Dt correspond au descripteur D à l'instant t , ainsi $F7$ correspond à l'évaluation de flaveur (**F**) à l'instant 7.

4. Conclusion

Contrairement aux démarches classiques qui visent à déterminer de manière plus ou moins ponctuelle la date limite de consommation d'un produit, la démarche proposée ici permet d'avoir une vision dynamique de l'évolution des produits. Il faut également souligner que la démarche est flexible et permet de comparer plusieurs produits correspondant à différentes variétés ou à différents procédés de fabrication. Dans cette perspective, l'analyse des correspondances complète le test d'hypothèses par une représentation graphique qui permet d'avoir un aperçu global de l'évolution des produits.

Nous avons considéré le cas de produits qui subissent une dégradation de manière irréversible. Pour cela, nous avons été amenés à effectuer un prétraitement sur les données procurées par chacun des juges. Alternativement, il est possible d'adapter une démarche basée sur des chaînes de Markov cachées. Ceci consiste à associer à chaque produit une chaîne de Markov (cachée) dont les états sont appréhendés à travers les évaluations des juges. A ces derniers, nous associons des probabilités conditionnelles d'indiquer un état sachant l'état réel dans lequel le produit se trouve. Des développements concernant ce point seront relatés dans une publication future.

Remerciements : Les auteurs remercient M. Cardinal (IFREMER, Nantes) et L. Lee Ho (USP, Brésil) pour avoir accepté de mettre à disposition des données qui ont permis d'illustrer cet article, ainsi que les rapporteurs pour leurs remarques qui ont contribué à améliorer la rédaction du texte.

Références

- ANDERSON T.W. et GOODMAN L.A. (1957). Statistical Inference about Markov chains. *Ann. Math. Statist.*, **28**, 89-109.
- BASAWA I.V. et PRAKASA RAO B.L.S. (1980). *Statistical Inference for Stochastic Processes*, Academic Press, London.
- COLLINS L. (1974). Estimating Markov Transition Probabilities from Micro-unit Data. *Applied Statistics*, **23(3)**, 355-371.
- CURIA A., AGUERRIDO M., LANGHOR K. et HOUGH G. (2005). Survival analysis applied to sensory shelf life of yogurts II : Spanish formulations. *Journal of Food Science*, **70(7)**, 442-445.
- FREITAS M.-A., BORGES, W. et HO L.-L. (2003). A statistical model for shelf life estimation using sensory evaluations scores. *Communications in statistics theory and methods*, **32(8)**, 1559-1589.
- HOUGH G., LANGHOR K., GOMEZ G. et CURIA A. (2003). Survival analysis applied to sensory shelf life of foods. *Journal of Food Science*, **68**, 359-362.
- HOUGH G., GARITTA L. et GOMEZ G. (2006). Sensory shelf life predictions by survival analysis accelerated storage models. *Food Quality and Preference*, **(17)**, 468-473.
- SALVADOR A., FISZMAN S. M., CURIA A. et HOUGH G. (2005). Survival Analysis Applied to Sensory Shelf Life of Yogurts II : Spanish Formulations. *Journal of Food Science*, **70(7)**, 442-445.