

ÉTIENNE DE ROCQUIGNY

**La maîtrise des incertitudes dans un contexte industriel.
2^{de} partie : revue des méthodes de modélisation
statistique physique et numérique**

Journal de la société française de statistique, tome 147, n° 3 (2006),
p. 73-106

http://www.numdam.org/item?id=JSFS_2006__147_3_73_0

© Société française de statistique, 2006, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Journal de la société française de statistique » (<http://publications-sfds.math.cnrs.fr/index.php/J-SFdS>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

LA MAÎTRISE DES INCERTITUDES DANS UN CONTEXTE INDUSTRIEL

2nde PARTIE : REVUE DES MÉTHODES DE MODÉLISATION STATISTIQUE PHYSIQUE ET NUMÉRIQUE

Etienne de ROCQUIGNY *

RÉSUMÉ

Une approche générique des incertitudes, issue de plusieurs années de pratique industrielle dans différents métiers, et destinée à cadrer de manière cohérente et industrielle la modélisation mathématique pratique des incertitudes, a été proposée dans un article précédent (1^{ère} partie). Elle consiste notamment à discerner de grandes étapes comme la quantification des sources d'incertitudes (étape B), la validation inverse associée (B'), leur propagation à travers un modèle physico-industriel pré-existant (étape C), la hiérarchisation d'importance (C') voire l'optimisation qui leur fait suite. Si dans cette même approche globale d'autres paradigmes mathématiques sont possibles, le cadre mixte déterministe-probabiliste apparaît central dans les applications industrielles actuelles : ce cadre permet de présenter de façon intégrée les sous-problèmes de modélisation statistique et de calcul scientifique qui en découlent. Il est montré notamment que le choix des méthodes mathématiques les plus pertinentes, qui associent de façon étroite les mathématiques appliquées et l'analyse physico industrielle, doit être avant tout pensé en fonction du problème posé à l'étude d'incertitudes. Celui-ci dépend plus de la nature de la quantité d'intérêt probabiliste et du critère de décision choisi (étape A) en lien avec une éventuelle réglementation que du domaine physico-industriel concerné. À partir de l'état de l'art de la pratique industrielle actuelle on dégage quelques questions ouvertes, et des axes de recherche qui paraissent prioritaires au vu des applications industrielles potentiellement très nombreuses dans les années à venir.

ABSTRACT

A generic and applied approach to uncertainty, derived from years of industrial practice in different sectors, and aiming at giving a consistent and industrially-realistic framework for practical mathematical modelling of quantitative uncertainty, has been introduced in a previous paper (Part One). It involves in particular the proper identification of key steps such as the quantification (or modelling) of the sources of uncertainty (step B), possibly involving an inverse approach (B'), their propagation through a pre-existing physical-industrial model (step C), the ranking of importance or sensitivity analysis (step C') and sometimes a subsequent optimisation step. Within this framework various mathematical settings are possible : however,

* Coordinateur du Réseau des projets/applications «Incertainces» d'EDF, Ingénieur senior EDF R&D MRI, 6 quai Watier, 78401 Chatou Cedex.
Courriel : etienne.derocquigny@edf.fr

the mixed deterministic-probabilistic setting appears to be central in present industrial applications. An integrated introduction is made henceforth to the subsequent statistical modelling and scientific computing issues. Choosing the most relevant corresponding mathematical methods, that closely blend applied mathematics and physical-industrial analysis, is shown to depend firstly on the specific goal assigned to the uncertainty study. It is related to the applicable regulation and standards and particularly the relevant quantity of interest and decision criterion (step A), more than to the specific physical-industrial domain. Starting from the review of the state-of-the-art of industrial practice, an identification of several open challenges and of the research fields of highest priority is proposed in the view of the very numerous industrial applications bound to come.

1. Introduction : l'approche globale issue de la première partie

La première partie de cette article a introduit, en partant de quatre exemples industriels récents, un cadre global d'appréhension d'un problème industriel d'incertitudes, qui comprend très généralement (cf. Fig.1) :

- un objet physico-industriel au cœur de l'étude, représenté par le modèle ($G(\cdot)$),
- des sources d'incertitudes affectant ces modèles (notées \underline{x}),
- des enjeux industriels (sûreté/sécurité, responsabilité environnementale, optimisation économique et financière) qui pilotent l'étude d'incertitude,
- un ou des critères portant sur une ou des variables finales \underline{z} prédites par la chaîne de modèle pour une ou plusieurs finalités parmi les suivantes :
 - o la justification (ou « certification », vis-à-vis de la réglementation),
 - o la hiérarchisation (des efforts de mesure, de modélisation ou de R&D), menée souvent simultanément avec la première finalité,
 - o l'optimisation (des choix de conception, d'exploitation/maintenance...) ultérieure éventuelle,
 - o la validation (i.e. calage/qualification d'un modèle numérique, d'un procédé de mesure...) parfois menée en amont des autres finalités.

Les étapes essentielles d'une étude sont alors synthétiquement les suivantes (cf. Fig. 2) :

A/ la spécification du problème : le choix de la variable finale (éventuellement vectorielle) z , de l'enchaînement logique des données et modèles adaptés pour les évaluer, du critère décisionnel, et du paradigme de modélisation des incertitudes.

B/ la quantification (ou modélisation) des sources d'incertitudes : la détermination des mesures d'incertitudes \underline{X} par l'estimation de leurs paramètres $\underline{\theta}_X$, qui peut impliquer deux voies différentes :

B : *quantification directe* par expertise et/ou, traitement d'observations directes,

B' : *quantification indirecte* quand les observations ou l'expertise portent sur d'autres variables, par méthodes inverses. Cette étape peut être aussi assimilée à la phase de calage/qualification du modèle, ou, dans un paradigme déterministe, à de l'*identification de paramètres*.

C / la « *propagation d'incertitudes* » : le calcul de la mesure d'incertitude Z de la variable finale z et l'estimation des critères c_z .

C' / la *hiérarchisation d'importance des sources d'incertitudes* (ou « *analyse de sensibilité* ») : le classement de l'importance des composantes X^i des sources vis-à-vis des critères c_z .

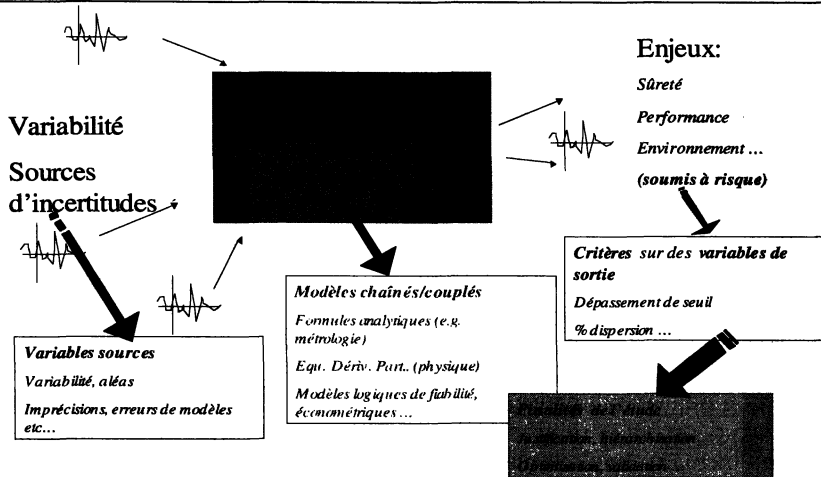


FIGURE 1. — Cadre général et enjeux d'un problème industriel sous incertitudes

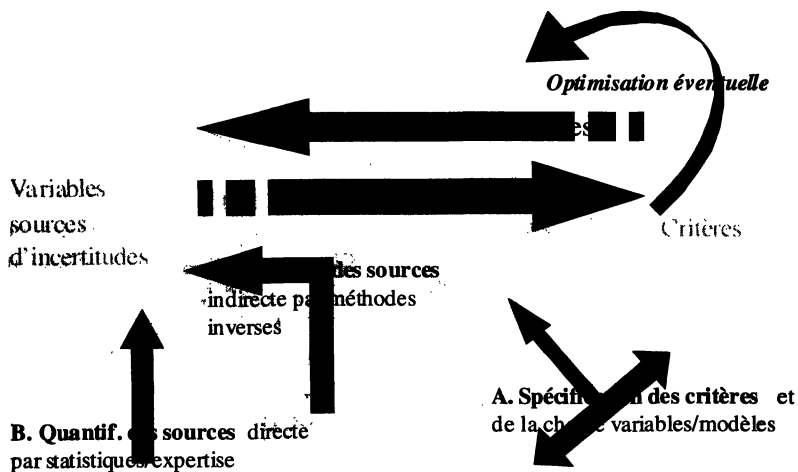


FIGURE 2. — Grandes étapes d'une étude d'incertitudes (en surimpression du cadre général d'un problème industriel)

Un tel traitement d'incertitudes suppose de plonger le modèle physico-industriel déterministe dans un « univers incertain » qui peut être aussi bien déterministe que probabiliste, voire non probabiliste (possibiliste, Dempster-Shafer, flou ...) : le propos de cette 2^{nde} partie est de détailler le cas probabiliste, et plus généralement « mixte déterministe-probabiliste ».

On trouvera à la fin de cet article un rappel des principales notations et abréviations utilisées.

2. Cadre générique de modélisation statistique, et revue des méthodes appliquées industriellement

2.1. Cadre générique de modélisation

Dans un traitement « mixte déterministe-probabiliste », les sources d'incertitudes \underline{x} deviennent un vecteur de variables aléatoires $\underline{X} = (X^i)_{i=1..p}$ dont la mesure est naturellement une distribution de probabilité de loi jointe $f_X(\underline{x}/\underline{\theta}_X)$ paramétrée par $\underline{\theta}_X$; par conséquent \underline{y}_m et \underline{z} deviennent également des vecteurs aléatoires $\underline{Y}_m = H(\underline{X}, \underline{d}) + \underline{U}$ et $\underline{Z} = G(\underline{X}, \underline{d})$ (cf. Fig. 3).

Cette notation formelle de nature *paramétrique* en $\underline{\theta}_X$ est à comprendre d'une façon large : il arrive dans certaines applications que le modèle statistique de X^i soit non-paramétrique, auquel cas on pensera par exemple pour $\underline{\theta}_X$ aux coefficients d'un modèle à noyaux. On inclura formellement aussi la modélisation de la dépendance entre composantes (e.g. $\underline{\theta}_X$ inclut une matrice de covariance, ou les paramètres d'une copule cf. [58]). La notion de densité employée, incluant implicitement les cas de densité continue, discrète ou mélangée, suppose évidemment qu'elle existe, ce qui n'est pas très limitant dans les applications.

Ce cadre sera aussi supposé inclure implicitement le cadre « mixte déterministe-probabiliste » (cf. 1^{ère} partie), c'est-à-dire que certaines composantes de X^i , $i = m + 1, \dots, p$, seront « pénalisées » de façon déterministe en étant fixées à des valeurs x_{pn}^i . Cela pourra toujours se concevoir formellement : soit dans un cadre *conditionnel* à $X^i = x_{pn}^i$, pour $i = m + 1, \dots, p$; soit en réduisant le support de X^i à un seul point x_{pn}^i pour $i = m + 1, \dots, p$. Pour alléger les notations, on n'explicitera plus ci-après ces composantes X^i déterministes, même si elles sont en fait essentielles pour l'industriel. Par ailleurs, Z étant généralement une variable scalaire, on omettra la notation plus générale de vecteur aléatoire \underline{Z} , bien que les propos soient presque toujours transposables au cas vectoriel.

Notons également que, dans beaucoup d'applications, il n'est pas nécessaire, *du point de vue des incertitudes*, d'introduire un cadre de **séries temporelles** : même si le modèle physico-industriel déterministe est éventuellement transitoire, on pourra souvent se ramener (pour les X ou les Y) à des variables aléatoires simples, quitte à paramétrer par un vecteur aléatoire de taille finie une source d'incertitude se présentant comme une série temporelle (e.g. chargement sismique) ou un champ spatial (e.g. propriétés des matériaux). C'est ce qui est proposé ci-après. Cela simplifie les choses par rapport aux travaux de type « assimilation de données » / « traitement de signal » etc.

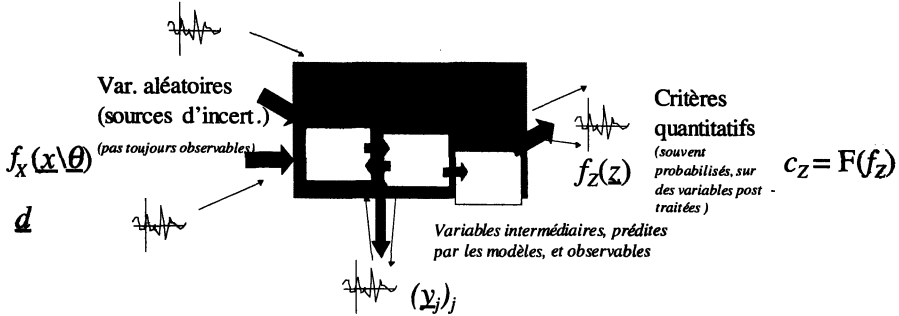


FIGURE 3. — Cadre générique de modélisation statistique

L'étape A aura donc conduit à spécifier l'un des critères probabilistes du Tableau 1 ci-dessous ; un critère s'interprète toujours comme une fonctionnelle de la loi jointe de Z , $c_z = \mathcal{F}[f_z]$, c'est-à-dire, comme dans le cas général, comme une fonction déterministe (très complexe) $c_z = C_z(\theta_X, \underline{d})$ des paramètres θ_X et des variables fixées \underline{d} .

Les sections qui suivent passent en revue les problématiques statistiques intervenant à chaque étape :

- l'étape B, i.e. le choix des lois des sources d'incertitudes $f_{\underline{x}}(\underline{X} = \underline{x}/\theta_X)$ et l'estimation de leurs paramètres θ_X . Si l'on dispose d'observations directes sur les \underline{X} , c'est de l'estimation statistique traditionnelle, classique ou bayésienne (étape B standard) ; sinon, des méthodes inverses probabilistes sont nécessaires (étape B').
- l'étape C, la propagation des sources à travers un modèle physique déterministe $G(\cdot)$ en estimant les quantités caractéristiques de la distribution du vecteur Z précisées par les critères c_z . C'est le domaine des méthodes de calcul physico-probabiliste : MCS simple ou à réduction de variance, approximation FORM-SORM (algorithmes de fiabilité des structures pour l'estimation de la probabilité de dépassement de seuil), éléments finis stochastiques etc. On peut aussi utiliser l'approximation préalable du modèle $G(\cdot)$ par une surface de réponse.
- l'étape C', la hiérarchisation de l'importance relative des sources d'incertitudes X^i vis-à-vis des critères : par les mesures simples (4) et (6) de la 1^{ère} partie, ou des mesures plus sophistiquées de « sensibilité ».

2.2. Les méthodes associées a l'étape B de quantification

2.2.1. Choix de lois et estimation : la pratique industrielle

Le choix et l'estimation de la loi du vecteur aléatoire \underline{X} renvoient à la vaste et classique problématique du modèle d'échantillonnage. On ne mentionnera ici que la pratique industrielle dans le traitement d'incertitudes, résumée dans le tableau 2 : comme il sera précisé ci-après, il est très rare qu'il y ait une estimation directe de la loi jointe de \underline{X} , l'estimation passant plutôt

LA MAÎTRISE DES INCERTITUDES DANS UN CONTEXTE INDUSTRIEL

TABLEAU 1. — Exemples de critères déterministes ou probabilistes envisageables pour une étude d'incertitudes

Type de critère	quantité d'intérêt	version test à seuil « absolu »	version test à seuil « comparatif »
valeur pénalisée	$z_{pn} = G(x_{pn}, d)$	$z_{pn} < z_s$	$z_{pn}(d) < z_{pn}(d^0)$
probabilité (conditionnelle) de dépass. de seuil	$P[Z = G(X / (X^i = x_{pn}^{i=1...p}, d)) > z_s]$	$P[Z > z_s] < Pf_s$	$P[Z > z_s] < P[Z(d^0) > z_s]$
quantile (conditionnel)	$z^\alpha = F_z^{-1}(\alpha)$ où $F_z(z) = P[Z = G(X / (X^i = x_{pn}^{i=1...p}, d)) < z]$	$z^\alpha < z_s$	$z^\alpha(d) < z^\alpha(d^0)$
« incertitude absolue »	$inc_z = k \cdot \sqrt{\text{var}(Z)}$ ou $inc_z = \frac{z^\alpha - z^\alpha}{2}$	$inc_z < i_s$	$inc_z(d) < inc_z(d^0)$
« incertitude relative »	$\%inc_z = k \cdot \frac{\sqrt{\text{var}(Z)}}{E(Z)}$ ou $\%inc_z = \frac{z^\alpha - z^\alpha}{2 \cdot E(Z)}$	$\%inc_z < \%i_s$	$\%inc_z(d) < \%inc_z(d^0)$
espérance	$E(Z)$	Sert plutôt en optimisation $Min[E(Z(d))]$ qu'en test à seuil	

par celle des lois (marginales) des composantes X^i , suivie d'une description assez sommaire des dépendances.

TABLEAU 2. — Choix et estimation des lois des composantes X^i

Situation	Choix des lois des X^i	Estimation des θ_x	Commentaires
Beaucoup de données « classiques », i.e. un échantillon $(X^i)_{i=1...n}$ avec $n=30-100$	- Choix justifiés par la physique, et/ou les pratiques standard du métier - Comparaison de modèles par les tests classiques d'ajustement, ou plus rarement les critères de sélection de modèles d'Akaike (AIC), bayésien (BIC)...	Maximum de vraisemblance, voire méthode des moments ¹	Les traitements classiques sont utilisés en cas de données censurées, d'échantillons hétérogènes, non stationnaires etc. L'usage des méthodes non paramétriques « modernes », e.g. à noyau, reste encore rare.
Information mixte (quelques données et jugement d'expert)	- Choix justifiés par la physique, et/ou les pratiques standard du métier - Choix standard par défaut : le plus souvent normal, uniforme, ou log-normal	- choix « à la main » des paramètres convenant aux deux types d'information - plus rarement, cadre bayésien, l'expertise fixant l'a priori $\pi_0(\theta_x)$	Cette situation est la plus courante industriellement ; le plus souvent via un choix « à la main »
Peu d'information	- Utilisation du « principe d'entropie » (i.e. uniforme si bornée; gaussienne si deux paramètres sont connus et sans borne ...)		

Le choix de loi s'appuie souvent sur d'autres éléments que les tests classiques de modélisation statistique : comme on l'a vu en métrologie, la physique des capteurs ou l'existence d'un dispositif de contrôle commande induisent souvent les choix de loi gaussienne ou uniforme. Ces choix a priori sont parfois déjà spécifiés par des documents réglementaires, en s'appuyant sur des études

1. La méthode des moments, quoique connue pour être moins efficace que le MV, est appréciée parfois pour la simplicité d'estimation ou l'interprétation physique de certains moments (e.g. dans le cas d'une loi de Weibull sur le vent, le moment d'ordre 3 ayant un sens physique).

d'incertitudes de référence (e.g. loi de Weibull pour l'incertitude sur la ténacité en mécanique de la rupture). En matière d'aléas naturels, pour lesquels on s'intéresse généralement aux queues de distribution, on recourt naturellement aux modèles de valeurs extrêmes (EVD, GPD).

À ce propos il faut se rappeler que la finalité de l'étude d'incertitudes n'est pas la quantification des sources, mais qu'elle passe par l'évaluation d'un critère c_z . La qualité du choix de loi n'a pas toujours le même impact sur le résultat final :

- quand le critère s'appuie sur la « dispersion centrale » de Z , par exemple $\%inc_z = k \cdot \frac{\sqrt{\text{Var}(Z)}}{E(Z)}$, il est couramment admis qu'un choix systématique gaussien (e.g. en métrologie) ou log-normal (e.g. en analyse de risque) est acceptable dans la mesure où c_z en dépend peu,
- quand c_z porte sur la queue de distribution (e.g. $P[Z > z_s]$ lorsque z_s est grand en fiabilité des structures), **le choix de loi dans l'étape B est capital** quant au résultat final. Cette remarque essentielle peut d'ailleurs conduire à des aller-retour entre les étapes A et B.

En ce qui concerne la modélisation des dépendances entre composantes du vecteur \underline{X} , à notre sens la pratique industrielle fait essentiellement appel à de la corrélation par rangs, et moins fréquemment à de la corrélation linéaire, dont il est bien connu qu'elle a moins de sens quand les lois ne sont plus gaussiennes. Ce qui s'explique probablement :

- par la grande rareté de l'information sur les dépendances : les échantillons multi-variés sur les sources d'incertitudes étant très rares, la dépendance est essentiellement affaire de jugement d'expert,
- par le souci de faciliter la propagation ultérieure : le tirage de variables avec corrélations de rangs est par exemple faisable dans la simulation MCS.

Quand l'information est vraiment très pauvre, l'hypothèse d'indépendance est souvent faite implicitement. Parfois on modélise la dépendance par des coefficients de corrélation de rangs (Spearman), mais en l'absence d'échantillons multi-variés suffisants pour les estimer de façon stable, on les fera varier sur des intervalles choisis par des experts pour analyser leur impact en phase de propagation².

Les besoins industriels associés à cette étape B restent donc très importants : la pauvreté des données disponibles induit de vastes besoins de mise en œuvre du jugement d'expert (incluant la modélisation des dépendances). Malgré de nombreux travaux étrangers (cf. [24], le Workshop d'Aix-en-Provence de 2005), un processus formel d'intégration (*elicitation* en anglais) de l'expertise dans les sources d'incertitudes est rarement employé dans les applications

2. Ce qui, bien entendu, n'assure pas, même en variant de -1 à $+1$, que l'on ait couvert toutes les possibilités de dépendances plus complexes, ou la question de la dépendance de queues. Plusieurs travaux permettraient d'enrichir la description des dépendances, via le formalisme des copules (cf. [51], [58]), l'estimation bayésienne multi-variée, etc.

françaises : les méthodes bayésiennes y sont encore très peu utilisées, hormis dans le cadre des durées de vie en fiabilité (cf. [50]). Une piste alternative, *a priori* puissante, concerne la justification physique du choix de loi : on peut penser par exemple à la modélisation des processus physico-statistiques intervenant à l'échelle inférieure à la grandeur observée.

2.2.2. Le traitement de l'incertitude *d'estimation* des θ_X

Comme l'a montré la 1^{ère} partie (cf. définitions au § 3.3), à information finie cette étape d'estimation des sources d'incertitudes génère de nouvelles incertitudes d'estimation de $\underline{\theta}_X$. Dans un cadre probabiliste, ces incertitudes d'estimation se reflètent dans la distribution de l'estimateur $\hat{\theta}_X$ fluctuant autour du « vrai » $\underline{\theta}_X^0$. Dans le cas où il y a « beaucoup de données », c'est-à-dire un échantillon $(X_j)_{j=1\dots n}$ de taille suffisante, ces incertitudes sont estimables au moins partiellement, composante par composante :

- soit par la loi exacte à distance finie dans certains cas simples : en métrologie, on se base parfois sur la loi du χ^2 de l'estimateur s^2 de la variance (supposée gaussienne) d'un capteur,
- soit par approximation normale asymptotique. Dans le cadre du maximum de vraisemblance par exemple, on s'appuie classiquement sur l'information de Fisher $\hat{I}_F(\hat{\theta}_n)$ estimée sur l'échantillon $(X_j)_{j=1\dots n}$ pour estimer la variance :

$$\text{Var}(\hat{\theta}_n) \sim \frac{1}{n} \hat{I}_F^{-1}(\hat{\theta}_n) \tag{1}$$

- soit en estimant une borne de confiance d'estimation dans un cadre non paramétrique basé sur la statistique d'ordre : c'est la méthode de Wilks, très utilisée dans le nucléaire aux USA. En fait, celle-ci n'est valable que si le paramètre recherché θ_X est un quantile x^α (d'ordre α de X), et non pas une variance.

On montre classiquement (cf. [2], [52], [81]) que la j -ème plus grande valeur d'un n -échantillon univarié (notée $X^{(n-j+1)}$) correspond à la borne supérieure d'un I.C. unilatéral de niveau β de l'estimation du α -quantile. Si n est tel que :

$$\sum_{k=n-j+1}^n C_n^k \alpha^k (1-\alpha)^{n-k} < 1-\beta \tag{2a}$$

alors

$$P(x^\alpha < X^{(n-j+1)}) > \beta \tag{2b}$$

Cette dernière méthode estime de manière beaucoup plus complète l'incertitude d'estimation que les deux premières mentionnées ci-dessus, par la loi exacte dans le cas normal, ou par l'approximation asymptotique. Ces méthodes, de nature paramétrique, excluent implicitement l'incertitude sur le choix de la loi (ou de la famille de lois), ce qui n'est pas le cas de la méthode de Wilks. Mais corrélativement la méthode de Wilks s'avère très conservative ce qui peut être pénalisant pour l'industriel (cf. [18]).

Enfin, on utilise parfois le bootstrap (cf. [31]) pour simuler la dispersion de $\hat{\theta}_X$.

Par la suite, la question est de savoir s'il vaut mieux retenir pour θ_X son estimation centrale $\hat{\theta}_X$ ou bien une valeur « pénalisée » $\hat{\theta}_{X_{pn}}$. Par valeur pénalisée, entendons une valeur majorée en prenant une borne supérieure d'un I.C., et intégrant donc de l'incertitude d'estimation (définie dans le § 3.3 de la 1^{ère} partie) dans un sens qui rajoute une marge à l'évaluation ultérieure d'un critère de sécurité³. C'était le cas pour certains exemples présentés en 1^{ère} partie :

- dans l'exemple métrologique, on calcule par propagation le critère $c_z = C_z(\theta_X, \underline{d})$ en prenant pour la valeur de θ_X : soit l'estimateur central de la variance $\hat{\theta}_X$, soit une valeur plus grande $\hat{\theta}_{X_{pn}}$, basée elle-même soit sur la loi du χ^2 soit sur le quantile de Wilks.
- dans l'exemple des crues, le dimensionnement dit « déterministe » ne prend pas pour valeur de référence l'estimation moyenne \hat{x}^α d'un quantile x^α , mais sa valeur pénalisée \hat{x}_{pn}^α : par exemple la borne supérieure d'un I.C. bilatéral à 70 % du quantile millénal ($\alpha = 99,9$ %). Autrement dit on ne retient pas la valeur centrale $\hat{\theta}_X$ de l'estimateur des paramètres du modèle paramétrique sous-jacent, mais une borne supérieure d'un I.C. basé sur cet estimateur.

Dans des problématiques de dimensionnement en environnement incertain (comme l'exemple des crues ou celui de la fiabilité mécanique), la variable finale d'intérêt z est souvent monotone par rapport à certaines sources d'incertitudes importantes x^i et le critère c_z est généralement basé sur le non dépassement d'un seuil z_s dans un cadre mixte déterministe-probabiliste. Par conséquent le critère c_z , en tant que fonction de $\underline{\theta}_X$, devient également monotone vis-à-vis de certaines composantes de $\underline{\theta}_X$. Le choix d'intégration ou non de la valeur « pénalisée » du paramètre prend alors une importance considérable : il induira directement une marge supplémentaire sur le dimensionnement qui traduit l'incertitude sur les sources d'incertitudes.

Dans un cadre bayésien enfin, l'incertitude d'estimation de $\underline{\theta}_X$ peut être modélisée par une loi a priori notée $\pi_0(\underline{\theta}_X)$ et par la loi a posteriori $\pi_1(\underline{\theta}_X) = f_{\underline{\theta}}(\underline{\theta}_X / (\underline{X}_j)_j)$ intégrant les observations $(X_j)_{j=1\dots n}$. Les sources d'incertitudes \underline{X} peuvent alors être modélisées suivant leur loi prédictive a posteriori :

$$f_X(\underline{x} / (\underline{X}_j)_j) = \int_{\underline{\theta}} f_{\underline{X}}(\underline{x} / \underline{\theta}_X) \pi_1(\underline{\theta}_X) d\underline{\theta}_X \quad (3)$$

intégrant l'incertitude d'estimation⁴ dans le calcul ultérieur par propagation de c_z .

3. Ce débat ne prend tout son sens que dans les cas où le critère a un comportement monotone vis à vis de $\underline{\theta}_X$.

4. Certains comme [56] proposent alternativement des $\hat{\theta}_{X_{pn}}$ pris égaux à des quantiles de la loi a posteriori $\pi_1(\underline{\theta}_X)$.

La prise en compte ou non de l'incertitude d'estimation des sources d'incertitudes, et la façon dont on la prend en compte ont donc un impact fort sur le résultat industriel final, c'est-à-dire la valeur de c_z : c'est un premier aspect de la question générale du cumul des différentes catégories d'incertitudes introduites en 1^{ère} partie et qui sera reprise au § 3.2 ci-dessous.

2.3. L'étape B' : les méthodes inverses probabilistes

Dans l'étape B', les méthodes inverses sont nécessaires pour estimer $\underline{\theta}_X$ car on dispose d'observations $(y_{mj})_{j=1\dots n}$ portant non pas directement sur \underline{X} , mais sur des variables prédites par le modèle. Les $(y_{mj})_{j=1\dots n}$ sont vectorielles, car des grandeurs physiques différentes (e.g. pression, température, vitesse ...) sont souvent mesurées simultanément ; elles correspondent à des conditions de fonctionnement / d'essais représentées par la série de vecteurs déterministes $(d_j)_{j=1\dots n}$, éventuellement variables d'un j à l'autre mais supposées bien connues.

Sous l'hypothèse que le modèle physique, modulo un bon « calage », est bien représentatif, cette série de mesures s'explique par des réalisations (inobservables) des sources d'incertitudes \underline{X} et de l'écart \underline{U} modèle-mesures : $\underline{Y}_{mj} = \underline{Y}_{mj}^* + \underline{U}_j^* = \underline{H}(\underline{X}^*, d_j) + \underline{U}_j^*$, les \underline{X}_j^* étant i.i.d. et indépendants des \underline{U}_j^* . L'hypothèse sous-jacente d'absence d'erreur de « caractérisation » est bien entendu un pré-requis parfois délicat, bien que l'écart modèle-mesures puisse compenser en pratique une partie de l'erreur de caractérisation.

L'écart modèle-mesures est ici supposé additif. On pourrait bien sûr généraliser via une loi conditionnelle $f(\underline{Y}_{mj}/\underline{Y}_{mj}^*)$ quelconque, mais supposée connue. Le modèle additif est souvent suffisant, quitte à s'y ramener par changement de variables \underline{Y} , par exemple par passage au logarithme quand l'écart est multiplicatif, de type « % d'erreur ».

Après une phase B préliminaire, on connaît en général une partie du vecteur $\underline{\theta}_X$ que l'on notera $\underline{\theta}_X^{kn}$ de $\underline{\theta}_X = (\underline{\theta}_X^{kn}, \underline{\theta}_X^{un})$. Selon les cas on suppose connaître ou non la loi des $\underline{U}_j^* \sim f_U(\underline{u}_j/\underline{\theta}_{Uj})$ (où $\underline{\theta}_{Uj}$ désigne le vecteur de paramètres de la loi de probabilité de \underline{U}_j^* , éventuellement variable d'un essai à l'autre) :

- oui s'il s'agit d'un modèle bien « calé » et de mesures faites avec un processus bien calibré. On cherche alors à identifier des paramètres de variables sources inobservables, l'écart \underline{U} étant attribué essentiellement à de l'incertitude de mesure.
- non en revanche en mode « calage » d'un modèle. L'écart incertain \underline{U} devient alors un résidu à estimer dont la loi est a priori inconnue. Ultérieurement, \underline{U} , ou plus précisément la partie \underline{U}_{mod} de $\underline{U} = \underline{U}_{mes} + \underline{U}_{mod}$, pourra être assimilé à une incertitude de modèle à garder en phase de propagation, ce qui générera des composantes supplémentaires dans le vecteur \underline{X} notées $(X^i)_{i=p+1,\dots,p'} = \underline{U}_{mod}$. L'autre partie de \underline{U} notée \underline{U}_{mes} représente alors une éventuelle incertitude de mesure dont on suppose connaître la loi, comme dans le cas du modèle bien calé. Dans ce second cas, les problèmes d'identifiabilité peuvent être plus importants, et le résultat peut s'avérer plus complexe à maîtriser.

Le problème typique B' devient alors un problème *inverse probabiliste* (cf. [78]) i.e. :

Connaissant $(\underline{Y}_{mj}, \underline{d}_j, \underline{\theta}_{U_j})_{j=1\dots n}$ ainsi que $\underline{\theta}_X^{kn}$ et $H(\underline{x}, \underline{d})$ par calcul numérique (lourd)

$$\text{Identifier } \underline{\theta}_X^{un} \text{ de sorte que } \underline{Y}_{mj} \cong H(\underline{X}_j^*, \underline{d}_j) + \underline{U}_j^* \quad (4)$$

Bien que connexe, ce problème se distingue de beaucoup de travaux menés en « assimilation de données / identification de paramètres » (cf. [77], [80]) pratiqués par exemple en recalage de modèles météorologiques opérationnels. Ces derniers identifient généralement les paramètres \underline{x} supposés déterministes du modèle $\underline{Y} = H(\underline{x}) + \underline{U}$ (e.g. en météo. les conditions initiales) et non pas les paramètres $\underline{\theta}_X^{un}$ de \underline{X} en tant que variables aléatoires. En apparence, ces algorithmes d'assimilation de données produisent également des variances représentant des incertitudes sur les paramètres \underline{x} , mais leur interprétation est plus restrictive (cf. [54]). Il s'agit plutôt de l'incertitude *d'estimation* des paramètres \underline{x} supposés déterministes mais inconnus (comme les conditions initiales d'un système physique donné) que de la variabilité physique « intrinsèque » représentée par les sources d'incertitudes \underline{X} , au sens des catégories qui ont été distinguées dans le § 3.3 de la 1^{ère} partie.

Dans certaines applications où l'on rencontre un problème de type (4), on utilise déjà des algorithmes dérivés de l'algorithme Expectation-Maximisation E-M (cf. [16]). Ils sont en général restreints au cadre gaussien (en \underline{U} et en X^i (voire $\log X^i$)) et quasi-linéaire (vis-à-vis des X^i), moyennant une linéarisation par différentiation locale et éventuellement adaptative de H . C'est le cas de Circé [14] développé au CEA pour la thermo-hydraulique nucléaire. Outre ces limitations, ces algorithmes permettent rarement de valoriser les informations additionnelles essentielles constituées par les connaissances a priori sur \underline{X} et $\underline{\theta}_X$, par expertise ou raisonnement physique (e.g. bornes, éventuellement surestimées, des supports; ordre de grandeur de la dispersion etc.). Des algorithmes spécifiques existent également quand les « observations » sont remplacées par de l'expertise, supposée spécifier directement la loi des \underline{Y} sans écart incertain \underline{U} (cf. [48]).

Des problèmes d'identifiabilité peuvent surgir; néanmoins la véritable finalité n'est pas l'identification exacte et univoque d'un $\underline{\theta}_X^{un}$, mais la qualité de la prédiction ultérieure de $Z = \underline{G}(\underline{X}/(\underline{\theta}_X^{kn}, \underline{\theta}_X^{un}), \underline{d})$ vis-à-vis du critère c_z . Il est suffisant qu'un choix $\hat{\underline{\theta}}_X^{un}$ assure une bonne approximation de Z dans la zone importante pour $c_z = \mathcal{F}[f_Z]$.

Dans le contexte d'un grand nombre de variables physiques incertaines avec une information observable réduite, un choix assez original a été proposé par C. Soize [73] et a été appliqué notamment en mécanique vibratoire industrielle à grand nombre de degrés de libertés ([8], [22]). Il consiste à re-paramétriser les sources d'incertitudes de sorte que le vecteur \underline{X} ne désigne plus les variables physiques (module d'Young, dimensions des structures...) mais les

coefficients du système d'équations matricielles traduisant la connaissance physique du problème physico-industriel (e.g. matrices de rigidité ou de masse en mécanique vibratoire). Le choix de loi sur \underline{X} se fait en invoquant le principe d'entropie maximale dans un espace représentant les contraintes physiques certaines (e.g. matrices définies-positives pour êtres physiques). L'identification des $\underline{\theta}_X$ nécessite une étape B', les X^i étant, par construction, inobservables.

Cela reste un *problème ouvert* d'intérêt industriel majeur (cf. [21]). La recherche appliquée en la matière est essentielle, car dans bon nombre d'applications industrielles les sources d'incertitudes ne sont pas observables alors que d'importants flots de données sont disponibles sur d'autres variables : un réacteur nucléaire par exemple est instrumenté par des moyens de mesures externes par rapport aux phénomènes physiques internes incertains et difficilement observables.

2.4. Les méthodes associées aux étapes C et C'

D'une manière générale, le problème de *propagation* est celui de l'estimation de grandeurs caractéristiques ou quantités d'intérêt (quantile, probabilité, écart-type, coefficient de variation...) de la loi de la variable finale Z , qui est la mesure image de la loi jointe connue de \underline{X} par $G(\cdot)$. $G(\cdot)$ est *calculable* mais éventuellement avec un temps CPU élevé.

$$\text{Déterminer } c_Z = \mathcal{F}(f_Z) \text{ avec } \begin{cases} \underline{X} \sim f_X(\underline{X} = \underline{x}/\underline{\theta}_X) \\ Z = G(\underline{X}, \underline{d}) \end{cases} \quad (5)$$

La question de la hiérarchisation (étape C'), c'est-à-dire de l'importance relative des variables aléatoires X^i vis-à-vis de c_Z , s'avère totalement dépendante de l'étape C : pour pouvoir hiérarchiser, il est indispensable d'avoir propagé auparavant, et la mesure d'importance dépend de la méthode de propagation.

Une abondante littérature aborde ce problème C/C', notamment en fiabilité des structures, et d'importants travaux de R&D continuent à ce sujet : on ne donnera ci-après que la problématique générale.

2.4.1. La méthode de référence et la problématique associée

Existe-il une réponse universelle au problème de propagation (C)? Théoriquement le problème de propagation (probabiliste) peut toujours être résolu par simulation de Monte-Carlo standard (MCS), car la convergence des estimateurs fondamentaux qui suivent est assurée dans tous les cas « physiques » :

$$\begin{aligned} \hat{F}_{Z_n}(z) &= \frac{1}{n} \sum_{j=1 \dots n} 1_{G(\underline{X}_j, \underline{d}) < z} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} F_Z(z) \\ \overline{G(\underline{X})} &= \frac{1}{n} \sum_{j=1 \dots n} G(\underline{X}_j, \underline{d}) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} E(Z) \\ s_Z^2 &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} \text{var}(Z) \end{aligned} \quad (6)$$

LA MAÎTRISE DES INCERTITUDES DANS UN CONTEXTE INDUSTRIEL

Ces trois estimateurs convergent *presque sûrement*, les conditions étant respectivement :

- que Z soit une v.a. c'est-à-dire que $G(\cdot)$ soit mesurable : car dans ce cas, l'espérance des v.a. $1_{G(X_j, d) < z}$ reste finie et vaut $P(Z < z)$,
- que l'espérance de Z soit finie,
- que la variance de Z soit finie.

Cela entraîne la convergence des estimateurs de c_z (cf. 1^{ère} partie – tableau 5), car ils s'en déduisent par transformations simples qui sont continues, sauf en un point pour les c_z de type test comme $P[Z > z_s]$, ce qui n'est pas gênant asymptotiquement. On imagine difficilement que ces conditions ne soient pas respectées sur un objet physico-industriel. $G(\cdot)$ est intégrable au sens de Lebesgue car $G(\cdot)$ est généralement continue (sauf d'éventuelles discontinuités en quantité dénombrable ou de mesure nulle), et donc intégrable même au sens de Riemann. Par ailleurs $G(\cdot)$ est physiquement toujours borné, ce qui est aussi le cas des supports de X ; s'il arrive que l'on utilise des lois en X à support théorique infini, ce n'est qu'une approximation des supports réels bornés, que la simulation numérique réelle se charge de toute façon de tronquer. L'espérance et la variance sont donc également bornées.

Ces considérations très classiques ont une conséquence majeure pour le traitement d'incertitudes : les conditions de convergence de MCS ne constituent aucune contrainte vis-à-vis de certaines « irrégularités relatives » de $G(\cdot)$ rencontrées couramment dans des cas physico-industriels : la non-linéarité, la non-monotonie, ou encore des non-différentiabilités ou discontinuités locales (par exemple dans les modèles thermo-hydrauliques d'accidents avec bifurcations).

L'autre grand avantage de MCS est qu'elle fournit **toujours un estimateur de l'incertitude de propagation**, qui détermine le nombre minimal de calculs nécessaire, cf. tableau 3 :

TABLEAU 3. — Estimateurs de l'incertitude de propagation pour deux critères distincts

critère c_z	estimateur	incertitude de propagation : variance et IC (asymptotique)	I.C. propagation à distance finie	Ordre de grandeur des calculs nécessaires <i>a minima</i>
$Pf = (Z > z_s)$	$\hat{c}_z = \hat{F}_{Z_n}(z_s)$	$\text{var } \hat{c}_z = \frac{1}{n} Pf(1-Pf) \approx \frac{1}{n} \hat{P}f(1-\hat{P}f)$ $\hat{c}_z \pm 2\sqrt{\frac{1}{n} \hat{P}f(1-\hat{P}f)}$ à 95%	Formule de Wilks (cf. 2a, 2b) (quelques soient les lois de $X, Z \dots$)	$n \sim 100.P_f^{-1}$
$inc_z = k\sqrt{\text{var}(Z)}$	$\hat{c}_z = k\sqrt{s^2}$	$\text{var } \hat{c}_z = k^2 \text{var}(s) \approx \frac{1}{2n} k^2 s^2$ $\hat{c}_z \pm 2\sqrt{\frac{1}{2n} k.s}$ à 95%	$s_{n-1} \sqrt{\frac{n-1}{\chi_{n-1}^2(\frac{1 \pm \beta}{2})}}$ (cas gaussien)	$n \sim 50$

N.B. pour le nombre de calculs nécessaires c'est un minimum grossier : on a fixé un coefficient de variation à 10 % sur l'incertitude de propagation prise dans son estimation normale asymptotique, soit $\pm 20\%$ à 95 % de confiance.

Contrairement à la quasi-totalité des méthodes alternatives, l'incertitude générée par MCS **ne dépend pas du nombre p des sources d'incertitudes**. Ce résultat est classique : il repose sur le fait que la variance des estimateurs (cf. (6) et tableau 3) ne dépend que de la loi de Z , par exemple de la rareté du quantile ou de la probabilité de dépassement de seuil recherchée. Tant que l'augmentation du nombre p de sources d'incertitudes ne modifie pas (tout au moins en ordre de grandeur) ces caractéristiques, cela n'affecte en rien le nombre de calculs nécessaires. Par exemple, il faudra autant de simulations de MCS pour estimer un quantile z^{95} % qu'il y ait deux ou bien cent sources d'incertitudes dans le modèle $G(\cdot)$ sous-jacent : ce nombre ne dépend que de $P_f = \alpha = 0,05$ et de la précision recherchée, comme le rappellent la formule de Wilks (cf. 2a, 2b) ou la formule asymptotique du Tableau 3. Si l'on cherche à estimer un critère sur la dispersion centrale inc_z basé sur l'écart-type, l'incertitude de propagation a une variance asymptotique⁵ de $\frac{1}{2n} k^2 \cdot s^2$, c'est-à-dire un coefficient de variation de $\sqrt{\frac{1}{2n}}$, indépendant de la dimension de X .

Ce point est souvent méconnu des praticiens, peut-être parce que, contrairement à la propagation («uncertainty analysis» dans la littérature anglo-saxonne spécialisée), le nombre de calculs de MCS **croît avec p pour la phase de hiérarchisation** («sensitivity analysis»). En effet la mesure d'importance associée (cf. (6) de la 1^{ère} partie) repose sur des estimateurs des coefficients de régression de Z en fonction des X^i dont la variance est par exemple en $1/(n - p - 1)$ pour la régression linéaire.

Les réelles difficultés de mise en œuvre de MCS apparaissent donc : soit pour la hiérarchisation en cas de nombre de sources d'incertitude élevé (p grand), soit pour la propagation selon un critère à seuil correspondant à un événement rare, pour lequel le nombre de calculs croît selon $100/P_f$ en ordre de grandeur⁶. Le temps de calcul disponible étant limité, des alternatives à MCS (tableau 4) devront assurer un compromis entre :

- un **temps de calcul réaliste** (i.e. un nombre d'appels à $G(\cdot)$ limité) : selon les méthodes, ce temps dépend du nombre de variables (i.e. de la dimension de X ou de Z) et/ou du critère c_z ,
- un **contrôle de la précision** c'est-à-dire de l'incertitude générée par la propagation. Celle-ci dépend de façon critique du critère c_z considéré et des caractéristiques de régularité du modèle déterministe $G(\cdot)$ (e.g. linéarité, monotonie, variations bornées ...).

5. La convergence de l'estimateur vers son comportement normal asymptotique n'est pas forcément immédiate si la forme de la loi de Z est quelconque : cela dit, ce n'est pas en soi le nombre de sources d'incertitudes en entrée de $G(\cdot)$ qui règle cette forme ... sauf peut-être dans un cas d'école où $G(\cdot)$ serait une simple somme, auquel cas un grand nombre p de sources rendrait Z «plus gaussienne». Même si dans ce cas l'estimation asymptotique sera plus rapidement valable avec p grand, cela ne présume pas du fait que le coefficient de variation de l'estimateur varie significativement avec p .

6. Notons que dans ce cas, la formule de Wilks (cf. § 2.2.2), permet de contrôler de façon exacte à distance finie le nombre minimal de calculs pour un quantile à une confiance donnée, et ceci indépendamment des irrégularités éventuelles de $G(\cdot)$ (cf. [18].)

2.4.2. Les principales méthodes utilisées et les compromis nécessaires

TABLEAU 4. — Principales méthodes de propagation d'incertitudes

Famille de méthodes	Critère c_Z (pour lequel la méthode est adaptée)	Méthode de calcul	Nature de l'incertitude de propagation et contrôle possible	Temps de calcul : nombre d'appels à $G(\cdot)$	Mesure d'importance
(a) Déterministe fort (ou « min/max »)	$z_{pn} < z_s$	Algorithme d'optimisation (souvent à gradient)	Maxima secondaires. Contrôle délicat	Eventuellement très fort	locale par gradient
(b) Cumul quadratique (ou méthode des perturbations)	surtout $inc_z = k\sqrt{\text{var}(Z)}$	Développement limité d'ordre 1 (D.L.1) de $\text{var}(Z)$ (voire pour $E(Z)$ et autres moments, à l'ordre $k > 1$)	Ecart au D.L.1 par non-linéarité. Contrôle délicat en général	très faible	locale par importance quadratique
(c) Intégration numérique (ou méthode des « quadratures »)	tous critères probabilistes $inc_z = k\sqrt{\text{var}(Z)}$ $E(Z)$ $P[Z > z_s]$	Calcul numérique de $\int_{z_s} A(G(\underline{x}))f_x(\underline{x})d\underline{x}$ e.g. par points de Gauss, ... $A(\cdot)$ étant une fonction analytique simple.	Erreur d'intégration. Contrôle numérique si $A(G(\underline{x}))f_x(\underline{x})$ assez régulière	Faible si p très petit ; mais croît très vite en n_d^p	non en général
(d) Simulation MCS	tous critères probabilistes	Estimateurs statistiques de c_Z par échantillonnage ($Z_j = G(\underline{X}_j)_{j=1..n}$)	Erreur statistique. Contrôle statistique toujours possible	Très Fort pour $P(Z < z_s)$ rare, raisonnable pour Inc_z . Mais ne dépend pas de p	globale par corrélation de rang, voire par Indices de Sobol
(e) Accélération de MC	surtout $P[Z > z_s]$	Idem, mais par biaisage (éventuellement adaptatif) du tirage des $(\underline{X}_j)_{j=1..n}$	Erreur statistique. Contrôle statistique parfois dégradé	Moyen dans les cas favorables	globale, (parfois et de façon plus délicate que MCS)
(f) Méthodes flabillistes (Form-Sorm, et dérivées)	$P[Z > z_s]$	Approximation numérique de l'intégrale $\int_{1_{G(\underline{x}) > z_s}} f_x(\underline{x})d\underline{x}$	Erreur d'approximation fonctionnelle. Contrôle très difficile sauf cas particulier	Faible dans les cas favorables (« régularité » + p pas trop grand)	locale (sous réserve que l'approximation Form ou Sorm est justifiée)
(g) Méthodes hybrides Form-MC	$P[Z > z_s]$	Echantillonnage adaptatif selon résultat	Erreur mixte. Contrôle statistique partiel	Moyen dans les cas favorables	locale
(h) Méthodes par développement stochastique	surtout $inc_z = k\sqrt{\text{var}(Z)}$ $E(Z)$ avec \underline{Z} vectoriel	Développement de Z (voire de X) sur des polynômes de gaussiennes	Erreur numérique (troncature du degré polynomial). Contrôle encore peu développé	Moyen à Fort, mais faible en proportion si \underline{Z} est vectoriel de dimension (r) forte	encore peu développées

La méthode (a) ne s'applique qu'à un critère déterministe, et consiste en un problème classique d'optimisation sous contrainte, où Ξ désigne l'espace des possibles de \underline{x} , c'est-à-dire le support de la loi jointe de \underline{X} :

$$\max_{\underline{x} \in \Xi} G(\underline{x}, \underline{d})$$

C'est un très grand défi numérique, car $G(\cdot)$ n'est généralement ni linéaire ni convexe, et mobilise un grand nombre p de variables. La qualité du résultat, au sens de son écart par rapport au véritable optimum, est souvent indiscernable à cause des minima locaux. Une version simplifiée est souvent utilisée : elle consiste à maximiser $G(\cdot)$ sur un plan d'expériences construit sur les bornes

des intervalles décrivant l'incertitude sur chaque composante de \underline{X} : dans le cas général dans lequel $G(\cdot)$ n'est pas monotone, il n'y a alors aucune garantie d'atteinte du véritable optimum, ni d'ordre de grandeur de l'écart par rapport à celui-ci.

La méthode (c) consiste à calculer numériquement les intégrales multiples intervenant dans c_z comme :

$$P_f = P(Z > z_s) = \int_{\underline{x}} 1_{G(\underline{x}) > z_s} f_X(\underline{x}/\theta_X) d\underline{x}$$

ou $E(Z^k) = \int_{\underline{x}} G(\underline{x})^k f_X(\underline{x}/\theta_X) d\underline{x} \quad (k = 1, 2)$

Cette méthode n'est efficace par rapport à (d) que si p est très petit, le nombre d'appels à $G(\cdot)$ croissant en n_d^p où n_d est le nombre de points d'intégration selon chaque X^i (typiquement $n_d \sim 3-6$). L'incertitude de propagation (qui décroît avec n_d) peut théoriquement être bornée à partir des bornes des dérivées d'ordre croissant de l'intégrande ; mais en pratique ces valeurs a priori inconnues sont délicates à estimer.

Les méthodes (e) à (g) estiment l'intégrale multiple P_f par des stratégies concurrentes de celle de l'échantillonnage aléatoire de X .

Les méthodes (e), d'accélération de MCS, dites de « réduction de la variance », sont destinées à réduire la variance des estimateurs des critères à nombre égal de tirage, ou si l'on préfère, à réduire le nombre de tirages nécessaires à incertitude de propagation de variance égale. Outre l'Hypercube Latin (LHS, cf. [39]), elles incluent les méthodes statistiques classiques d'échantillonnage biaisé (tirage d'importance, stratification) qui sont toutes assez génériques pour un certain nombre de critères. Dans le cas d'un critère en dépassement de seuil, l'estimateur devient :

$$\hat{P}_f = \frac{1}{n} \sum_{j=1 \dots n} 1_{G(\underline{X}_j, \underline{d}) > z_s} \frac{f_X(\underline{X}_j)}{\tilde{f}_X(\underline{X}_j)} \quad (7)$$

où les \underline{X}_j sont tirés *i.i.d.* selon une densité d'importance \tilde{f}_X qui peut être adaptative : si l'on a une information physique *a priori* sur les zones où $G(\underline{X}, \underline{d}) > z_s$ est plus probable, et que l'on y densifie les tirages, ces méthodes peuvent réduire de beaucoup la variance de \hat{P}_f .

Les méthodes (e) incluent également certaines méthodes spécifiques à l'intégrale P_f , comme la simulation directionnelle, ou encore la *réduction de la dimension* également dénommée le *Monte-Carlo conditionnel*. Cette dernière méthode est très efficace si la forme de $G(\cdot)$ permet d'extraire algébriquement une source d'incertitude x^{i_0} de la manière suivante :

$$G(\underline{X}_j, \underline{d}) > z$$

se réécrit d'une manière équivalente par :

$$X_j^{i_0} > K((X_j^i)^{i \neq i_0}, \underline{d}, z)$$

où $K(\cdot)$ désigne la fonction obtenue par simple réarrangement algébrique de la fonction $G(\cdot)$ en isolant la variable x^{i_0} . C'est le cas pour un critère de dépassement de seuil critique quand celui-ci est incertain (e.g. ténacité en mécanique, dose environnementale ...). Le tirage MCS se fait alors sur le vecteur $(X_j^i)^{i \neq i_0}$ de dimension $(p - 1)$, d'où le terme de «réduction de la dimension». La variance du nouvel estimateur \hat{P}_f de P_f

$$\hat{P}_f = \frac{1}{n} \sum_{j=1 \dots n} f_{X^{i_0}}(K((X_j^i)^{i \neq i_0}, \underline{d}, z)) \tag{8}$$

est alors amoindrie si la source d'incertitude x^{i_0} est importante (cf. [10] [34] [67]).

Les méthodes (f) (cf. Fig.4) sont basées sur des approximations probabilistes tirant parti de la géométrie de l'espace des sources d'incertitudes \underline{x} sur lequel est évaluée l'intégrale P_f . Tout d'abord, si \underline{X} suit une loi multi-normale centrée réduite, alors on constate les deux points suivants :

- si la forme géométrique de l'hypersurface dite «d'état limite» $\{\underline{x} \text{ t.q. } G(\underline{x}) = z_s\}$ ⁷ est simple c'est-à-dire hyperplane (resp. parabolicoïde), le calcul de l'intégrale P_f devient analytique et ne dépend que de la distance de l'hypersurface à l'origine, notée β pour Form (resp. ses courbures en ce point pour Sorm). Le point de l'hypersurface le plus proche de l'origine est dénommé le *point de conception* («design point»).
- les déviations de $\{\underline{x} \text{ t.q. } G(\underline{x}) = z_s\}$ par rapport à l'hyperplan (resp. la surface d'ordre 2) tangent au point de conception deviennent négligeables si elles interviennent à plus forte distance D que β . Ceci est lié à la décroissance très rapide (en $\exp(-D^2)$) de la vraisemblance.

Ainsi, il suffit d'identifier le point de conception pour déterminer une approximation de P_f . Cette approximation est d'autant meilleure que l'hypersurface d'état limite est proche d'un hyperplan ou d'un parabolicoïde. La recherche du point de conception est l'objet d'un programme d'optimisation sous contraintes, pour lequel une vaste littérature s'est développée dans le domaine de la *fiabilité des structures* (cf. par exemple [25]).

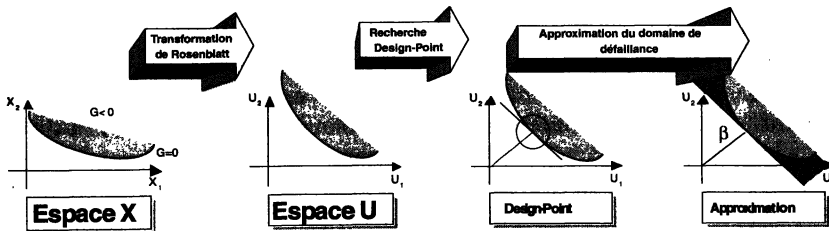


FIGURE 4. — Principes de l'approximation probabiliste Form

7. Les conventions en fiabilité des structures conduisent à noter l'état limite par $\{\underline{x} \text{ t.q. } G(\underline{x}) = 0\}$ et calculer une quantité d'intérêt $P_f = P(G(\underline{x}) < 0)$ ce qui revient à substituer à notre fonction $G(\underline{x})$ la fonction $G(\underline{x}) = z_s - G(\underline{x})$.

Dans le cas général où la loi de \underline{X} est quelconque, il suffit de la transformer préalablement en une multinormale centrée réduite, par un changement de variable $\underline{u}_F = T^{-1}(\underline{x})$ qui transforme l'espace dit « physique » (ou espace X) en « espace standard » (ou espace U). En considérant désormais le problème équivalent $P(GoT(\underline{u}_F) > z_s)$, on recherche le *point de conception* par le programme d'optimisation. La transformation exacte, simple en cas de sources indépendantes (via les fonctions de répartition $u_{F^i} = \Phi^{-1} \circ F_{X^i}(x^i)$) est plus délicate en pratique si elles sont dépendantes : la transformation dite de « Rosenblatt » qui procède par conditionnement itératif ($u_{F^i} = \Phi^{-1} \circ F_{X^i}(x^i / (X^j = x^j)_{0 < j < i})$), souvent trop complexe en pratique, est approchée par la transformation de Nataf qui suppose que les variables transformées U_F^i forment un vecteur gaussien, que l'on dé-corrèle par décomposition de Cholesky.

L'intérêt décisif provient du fait que le nombre d'appels au code physique devient indépendant de la probabilité recherchée (mais croissant avec p) ce qui est très efficace pour des quantiles rares. Le résidu d'approximation *numérique* de P_f n'est malheureusement pas contrôlable en général. La monotonie de $G(\cdot)$, qui paraît souvent raisonnable en fiabilité mécanique des structures, réduit seulement partiellement les risques : les zones $G(\underline{x}) > z_s$ ne peuvent alors se situer que d'un seul côté de l'origine de l'espace. Une littérature considérable s'est développée pour sophistiquer la méthode et contrôler son conservatisme ; certaines stratégies consistent à contrôler l'existence d'autres points de conception secondaires (cf. le code Mefisto [29]), quitte à les inclure dans un calcul « multi-Form » (cf. [7]). Grâce aux méthodes hybrides (g), qui associent Form-Sorm à la simulation, on retrouve le contrôle (partiel) de précision associé aux méthodes de simulation, par exemple en décentrant l'échantillonnage autour du point de conception : c'est le cas du tirage d'importance autour du point de conception, de la simulation Axis Orthogonal Simulation etc., cf. [34].

Les méthodes « stochastiques » (h), en pleine expansion, ont en commun le développement de stratégies de calcul offrant d'emblée une grande richesse de prédiction de la loi de Z en ramenant la propagation à un problème numérique « spectral » par développements de Z (et souvent de \underline{X}) sur des bases fonctionnelles, comme le « chaos polynomial » (polynômes de variables aléatoires de lois analytiques). Traditionnellement (cf. [75]) ces méthodes ont été inspirées par des problèmes impliquant des champs aléatoires (en \underline{X} et/ou en Z) et non pas seulement des variables ou vecteurs aléatoires, et en modifiant la résolution numérique du problème déterministe, c'est-à-dire en étant « intrusives » vis à vis du développement du code physico-numérique. Mais leur développement, désormais souvent *non-intrusif* (i.e. sans changer le code) se rapproche de la technique des surfaces de réponse (cf. [76]).

2.4.3. L'utilisation de modèles approchés (surfaces de réponse)

Une approche complémentaire, plutôt qu'une méthode de propagation en soi, consiste à remplacer le modèle physico-industriel initial $G(\cdot)$ par une approximation $\hat{G}(\underline{x}) \cong G(\underline{x})$ dite « surface de réponse » (ou « méta-modèle »). Elle désigne une fonction déterministe quelconque mais numériquement plus

rapide à calculer que le modèle initial : polynômes, réseau de neurones, développement stochastique... voire un modèle physico-industriel simplifié (cf. [5], [19], [23], [46], [57], [59], [76]). Une fois muni de cette surface de réponse, on peut lui appliquer une méthode de propagation très sûre et gourmande en CPU (généralement MCS). Outre le cas où il faut justifier un critère de sécurité sur un modèle $G(\cdot)$ très lourd, cette approche est particulièrement intéressante quand l'étude d'incertitudes implique des itérations multiples de l'étape C de propagation. C'est le cas par exemple si la finalité est l'optimisation ou la validation via une étape inverse B'.

La problématique est celle de l'optimisation du plan d'expériences $(\underline{x}_j)_j$ nécessaire à la construction de la surface, tout en maîtrisant le résidu $v(\underline{x}) = G(\underline{x}) - \tilde{G}(\underline{x})$ notamment dans la zone des x importante pour le critère c_Z . On utilise souvent le cadre d'un modèle linéaire généralisé sur des fonctions de base $(\tilde{G}^l(\underline{x}))_l$ avec résidu gaussien, mais éventuellement hétéroscédastique, et auto-corrélé au sein d'un processus spatial :

$$G(\underline{x}) = \tilde{G}(\underline{x}) + v(\underline{x}) = \sum_l \tilde{G}^l(\underline{x}) \cdot \beta^l + v \quad (9)$$

Cf. [59] dans le nucléaire. β^l est typiquement estimé aux moindres carrés sur $(\underline{x}_j)_j$ ce qui permet de contrôler statistiquement v . Le plan d'expériences $(\underline{x}_j)_j$ peut être soit déterministe (plans classiques, optimaux au sens d'une certaine mesure, itératifs ...) soit plus ou moins aléatoire (hypercubes latins, quasi Monte-Carlo, ...). La problématique s'apparente au krigeage. Néanmoins, comme $G(\cdot)$ est déterministe, l'interprétation probabiliste du résidu et de l'incertitude d'estimation des paramètres β^l et de v , qui constituent la principale incertitude de propagation générée par cette approche, est très spécifique (cf. [44]). Le caractère gaussien du résidu, non évident à garantir, a une plus forte incidence dans l'utilisation de $\tilde{G}(\underline{x})$ pour les critères de type seuil $P(G(\underline{X}) > z_s)$ que pour les critères portant sur la dispersion centrale.

2.4.4. Les mesures d'importance (méthodes pour la phase C')

En 1^{ère} partie, deux mesures d'importance élémentaires ont été fournies. Le tableau 4 montre que la plupart des méthodes de propagation s'accompagnent de mesures d'importance des sources d'incertitudes X^i (également appelés *facteurs* dans ce contexte).

Dans le cas idéalisé gaussien, affine, et à incertitudes indépendantes ces mesures coïncident. En effet :

$$z = G(\underline{x}) = \sum_i G^i x^i + G^0 \Rightarrow \text{Corr}(Z, X^i)^2 = \frac{(G^i)^2 \text{var } X^i}{\text{var } Z} = \frac{(\partial G / \partial X^i)^2 \text{var } X^i}{\sum (\partial G / \partial X^k)^2 \text{var } X^k} = \frac{\text{var}(E(Z/X^i))}{\text{var } Z} \quad (10)$$

Ceci montre l'égalité des mesures associées aux corrélations linéaires⁸, au cumul quadratique Taylor et aux indices de Sobol. Les indices de Sobol (cf. [72]) sont des ratios de décomposition de la variance de Z faisant intervenir les variances d'espérance de Z conditionnelles aux composantes X^i regroupées à plusieurs ordres : dans le membre de droite de l'égalité (10), on met en évidence l'indice d'ordre 1, qui est confondu avec l'effet total et coïncide avec les autres mesures d'importance dans le cas gaussien, affine et indépendant. En ce qui concerne FORM, la transformation de Rosenblatt revient dans ce cas très simple à normer les incertitudes par leurs écart-types ; la « surface de défaillance » $G = z_s$ est plane, et son gradient, constant, a pour composantes $G^i \sqrt{\text{var}(X^i)}$: ces composantes sont proportionnelles aux *cosinus directeurs* de l'origine au point de conception dans l'espace standard. Les facteurs d'importance FORM égalent donc les autres mesures d'importance.

Ce n'est néanmoins plus le cas en non-linéaire et/ou non-gaussien : les mesures se distinguent alors par leurs hypothèses sous-jacentes, comme l'hypothèse linéaire pour le cumul quadratique, monotone pour la corrélation de rangs, ou de validité de l'approximation pour Form, tandis que les indices de Sobol ne supposent aucune hypothèse. Les mesures se distinguent aussi par le critère vis-à-vis duquel elles hiérarchisent l'importance des sources : un critère en variance (ou coefficient de variation) pour le cumul quadratique, les corrélations de rang, les indices de Sobol etc. ; un critère en probabilité de dépassement de seuil pour Form.

Une autre distinction est faite dans la littérature de « l'analyse de sensibilité » (entendue au sens de notre étape C'), entre :

- la sensibilité « locale », au sens où seule une partie de la distribution est examinée : par exemple au voisinage de l'origine, ou au voisinage d'un dépassement de seuil (e.g. cumul quadratique, ou facteurs d'importance Form),
- la sensibilité « globale », vis-à-vis de l'ensemble de la distribution (e.g. indices de Sobol, voire corrélations de rang).

Cette distinction très classique, qui ne devient d'ailleurs effective qu'en dehors du cas linéaire gaussien, ne recouvre pas exactement la distinction suivant le critère vis-à-vis duquel on hiérarchise les incertitudes : la grande majorité des mesures développées dans l'analyse de sensibilité se rapporte en effet à un critère de variance, c'est-à-dire de dispersion centrale, même si c'est souvent implicite.

La revue ci-dessus n'est pas exhaustive (cf. [55] [69]). Des questions ouvertes concernent par exemple l'optimisation du nombre de calculs à mener : ce nombre est important pour les méthodes de corrélations de rang, voire très important pour stabiliser l'estimation des indices de Sobol, si l'on se contente de MCS. C'est ce qui a justifié le développement de la méthode FAST (Fourier

8. La corrélation de rang diffère peu de la corrélation linéaire dans le cas gaussien : selon [70] on a approximativement : $\rho_s = \frac{6}{\pi} \text{Arcsin} \left(\frac{\rho_p}{2} \right)$ où ρ_s et ρ_p désignent les coefficients de rang (Spearman) et linéaire (Pearson) : numériquement cette relation s'avère s'écarter de l'égalité de 5 % au plus sur l'intervalle $[-1, 1]$.

Amplitude Sensitivity Test, basée sur une transformation de Fourier, cf. [13], [68]). Par ailleurs, en cas de dépendances entre sources d'incertitudes, la mesure d'importance de chacune des sources est plus délicate à manipuler ; la hiérarchisation d'importance a plus de sens en partitionnant l'ensemble des variables en groupes indépendants de l'un à l'autre (cf. [43]).

2.4.5. *Challenges numériques, distribution des calculs et utilisation de la dérivation directe ou adjointe des codes*

L'étude d'incertitudes conduira inévitablement à un nombre d'appels au code physico-industriel très supérieur à celui d'une étude « best-estimate » traditionnelle (un seul calcul « pénalisé »). On l'a vu, dans un paradigme déterministe « fort », la maximisation de la réponse sur les supports incertains implique de nombreux calculs d'optimisation. Dans un paradigme probabiliste simple, même avec une méthode accélérée, plusieurs dizaines ou centaines de calculs seront nécessaires a minima. Même si l'usage des surfaces de réponse change la donne (cf. [12]), les approches qui suivent seront encore plus gourmandes ($> 10^3 - 10^5$ calculs) :

- le paradigme « mixte déterministe-probabiliste », imbriquant une maximisation par intervalles sur les composantes prises déterministes avec, pour chaque point, un calcul probabiliste conditionnel sur les variables probabilisées ;
- l'optimisation sous incertitudes ;
- les algorithmes de quantification inverse des sources d'incertitudes, imbriquant également optimisation et propagation dans le cas général.

Outre l'optimisation des solveurs des codes eux-mêmes et leur parallélisation, le défi numérique pourra être réduit, selon les méthodes de propagation choisies, par :

- la **distribution massive des calculs**, immédiate dans certaines méthodes comme MCS, mais restant probablement à optimiser pour les autres méthodes,
- l'**utilisation des codes dérivés**, quand la propagation s'appuie sur les gradients, ce qui est le cas des méthodes déterministes (a), du cumul quadratique (b) de Form-Sorm ou de ses hybrides (f)/(g)). A l'utilisation toujours possible des différences finies (ou « divisées » i.e. $([G(x + \varepsilon^i) - G(x)]/\varepsilon^i)$ on peut substituer celui de la dérivée codée $(\partial G/\partial x^i)^i$.

Notons que l'utilisation des modes de différentiation directe ou adjointe donne théoriquement le même résultat final, hors problème de stabilité numérique. Mais l'un ou l'autre des modes est plus ou moins optimal en temps de calcul selon le ratio entre la dimension des entrées \underline{X} et celle des sorties intermédiaires \underline{Y} du code physique impliqué dans le calcul de la variable finale Z . Les dérivées, qui sont de nouvelles réponses du code numérique, nécessitent une résolution spécifique supplémentaire : l'algorithme peut être soit codé « à la main », soit s'appuyer sur des algorithmes de différentiation automatique

(cf. [32], [37]), à condition de se restreindre à des sous-parties suffisamment «simples» de grands codes industriels en termes d'architecture.

3. Quelques questions ouvertes

3.1. Critère d'incertitude, acceptabilité et principe de précaution

Le cadre générique ci-dessus a montré que l'on peut *techniquement* représenter dans une étude industrielle une grande variété de sources d'incertitudes et en contrôler l'impact suivant la finalité assignée à l'étude. Tout dépend néanmoins du critère fixé à l'étude, du paradigme choisi, et du traitement appliqué aux différentes sources d'incertitudes, c'est-à-dire de «l'étape A».

Notons que la fixation du critère c_Z peut naturellement être mise en relation avec la modélisation des préférences du décideur dans le cadre d'une théorie de la décision : une règle de décision fondée sur l'espérance d'utilité de la variable finale peut être mise en œuvre pour modéliser l'aversion au risque du décideur (cf. [79]). De manière plus générale, une règle de décision non-linéaire en probabilité (c'est-à-dire fondée sur la transformation subjective des probabilités par les agents) constitue également une représentation généralisée de l'aversion au risque (cf. [3], [63]). Dans le cas de probabilités jugées imprécises, cette transformation peut être interprétée comme une aversion à l'incertitude sur la distribution de probabilités. Le calcul du critère c_Z devient alors plus sophistiqué, car la fonctionnelle sur la mesure de Z est plus complexe ; mais cela ne change pas structurellement le cadre global défini ci-dessus.

Quand la finalité est celle de la justification face à un enjeu de risque grave, et que l'objet physico-industriel est une analyse de risque, l'étape A apparaît très dépendante d'une certaine vision du risque et de son acceptabilité sociale : cela rejoint le débat récent sur le « principe de précaution » (e.g. [28], [41]). Quand les conséquences sont graves ou de long terme, ce qui est le cas en matière de stockage de déchets à longue vie ou de changement climatique, le mode de traitement des incertitudes fait en effet débat selon le niveau de méconnaissance. Il peut être délicat d'accepter un traitement probabiliste quand l'occurrence incertaine ne se produira qu'une seule fois, et qu'il n'y a eu aucune observation préalable. On pourra alors préférer une approche « mini-max » par exemple : celle-ci minimise le dommage associé au cas le pire, ce que l'on peut mettre en correspondance avec l'assignation d'intervalles déterministes sur les sources d'incertitudes « graves » dans une approche mixte déterministe-probabiliste. C'est tout de même une approche très pénalisante.

Le cadre industriel proposé ci-dessus apparaît, d'une certaine manière, « neutre » dans ce débat dans la mesure où il permet d'instancier mathématiquement une gamme de choix variés. Mais il y a, bien entendu, une limite à son applicabilité. On réservera son application aux incertitudes non point trop « fortes » pour que leur quantification garde un intérêt et un sens⁹.

9. Cf. le commentaire de J.P. Dupuy [28] sur le fait qu'à un certain stade, l'incertitude n'est plus le réel obstacle à l'application de décisions de « précaution », qui est plutôt affaire de croyance.

3.2. Cumul des incertitudes sur le résultat final

La 1^{ère} partie avait conduit à distinguer différentes catégories d'incertitudes intervenant dans un traitement d'incertitudes : il y a celles que l'on représente comme *sources*; il y a aussi les incertitudes d'estimation générées par les phases B ou B', l'estimateur $\hat{\theta}_X$ fluctuant autour du « vrai » θ_X^o ; et il y a enfin les incertitudes de *propagation* en phase C, c_Z étant estimé avec une erreur de nature probabiliste ou numérique, plus ou moins estimable selon les méthodes. Le cumul global des ces catégories d'incertitudes sur le résultat final constitue une question délicate, comme l'a montré le § 2.2.2. en ce qui concerne le cumul des deux premières catégories, les sources et les incertitudes d'estimation.

On se contentera la plupart du temps de prendre les estimateurs centraux associés à la phase B et à la phase C : on estimera $C_z(\theta_X)$ par $\hat{C}_z(\hat{\theta}_X)$, c'est-à-dire un estimateur \hat{C}_z du critère c_Z , en prenant pour valeur de θ_X l'estimateur central $\hat{\theta}_X$. Cela peut s'expliquer par l'impossibilité de quantifier l'incertitude d'estimation, par exemple s'il s'agit de jugement d'expert « informel », ou de contrôler l'incertitude de propagation si la méthode de propagation est approximative faute de mieux. De fait, on admet en général qu'elles sont négligeables au regard des sources d'incertitudes elles-mêmes.

Mais parfois, quand la finalité est par exemple la justification dans un contexte de sûreté nucléaire, il arrive que l'on évalue un critère c_Z dit « pénalisé » pour parer au risque d'erreur associé à l'étude d'incertitudes elle-même. Le critère c_Z est dit pénalisé en ce sens qu'il n'est pas calculé sur les estimateurs centraux, mais sur une borne supérieure d'intervalle de confiance à l'un ou l'autre des échelons d'estimation, voire à chacun d'entre eux :

$$\hat{c}_z \text{ pénalisé} = \hat{C}_z^\beta(\theta_X) \text{ calculé en } \theta_X = \hat{\theta}_X^\gamma$$

où $\hat{\theta}_X^\gamma$ désigne la borne supérieure d'un I.C. à γ % suivant la loi d'incertitude de $\hat{\theta}_X$ (incertitude d'estimation) et $\hat{C}_z^\beta(\theta_X)$ désigne la borne supérieure d'un I.C. à β % suivant la loi d'incertitude de $\hat{C}_z(\theta_X)$ (incertitude de propagation conditionnellement à une valeur donnée de θ_X).

Cela donne pour $\hat{c}_z \text{ pénalisé}$ une formulation passablement indigeste, comme par exemple : « le risque (de dépassement du seuil physique de sûreté) a une probabilité annuelle ne dépassant pas 10^{-3} à une confiance de 95 % dans l'estimation statistique des données d'entrée et une confiance de 70 % dans le calcul par simulation, etc. ». Il est également possible que les pénalisations de l'incertitude d'estimation et de l'incertitude de propagation soient de type « déterministe forfaitaire », comme par exemple +15 % sur le débit, +1 mètre sur le résultat final en niveau d'eau. Ces pénalisations ne se basent plus sur des intervalles de confiance statistiques, qui ne sont d'ailleurs pas toujours accessibles suivant les méthodes employées. La formulation apparaît alors moins complexe à communiquer, mais la question de l'arbitraire associé à de tels choix de marges déterministes reste entièrement posée.

Dans de rares cas d'application, d'autres démarches probabilistes ont été considérées en alternative à ce genre de « $\hat{c}_z \text{ pénalisé}$ » :

- propager de manière plus explicite l'incertitude sur le $\hat{\theta}_X$ à travers le modèle physique. Plutôt que d'estimer par propagation le critère $c_z = C_z(\theta_X)$ en fixant les paramètres θ_X à leur valeur pénalisée à γ % ($\hat{\theta}_X^\gamma$), il s'agit d'estimer le *quantile* C_z^γ de $C_z = C_z(\hat{\theta}_X)$. Le critère c_z devient en effet une variable aléatoire C_z par effet de composition de la fonction déterministe $C_z(\theta_X)$ avec la variable aléatoire $\hat{\theta}_X$ représentant l'incertitude d'estimation.

Ceci conduit dans le cas général à un double MCS imbriqué, comme suit :

pour $j_1 = 1 \dots n_1$, échantillonner θ_{j_1} dans la loi de $\hat{\theta}_X$
 pour $j_2 = 1 \dots n_2$, échantillonner X_{j_1, j_2} dans $f_X(x/\theta_X = \theta_{j_1})$
 calculer $[(Z_{j_1, j_2} = G(X_{j_1, j_2}, \underline{d}))_{j_2=1 \dots n_2}]_{j_1=1 \dots n_1}$

De manière à réduire le grand nombre de calculs induit par cet algorithme, la Delta-méthode peut être éventuellement mobilisée si la variance de $\hat{\theta}_X$ reste faible, c'est-à-dire si l'incertitude d'estimation est faible. Cette démarche n'enlève pas les multiples niveaux de probabilité sur l'interprétation du résultat final (cf. [33]), et laisse intact le problème du cumul avec l'incertitude de propagation.

- se plonger dans un cadre bayésien hiérarchique, par conditionnement emboîté. L'idée est de réduire d'une ou plusieurs unités le nombre de niveaux de probabilité en calculant des lois prédictives inconditionnelles a posteriori. Comme on l'a vu au 2.2.2., l'incertitude d'estimation de θ_x peut être modélisée par une loi a priori $\pi_0(\theta_X)$ et a posteriori $\pi_1(\theta_X) = f_\theta(\theta_X/(X_j)_j)$, et les sources d'incertitudes X peuvent alors être prises à leur loi prédictive a posteriori intégrant l'incertitude d'estimation. À partir de là on peut estimer \hat{C}_z par simulation. Dans cette approche le niveau de confiance correspondant à l'incertitude d'estimation de θ_X disparaît sur le résultat final (cf. [17], [60]).¹⁰
- tirer simultanément les incertitudes d'estimation $\hat{\theta}_X$ avec les sources d'incertitude X . Cela se fait en pratique par tirage séquentiel du $\theta_{X^i j}$ puis du $X^i j/\theta_{X^i j}$ ou par re-paramétrisation équivalente des entrées du modèle physique. Contrairement au double MCS, il n'y a alors plus qu'une seule réalisation de X^i conditionnellement à celle de $\theta_{X^i j}$.

Le choix du « bon » mode de cumul de ces diverses incertitudes reste un problème ouvert, à plusieurs titres :

- le plan **épistémologique** : c'est le problème du cumul d'incertitudes de nature différente dans un cadre probabiliste : certains reprendront

10. C'est le cas des fuseaux de risque cumulé sur la problématique de stockage de déchets aux USA, qui sont modélisés de façon bayésienne et moyennés à posteriori, cf. [1]. Ce type de réduction des niveaux d'incertitudes peut être généralisé mathématiquement à plusieurs niveaux par conditionnement hiérarchique, en intégrant par exemple l'incertitude de propagation en plus de l'incertitude d'estimation cf. [11]. Mais l'interprétation finale reste alors délicate.

volontiers la terminologie du type «aléatoire» ou «intrinsèque» pour l'incertitude sur X (justifiant l'existence d'un critère probabiliste c_z), et du type «épistémique» pour les autres incertitudes provenant de l'estimation de θ_X ou de $C_z(\theta_X)$. Ces dernières sont théoriquement réductibles en augmentant le nombre de données et de calculs. Notons que les «expériences aléatoires emboîtées» modélisées par l'un ou l'autre des modes de cumul ne représentent *a priori* pas la même prise de risque pour le décideur : dans certains cas, la probabilité traduit le risque de réalisation d'un événement physique naturellement ou industriellement variable d'une façon pérenne et peu dépendante du décideur ; dans d'autres cas, un niveau de confiance est généré par les limitations dans la connaissance, le nombre de données ou le volume de calculs accessibles dans une étude donnée : il couvre d'une certaine manière la variabilité d'une étude à l'autre. Le § 3.2 de la 1^{ère} partie a montré néanmoins que ces catégories ne sont pas toujours simples à trancher de façon nette dans la pratique industrielle.

- la **faisabilité** : le nombre de simulations mobilisées sur le **calcul scientifique** varie de façon importante selon le mode de cumul. Des MCS «emboîtés», au sens où deux boucles ou plus de MCS sont imbriquées l'une dans l'autre, s'avèrent notamment excessivement coûteux.
- l'**acceptabilité et la communicabilité** auprès des autorités institutionnelles : ce point est également essentiel : «l'empilement» de plusieurs niveaux de confiance n'est pas facilement communicable.

Les alternatives plongeant ce délicat problème d'emboîtement dans un cadre probabiliste «étendu», voire alternatif aux probabilités, comme celui de la théorie Dempster-Shafer (*cf.* [40]) paraissent encore loin des applications industrielles. Si ces méthodes présentent l'avantage de permettre un traitement théoriquement différencié suivant la nature des incertitudes, aléatoires ou non, des limitations pratiques ont déjà été mentionnés au § 3.2 de la 1^{ère} partie : les calculs de propagation sont *a priori* des défis numériques d'un ordre de grandeur supérieur aux méthodes probabilistes, déjà gourmandes ; peu de mesures d'importance ont été développées pour répondre à l'importante finalité de hiérarchisation ; enfin la sophistication du cadre mathématique rend leur communicabilité encore plus problématique.

4. Conclusion générale et pistes de recherche prioritaires

Le propos de cet article était de montrer par l'exemple industriel qu'un cadre générique d'appréhension des incertitudes est possible, malgré les compartimentages historiques entre les domaines impliqués (métrologie, fiabilité, statistique, analyse numérique, ...). Il consiste notamment à discerner de grandes étapes comme la quantification des sources d'incertitudes (étape B), mobilisant éventuellement une quantification inverse/validation (B'), leur propagation à travers un modèle physico-industriel pré-existant (étape C), et la hiérarchisation d'importance (C') voire l'optimisation qui en découle. Il conduit à penser que le choix des méthodes les plus pertinentes, qui associent de

façon étroite les mathématiques appliquées et l'analyse physico-industrielle, est avant tout fonction du problème posé. Ce dernier dépend de la nature de réglementation ou du critère de décision choisi (étape A), et non pas du « métier » spécifique du problème industriel. Par ailleurs, si dans cette même approche globale d'autres paradigmes mathématiques sont possibles, le cadre mixte déterministe-probabiliste apparaît central dans les applications industrielles actuelles : de nombreux problèmes de modélisation statistique et de calcul scientifique en découlent.

En termes d'implémentation industrielle de méthodes de calcul (estimation des sources, propagation/hiéarchisation dans un grand modèle physico-industriel...), l'approche globale montre qu'il n'y a pas une réponse unique mais plutôt un portefeuille de méthodes à agencer dans le cadre global proposé pour bien répondre à l'un ou l'autre des critères posés à une étude industrielle d'incertitudes, et que ce porte-feuille est générique vis-à-vis de nombreux métiers industriels : cela suggère d'orienter l'investissement industriel en termes de développement d'outil vers la capitalisation de briques statistiques et numériques variées au sein d'une *plate-forme cohérente et générique*, de préférence à l'implémentation d'une méthode innovante unique. C'est tout l'objet de la plate-forme de traitement d'incertitudes dénommée *Open TURNS (Treatment of Uncertainty Risk and Statistics)*, qui est structurée suivant l'approche globale ci-dessus et qui a été développée en partenariat entre EDF R&D, EADS-CCR et Phimeca dans un cadre Open Source pour être la plus ouverte possible aux apports de la communauté.

Il n'apparaît pas non plus nécessaire d'engager des développements lourds sur chaque code physique puisque les méthodes intervenant dans une étude d'incertitudes sont génériques et pour la plupart « non-intrusives ». Dans de nombreux cas, le code physique différencié n'est pas une nécessité, mais une accélération parfois utile. La quantification des sources d'incertitudes, une étape d'importance majeure pour le résultat final, nécessite de la collecte de données et de l'expertise. Elle implique donc des efforts métier par métier, même si la méthodologie est générique et qu'une quantification sommaire apporte déjà des enseignements. Les applications industrielles sont potentiellement très nombreuses.

Plusieurs axes de recherche restent à creuser : un défi traditionnel et encore majeur porte sur les étapes C et C' (propagation et hiéarchisation) quand le modèle physico-industriel est lourd ; la quantification des sources par méthode inverse (étape B') reste quant à elle peu développée malgré son très fort potentiel industriel. Le défi associé à l'étape B' est à mettre en lien avec la délicate mais prometteuse « élicitation » de l'expertise, voire la question de la modélisation des dépendances, qui reste également un axe de recherche important dans l'étape B.

Un point essentiel concerne bien entendu l'évolution culturelle sous-jacente dans les équipes industrielles, et dans la réglementation qui leur est imposée. Au-delà des efforts de formation croisée, la question en vient rapidement au problème de l'acceptabilité, de la précaution et de la lisibilité associée à des critères réglementaires sur les incertitudes. Les questions restent ouvertes,

notamment quant aux délicats problèmes de la différenciation et du cumul des incertitudes selon leur nature, en lien avec l'appréhension conceptuelle des risques dans la société.

Le bon sens devrait naturellement toujours s'exercer dans l'interprétation des résultats d'une étude d'incertitudes. Celle-ci ne saurait jamais prétendre circonscrire complètement toutes les incertitudes affectant un exercice de modélisation de problèmes réels¹¹, en particulier quand il s'agit d'enjeux industriels importants. Tout au moins, l'expérience industrielle émergente laisse penser qu'en incitant les praticiens à questionner les hypothèses (en phase B) et à tester de nombreux calculs alternatifs (en phase C), une *étude des incertitudes*, même si son ambition peut paraître présomptueuse, reste toujours plus « sûre » qu'une approche déterministe basée sur un seul calcul qui se justifierait par l'impossibilité d'accorder un crédit absolu à l'explicitation des incertitudes.

5. Remerciements

L'auteur tient à remercier l'ensemble des membres du Réseau Incertitudes d'EDF : de nombreuses études de cas, travaux théoriques et relectures croisées ont permis à l'auteur d'y élaborer depuis 2002 la synthèse présentée. Sa gratitude va notamment à Yannick Lefebvre, Dominique Lagrange, Anne Dutfoy, Simon Cambier, Bruno Sudret, Franck Delcoigne, Olivier Dubois, Gérald Nicolas, Rémi Bussac, Pascal Bailly, Dominique Vasseur, Franck Maurel, Emmanuel Remy, François Billy, Emmanuel Ardillon, Serge Hugonnard, Carole Duval (EDF) ainsi qu'à Nicolas Devictor (CEA) et enfin à Fabien Mangeant et Régis Lebrun (EADS-CCR).

6. Abréviations, sigles et acronymes utilisés

CPU	Central Processing Unit – en référence au temps de calcul d'une machine informatique
D.L.1	développement limité d'ordre 1
E.P.S.	Etudes probabilistes de Sûreté – études de type « fiabilité des systèmes » d'une centrale nucléaire vis à vis du risque de sûreté nucléaire
EVD	Extreme Value Distribution – famille de distributions associée à une méthode d'estimation de variables extrêmes de type « maxima par blocs »
FAST	Fourier Amplitude Sensitivity Test – méthode de hiérarchisation d'importance des sources d'incertitudes basée sur la transformée de Fourier
FE	Facteur d'émission

11. Il y aurait sans doute quelque paradoxe logique à prétendre pouvoir le faire.

Form/Sorm	First (respectivement Second) Order Reliability Method – méthode d’approximation du premier (resp. second) ordre d’une probabilité de dépassement de seuil
GPD	Generalised Pareto Distribution – famille de distributions associée à une méthode d’estimation de variables extrêmes de type « pic au-dessus de seuil »
GUM	Guide for expression of uncertainty of measurement – Guide pour l’expression de l’incertitude de mesure – norme ISO/AFNOR en métrologie
I.C.	Intervalle de confiance
i.i.d.	Indépendants et identiquement distribués
LHS	Latin Hypercube Sampling – méthode de tirage aléatoire suivant les hypercubes latins
MCS	Monte-Carlo Sampling – méthode de simulation de Monte-Carlo (version simple)
MV	(méthode du) maximum de vraisemblance
PCI	Pouvoir calorifique inférieur
pdf	probability distribution function – densité de probabilité d’une variable (ou vecteur) aléatoire
v.a.	variable aléatoire

7. Principales notations

$\underline{x} = (x^i)_{i=1\dots p}$	Vecteur (de dimension p) des variables d’entrée sources d’incertitudes (continues ou discrètes)
\underline{d}	Vecteur (de dimension d) des variables d’entrée fixes, car considérées comme bien connues (continues ou discrètes) : scénarios de référence, conditions de fonctionnement ou d’essais, variables de décision, sources d’incertitudes d’importance négligée, etc.
\underline{d}^o	Vecteur de variables fixes dont la valeur est prise dans un scénario de référence.
$\underline{z} = (z^l)_{l=1\dots r}$	Vecteur (de dimension r) des variables finales d’intérêt (continues ou discrètes) pour l’étude d’incertitudes, intervenant dans la définition du critère
$\underline{y} = (y^k)_{k=1\dots q}$	Vecteur (de dimension q) des variables intermédiaires calculées par le modèle, et observables modulo un bruit de mesure éventuel
$\underline{u}, \underline{u}_{mod}, \underline{u}_{mes}$	Vecteurs (de dimension q) représentant l’écart modèles-mesure à l’observation des variables intermédiaires : \underline{u} représente l’écart total, \underline{u}_{mes} , la composante éventuelle liée au bruit de mesure, \underline{u}_{mod} , la composante éventuelle d’erreur de modèle : $\underline{u} = \underline{u}_{mod} + \underline{u}_{mes}$

LA MAÎTRISE DES INCERTITUDES DANS UN CONTEXTE INDUSTRIEL

$\underline{y}_m = (\underline{y}_m^k)_{k=1\dots q}$	Vecteur (de dimension q) des variables intermédiaires observables. On a $\underline{y}_m = \underline{y} + \underline{u}$
$\underline{G}(\cdot)$	Fonction déterministe, éventuellement très complexe, représentant le modèle physico-industriel vu des variables finales d'intérêt : $\underline{z} = \underline{G}(\underline{x}, \underline{d})$. On allègera fréquemment la notation en écrivant $\underline{G}(\cdot)$
$\underline{H}(\cdot)$	Fonction déterministe, éventuellement très complexe, représentant le modèle physico-industriel vu des variables intermédiaires : $\underline{y} = \underline{H}(\underline{x}, \underline{d})$. On allègera fréquemment la notation en écrivant $\underline{H}(\cdot)$
$X, Y, Z, U \dots$	Vecteurs de variables incertaines munis de leur mesure d'incertitude correspondants aux vecteurs $\underline{x}, \underline{y}, \underline{z}, \underline{u} \dots$. Dans le cadre probabiliste, ce sont des vecteurs aléatoires. En notations allégées, le soulignement est omis : $X, Y, Z, U \dots$
$f_X(\underline{x}/\underline{\theta}_X)$	Densité jointe du vecteur aléatoire \underline{X} , paramétrée par $\underline{\theta}_X$. En notation allégée, le vecteur de paramètre est omis : $f_X(\underline{x})$.
$F_Z(z)$	Fonction de répartition de la variable scalaire z .
$(\underline{X}_j)_{j=1\dots n}$	Echantillon (de taille n), généralement i.i.d., de vecteurs aléatoires suivant la loi de \underline{X}
$(\underline{Y}_{mj})_{j=1\dots n}$	Echantillon (de taille n), non nécessairement i.i.d., de vecteurs aléatoires d'observations \underline{y}_m sur n essais
$(\underline{d}_j)_{j=1\dots n}$	Matrice des n conditions d'essais correspondant aux observations $(\underline{Y}_{mj})_{j=1\dots n}$
$X^{(n-j+1)}$	Variable aléatoire correspondant à la j -ième plus grande valeur d'un n -échantillon univarié $(X_j)_{j=1\dots n}$
inc_z	Quantité d'intérêt sur une variable finale scalaire z représentant une dispersion absolue autour de la valeur moyenne (un multiple donné de l'écart-type)
$\%inc_z$	Quantité d'intérêt sur une variable finale scalaire z représentant une dispersion relative autour de la valeur moyenne (un multiple donné du coefficient de variation)
z_s	Valeur représentant un seuil à ne pas dépasser par z (scalaire) dans un critère à seuil
$\underline{\theta}_X, \underline{\theta}_U$	Vecteurs de paramètres de la mesure d'incertitude de \underline{X} ou de \underline{U} : dans le cas probabiliste, ce sont les paramètres d'une loi jointe. En notations allégées, on se contentera de noter θ_X, θ_U
$\underline{\theta}_X^{kn}, \underline{\theta}_X^{un}$	Vecteurs représentant les composantes connues (kn) et inconnues (un) du vecteur $\underline{\theta}_X$, dans une approche inverse probabiliste.

c_z	Critère, c'est-à-dire une quantité scalaire ou vectorielle, de composantes entières ou réelles, définie comme une fonctionnelle de la mesure d'incertitude des variables finales $c_z = \mathcal{F}[Z]$ (dans le cas probabiliste $c_z = \mathcal{F}[f_z]$). Par exemple : la dispersion inc_z , le test booléen comparant cette dispersion moyenne à un seuil, la probabilité de dépassement d'un seuil <i>etc.</i>
$C_z(\underline{\theta}_X, \underline{d})$	Fonction déterministe (très complexe) associant aux paramètres de la mesure d'incertitudes des sources et aux variables fixes le résultat égal au critère $c_z = C_z(\underline{\theta}_X, \underline{d})$
$\tilde{G}(\underline{x})$	Surface de réponse (ou «méta-modèle») correspondant à $G(\cdot)$: fonction déterministe approchant $G(\cdot)$ suivant une certaine norme, et numériquement plus rapide à calculer.
$v(\underline{x})$	Fonction vectorielle (de dimension r) représentant le résidu d'approximation par la surface de réponse $\tilde{G}(\underline{x})$ du vrai modèle physico-industriel $G(\cdot)$ en fonction de \underline{x} .
\underline{u}_F	Vecteur (de dimension p) de variables transformées dans l'espace standard, à partir des variables sources x , dans le cadre de la méthode Form-Sorm. Pour une certaine transformation T (Rosenblatt, Nataf ...) on a $\underline{u}_F = T^{-1}(x)$

Pour les variables : l'exposant désigne la composante du vecteur (lettres latines : x^i) ou le niveau d'un quantile (lettres grecques : x^α) ; l'indice désigne la place dans l'échantillon (\underline{x}_j) sauf cas particulier où il dénote une valeur spéciale (e.g. pénalisée : x_{pn} , seuil : z_s) ; la majuscule (X) désigne la variable (ou le vecteur) aléatoire (ou plus généralement incertain) par opposition à la valeur déterministe, notée en minuscule (x) ; le soulignement (\underline{x}) désigne une quantité vectorielle, mais celui-ci est omis dans les notations allégées. Un chapeau (\hat{C}_z) dénote classiquement un estimateur associé à une quantité déterministe inconnue (c_z). Une étoile (X^*) dénote une v.a. non observable.

8. Références

- [1] APOSTOLAKIS G. (1999), *The distinction between aleatory and epistemic uncertainties is important ; an example from the inclusion of aging effects in the PSA*, PSA'99, Washington DC.
- [2] ARDILLON E., & de ROCQUIGNY E. (2003), *Probabilistic estimation of safety quantiles for complex non-regular physical systems with uncertain parameters*. Proc. 25th ESReDA Seminar, Paris.
- [3] BEAUDOUIN F., MUNIER B., SERQUIN Y. (1997), *Multiattribute utility theory : Towards a more general framework*, Proc. of the 1997 ESReDA seminar on decision analysis and its applications in safety and reliability.
- [4] BESTION D. (2003), *Final Report -§ 4.2 State of the Art on Uncertainty Evaluation*, European Project for Future Advances in Sciences and Technology for Nuclear Engineering Thermal-Hydraulics (EUROFASTNET).
- [5] BOX G.E.P and DRAPER N.R (1987), *Empirical Model Building and Response Surface*, J. Wiley & Sons, Wiley Series in Probability and Mathematical statistics.

- [6] BOYACK B.E. (1990), *Quantifying reactor safety margins-part I : an overview of the code scaling, applicability and uncertainty evaluation methodology*, Nucl. Eng. Des. 119, 1-15.
- [7] CAMBIER S. (2000), *Approche probabilité pour la prise en compte de la dispersion de paramètres mécaniques – Application à la fatigue vibratoire de réseaux de tuyauteries*, Thèse ENSAM Paris.
- [8] CAMBIER S., DESCÉLIERS C., SOIZE S. (2003), *Prise en compte probabiliste des incertitudes dans l'estimation du comportement sismique d'un circuit primaire*. 7^{ème} Colloque National AFPS.
- [9] CAMBIER S., GUIHOT P., COFFIGNAL G. (2002), *Computational methods for accounting of structural uncertainties, applications to dynamic behavior prediction of piping systems*. Structural Safety, 24 : 29-50.
- [10] CHIA C.-Y., AYYUB B.-M. (1994), *Conditional sampling for simulation-based structural reliability assessment*, *Structural Safety & reliability*, Schueller, Schonzuka & Yao (eds), Balkema, Rotterdam.
- [11] CHICK S.E. (2000), *Bayesian Methods for Simulation*, Proc. of the 2000 Winter Simulation Conference, Washington D.C.
- [12] CORRE B. (2003), *Problématique des incertitudes en exploration-production pétrolière : application des plans d'expériences*. Total Fina Elf, Séminaire « Plans d'Expériences Numériques » Ec. Mines St-Etienne.
- [13] CUKIER R.I., LEVINE H.B., SCHULER K.E. (1978). *Non-linear sensitivity analysis of multi-parameter model systems*. Journal of computational physics 26, 1-42.
- [14] DE CRÉCY A. (1997), CIRCE : a tool for calculating the uncertainties of the constitutive relationships of Cathare2, 8th International Topical Meeting on Nuclear reactor Thermo-Hydraulics (NURETH8), Kyoto.
- [15] DEMPSTER A. P. (1967). *Upper and lower probabilities induced by a multivalued mapping*, Annals of Math. Statistics 38, 325-339.
- [16] DEMPSTER F., LAIRD N.M., RUBIN D.B. (1977), *Maximum likelihood from incomplete data from the EM algorithm*, Journal of the Royal Statistical Society (Ser. B) 39, 1-38.
- [17] DE ROCQUIGNY E. (2005), *A simple Bayesian proposal to aggregate expert judgement and observations on epistemic and aleatory uncertainties – extensions and associated industrial needs*, Proc. of the Workshop on the Use of Expert Judgment in Decision-Making, CEA & Eur. Comm. JRC Petten, Aix-en-Provence.
- [18] DE ROCQUIGNY E. (2005), *A statistical approach to control conservatism of robust uncertainty propagation methods ; application to accidental thermal hydraulics calculations*, Proceedings of ESREL-05, Tri City, Poland.
- [19] DE ROCQUIGNY E. (2005), *Couplage mécano-probabiliste pour la fiabilité des structures – un cas industriel où la robustesse d'une surface de réponse est démontrable*. Actes du 17^{ème} Congrès Français de Mécanique. Troyes.
- [20] DE ROCQUIGNY E. (2004), *Tutoriel Incertitudes*, présenté dans la Conférence Lambda-Mu 14, Bourges, Octobre 2004.
- [21] DE ROCQUIGNY E. (2006), *Problèmes ouverts – Sujet n° 1 « Statistiques, mesures et calcul scientifique inverse »*, www.jds2006.fr/prob-ouverts.php 38^{èmes} Journ. Franc. de Stat., Clamart, 2006.
- [22] DESCÉLIERS C., SOIZE S., CAMBIER S. (2003), *Nonparametric-parametric model for random uncertainties in nonlinear structural dynamics – Application*

- to earthquake engineering, Earthquake Engineering and Structural Dynamics, 33, 315-327.
- [23] DEVICTOR N. (1996) *Fiabilité et mécanique : méthodes FORM/SORM et couplages avec des codes d'éléments finis par surfaces de réponse adaptative*. PhD Université Blaise Pascal, Clermont-Ferrand.
- [24] DEVICTOR N., BOLADO LAVIN R. (eds) (2005), *Proc. of the Workshop on the Use of Expert Judgment in Decision-Making*, CEA & Eur. Comm. JRC Petten, Aix-en-Provence.
- [25] DITLEVSEN O. & MADSEN H.O. (1996), *Structural reliability Methods*, John Wiley & Sons.
- [26] DUBOIS D., PRADE H. (1988), *Possibility theory : an approach to computerized processing of uncertainty*, New York, Plenum Press.
- [27] DUCKSTEIN L., PARENT E. (1994), *Engineering Risk in Natural Resources Management*, NATO ASI Series.
- [28] DUPUY J.P. (2002), *Pour un catastrophisme éclairé – Quand l'Impossible est certain*, Ed. du Seuil.
- [29] DUTFOY A. (2001), Mefisto, *The EDF Reliability Method to Propagate Uncertainties*, Proc. of ICOSSAR 2001.
- [30] DUTFOY A. (2000), *Uncertainty propagation in radionuclide transport modelling for performance assessment of a nuclear waste repository*, Proc. of PSAM5, Japan.
- [31] EFRON B., TIBSHIRANI R.J. (1993), *An introduction to the Bootstrap*, Chapman & Hall.
- [32] FAURE C. (1996), *Splitting of algebraic expressions for automatic differentiation*, Proc. of the 2nd International Workshop on Computational Differentiation, 12-15 fév. 1996, Santa Fe.
- [33] FREY H.C., RHODES D.S. (2005), *Quantitative Analysis of Variability and Uncertainty in with Known Measurement Error : Methodology and Case Study*, Risk Analysis Vol. 25, No3.
- [34] GILLE-GENEST A. (1999), *Utilisation des méthodes numériques probabilistes dans les applications au domaine de la Fiabilité des Structures*, Thèse de l'Université Paris VI – EDF R&D.
- [35] GRANGER MORGAN M., HENRION M. (1990), *Uncertainty – A Guide to Dealing with Uncertainty in Quantitative Risk and Policy Analysis*, Cambridge University Press.
- [36] GRIEWANK A. (2000), *Evaluating derivatives – Principles and Techniques of Algorithmic Differentiation*, SIAM, Philadelphia.
- [37] HASCOUET L., PASCUAL V. (2004), TAPENADE 2.1 user's guide, INRIA report, www.inria.fr/rrrt/rt-0300.html
- [38] HELTON J.C., BURMASTER D.E. et al. (1996), *Treatment of Aleatory and Epistemic Uncertainty*, Special Issue of Rel. Eng. & Syst. Saf., vol. 54 n°2 et 3.
- [39] HELTON J.C., DAVIS F.J. (2003), *Latin hypercube sampling and the propagation of uncertainty in analyses of complex systems*, Rel. Eng. & Syst. Saf. 81, 23-69.
- [40] HELTON J.C., OBERKAMPF W.L. (2004), *Alternative Representations of Epistemic Uncertainty*, Special Issue of Rel. Eng. & Syst. Saf., vol. 85 n°1-3.

- [41] HENRY Cl. (2004), *Etat de la connaissance scientifique et mobilisation du principe de précaution*, 3^e Colloque international du réseau Monder, Paris, 12-15 sept.2004.
- [42] IOOSS B., VAN DORPE F., and DEVICTOR N. (2006) Response Surfaces and Sensitivity Analysis for an Environmental Model of Dose Calculations. *Rel. Eng. & Syst. Saf.*, à paraître.
- [43] JACQUES J., LAVERGNE C., DEVICTOR N. (2006), *Sensitivity Analysis in presence of model uncertainty and correlated outputs*, *Rel. Eng. and Syst. Saf.*, Elsevier, à paraître.
- [44] JOURDAN A. (2002), *Approches Statistiques des Expériences Simulées*, *Rev. Statistique Appliquée*, L(1), 49-64.
- [45] KENDALL MG. & STUART (1943-1979), A, *The Advanced Theory of Statistics* (2 vol), Griffin & Co., London.
- [46] KLEIJNEN J.P.C. and SARGENT R.G. (2000), *A methodology for fitting and validating metamodels in simulation*, *European Journal of Operational Research*, 120, 14-29.
- [47] KNIGHT F.H. (1921), *Risk, Uncertainty and Profit*, Hart, Schaffner & Marx.
- [48] KUROWICKA D., and COOKE R.M. (2002), *Techniques for generic probabilistic inversion*, *Probabilistic Safety Assessment and Management*, E.J. Bonano et al. (eds), Elsevier, 1543-1550.
- [49] KUSCHEL N., RACKWITZ R. (2000), *Optimal design under time-variant reliability constraints*, *Structural Safety*, Volume 22, Issue 2, 113-127.
- [50] LANNOY A., et al. (1994), *Méthodes avancées d'analyse des bases de données du retour d'expérience industriel*, Coll. D.E.R.EDF, n°86, Eyrolles.
- [51] LEBRUN R. (2006), *Modelling dependency with copulas in reliability analysis, a new approach to the FORM and SORM methods*, submitted to 8th PSAM Conference.
- [52] LECOUTRE J.P., TASSI P. (1987), *Statistique non paramétrique et robustesse*, Economica.
- [53] LEMAIRE M. (2005), *Fiabilité des Structures*, Coll. Génie Civil, Hermès-Lavoisier.
- [54] MAHÉ P., de ROCQUIGNY E. (2005), *Incertitudes non observables en calcul scientifique industriel - Etude d'algorithmes simples pour intégrer dispersion intrinsèque et ébauche d'expert*, 37^{èmes} Journ. Franc. de Stat., Pau, 2005.
- [55] MCKAY M.D. (1996), *Application of Variance-Based Methods to NUREG-1150 Uncertainty Analyses*, USNRC 1996.
- [56] MIQUEL J. (1984), *Guide pratique d'estimation des probabilités de crues*, Eyrolles.
- [57] MYERS R.H. (1971), *Response surface methodology*, Allyn and Bacon, Inc., Boston.
- [58] NELSEN R.B. (1999), *An introduction to copulas*, SPRINGER.
- [59] OLIVI L., (1984), *Response surface methodology*, Handbook for Nuclear Safety Analysis, J.R.C., European Commission.
- [60] PENDOLA M. (2000), *Fiabilité des Structures en contexte d'incertitudes statistiques et d'écart de modélisation*, Thèse de l'Université Clermont II.
- [61] PERSOZ M., HUGONNARD-BRUYÈRE S., VENTURINI V., MEISTER E. (2000), *Deterministic and probabilistic assessments of the reactor pressure vessel structural integrity with user-friendly software*, ASME Press. Vess. & Piping.

- [62] PROCACCIA H., MORILHAT P. (1996), *Fiabilité des structures des installations industrielles*, Coll. D.E.R. EDF, n°94, Eyrolles.
- [63] QUIGGIN J. (1982), *A theory of anticipated utility*, Journal of Economic Behavior and Organization, Vol. 3, pp. 323-343.
- [64] REISS R.D., THOMAS M. (2001), *Statistical Analysis of Extreme Values*, Ed. Birkhauser.
- [65] ROYSET J.O., DER KIUREGHIAN A., and POLAK E. (2001), *Reliability-based optimal structural design by the decoupling approach*, Rel. Eng. & Syst. Saf., Vol. 73, Issue 3, pp. 213-221.
- [66] ROWE W.D. (1994), *Understanding Uncertainty*, Risk Analysis, Vol. 14. n°5, pp. 743-750.
- [67] RUBINSTEIN R.Y. (1981), *Simulation and the Monte-Carlo Method*, Wiley.
- [68] SALTELLI A., BOLADO R. (1998), *An alternative way to compute the Fourier Amplitude Sensitivity Test*, Computational Statistics and data analysis, 26, 445-460.
- [69] SALTELLI A., TARANTOLA S., CAMPALONGO F., RATTO M. (2004), *Sensitivity analysis in practice : a guide to assessing scientific models*, Wiley.
- [70] SAPORTA G. (1990), *Probabilités, Analyse de Données et Statistique*, Ed. Technip.
- [71] SHANNON C.E., (1948), *A mathematical theory of communication*, Bell Systems Technical Journal, Vol. 27, pp. 379-423, 623-656.
- [72] SOBOL I.M. (1993), *Sensitivity estimates for non-linear mathematical models*, Mathematical Modelling and Computational Experiments.
- [73] SOIZE C. (2000), *A non-parametric model of random uncertainties for reduced matrix models in structural dynamics*, Probab. Engrg. Mech. 15 (3) 277-294.
- [74] SUDRET B., GUÉDÉ Z., LEMAIRE M. (2005), *Probabilistic assessment of thermal fatigue in nuclear components*, Nucl. Eng. Des., 235, 219-235.
- [75] SUDRET B., DER KIUREGHIAN A. (2000), *Stochastic Finite Elements and Reliability – A state-of-the-art report*, Report n° UCB/SEMM-2000/08.
- [76] SUDRET B. (2005), *Des éléments finis stochastiques spectraux aux surfaces de réponses stochastiques : une approche unifiée*, 17^{ème} Congrès Français de Mécanique, Troyes, August 2005.
- [77] TALAGRAND O., COURTIER P. (1987), *Variational assimilation of meteorological observations with the adjoint vorticity equation, I : theory*. Q. J. R. Meteorol. Soc.113.
- [78] TARANTOLA (1987), *Inverse Problem Theory and methods for data fitting and model parameter estimation*, Elsevier – Amsterdam et Tarantola (2004), *Inverse Problem Theory and methods for model parameter estimation*, SIAM.
- [79] VON NEUMANN J., MORGENSTERN O., (1944), *Theory of games and economic behavior*, Princeton University Press.
- [80] WALTER E., PRONZATO L. (1994), *Identification de Modèles Paramétriques à partir de données expérimentales*, Coll. MASC, Masson.
- [81] WILKS S. S. (1941), *Determination of sample sizes for setting tolerance limits*, Ann. Math. Statist. 12, pp. 91-96.