

SANDRINE LARDIC

VALÉRIE MIGNON

FABRICE MURTIN

Estimation des modèles à correction d'erreur fractionnaires : une note méthodologique

Journal de la société française de statistique, tome 146, n° 4 (2005), p. 55-68

http://www.numdam.org/item?id=JSFS_2005__146_4_55_0

© Société française de statistique, 2005, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Journal de la société française de statistique » (<http://publications-sfds.math.cnrs.fr/index.php/J-SFdS>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

ESTIMATION DES MODÈLES À CORRECTION D'ERREUR FRACTIONNAIRES : UNE NOTE MÉTHODOLOGIQUE†

Sandrine LARDIC *, Valérie MIGNON **, Fabrice MURTIN ***

RÉSUMÉ

Cette note présente divers aspects méthodologiques liés à l'identification, l'estimation et la prévision d'un modèle à correction d'erreur fractionnaire (FECM). Nous analysons en particulier le biais associé à l'estimation de la relation de long terme, la nature du terme à correction d'erreur dans le cas de cointégration standard et fractionnaire, les contraintes sur les paramètres du FECM et les propriétés des prévisions issues de l'estimation du modèle à correction d'erreur fractionnaire.

Mots clés : Cointégration fractionnaire, modèle à correction d'erreur fractionnaire, moindres carrés fréquentiels.

ABSTRACT

This paper presents methodological aspects relating to the identification, estimation, and prediction of a fractional error correction model (FECM). The bias associated with the estimation of the long-term relationship, the nature of the error correction term in both standard and fractional cointegration cases, the constraints on the parameters of a FECM, and predictions issued from a FECM are discussed.

Keywords : Fractional cointegration, fractional error correction model, frequential OLS.

† *Correspondance* : Valérie Mignon, THEMA, Université Paris X - Nanterre, 200 avenue de la République, 92001 Nanterre Cedex. Tel. 01 40 97 58 60. Fax : 01 40 97 59 73. Email : Valerie.Mignon@u-paris10.fr.

* MODEM, Université Paris X - Nanterre. Email : Sandrine.Lardic@u-paris10.fr.

** CEPII et THEMA, Université Paris X - Nanterre, 200 avenue de la République, 92001 Nanterre Cedex. Tel. 01 40 97 58 60. Email : Valerie.Mignon@u-paris10.fr.

*** DELTA (CNRS-ENS-EHESS) et CREST (INSEE).

1. Introduction

La présence de « mémoire longue » dans les séries économiques et financières constitue un enjeu tant théorique qu'empirique, qui a donné naissance à de nombreux travaux¹. La mémoire longue décrit une série possédant des autocorrélations non nulles de long terme : dans ce cas, des observations très espacées dans le temps afficheront tout de même une dépendance ; autrement dit un choc aura des répercussions à long terme. Les processus fractionnaires exhibent une telle caractéristique puisque leurs autocorrélations décroissent seulement à une vitesse hyperbolique.

Dans les domaines économique et financier, si une structure fractionnaire peine parfois à être mise à jour dans les rendements quotidiens d'actions, elle convient cependant généralement à des données macroéconomiques, le plus souvent mensuelles ou trimestrielles. Pour ces séries, la représentation usuelle est celle du *modèle à correction d'erreur* (ECM). Ce modèle spécifie une relation entre les séries en niveau, dite relation d'équilibre ou de long terme, et une relation entre les séries différenciées, qui est appelée relation de court terme. Cette dernière fait intervenir un terme dit de correction d'erreur, qui joue un rôle fondamental : il spécifie qu'un déséquilibre par rapport à la relation de long terme est résorbé proportionnellement à son ampleur. Concrètement et à titre d'exemple, si une devise est surévaluée – eu égard aux fondamentaux économiques – par rapport à une autre, la « *force de rappel* » permettant le retour à l'équilibre est linéaire en l'écart constaté. Or, l'observation empirique semble indiquer que cette force de rappel n'est pas linéaire et que la vitesse de convergence vers l'équilibre n'est pas constante : par exemple, la vitesse de retour à l'équilibre est d'autant plus intense que l'écart est grand, il existe des écarts faibles mais persistants, un choc sur la relation de long terme a tendance à se répercuter sur toutes les périodes futures et non plus seulement la suivante. Cette dernière propriété de mémoire longue se caractérisant par le fait que les variables peuvent s'écarter durablement de leur équilibre de long terme constitue le coeur de notre sujet.

Une telle propriété renvoie à la notion de cointégration fractionnaire selon laquelle les écarts à l'équilibre peuvent être modélisés comme des processus fractionnaires. Le modèle à correction d'erreur fractionnaire (FECM) qui en découle possède une propriété fondamentale : la force de rappel fait intervenir des retards d'ordre supérieur à un. Ainsi, la mémoire longue implique que tout retour à la moyenne est « lent » car les chocs sont persistants.

L'objectif de ce travail est de proposer divers développements relatifs aux modèles à correction d'erreur fractionnaires et de donner une vue synthétique et comparative d'approches de tels modèles en mettant notamment en avant l'intérêt de la technique fréquentielle en deux étapes (FOLS). Le papier est organisé comme suit. Dans la section 2, nous décrivons la méthodologie associée à l'estimation d'un modèle à correction d'erreur fractionnaire. Une étude sur données simulées nous permet d'exhiber les principales caractéristiques du biais des deux estimateurs retenus. Dans une troisième section, nous

1. Pour une revue de la littérature, voir Baillie (1996) et Lardic et Mignon (1999).

nous attachons à la réalisation de prévisions à l'aide du modèle FECM. La dernière section conclut le papier.

2. Cointégration fractionnaire et mécanisme à correction d'erreur

Afin de simplifier l'exposé, nous nous situons dans cet article dans un cadre bivarié. Ainsi, soient x_t et y_t , $t = 1, \dots, T$, deux séries temporelles intégrées du même ordre ². A titre d'exemple, si l'on se restreint aux domaines économique et financier, les séries x_t et y_t peuvent désigner des séries de consommation et de revenu des ménages (théorie du revenu permanent), des séries de taux de change nominaux et d'indices de prix (théorie de la parité des pouvoirs d'achat), des séries de taux d'intérêt à court terme et à long terme (théorie de la structure par terme des taux d'intérêt), des séries de cours boursiers et de dividendes (théorie de l'efficacité informationnelle des marchés financiers basée sur le modèle d'actualisation des dividendes) ... De telles paires de séries sont en effet, d'après les différentes théories économiques ou financières, liées entre elles à long terme et «devraient» donc être cointégrées.

La méthodologie d'estimation d'un modèle à correction d'erreur (ECM) peut être décrite en trois étapes ³ :

- *Étape 1.* Estimer la relation de long terme : $y_t + \beta x_t = \epsilon_t$.
- *Étape 2.* Tester l'ordre d'intégration de ϵ_t . Si ϵ_t est $I(0)$ ⁴, le modéliser comme un processus autorégressif d'ordre 1 ($AR(1)$) : $\epsilon_t = \rho \epsilon_{t-1} + u_t$ avec $\rho < 1$ et u_t désigne un bruit blanc de moyenne nulle et de variance σ_u^2 . ⁵
- *Étape 3.* Utiliser la structure du résidu afin d'écrire la relation à correction d'erreur :

$$\Delta y_t + \beta \Delta x_t = \epsilon_t - \epsilon_{t-1} = (\rho - 1)\epsilon_{t-1} + u_t \quad (1)$$

où Δ désigne l'opérateur de différence première, soit $\Delta X_t = X_t - X_{t-1}$, $t \in N$.

2. On rappelle qu'une série est dite intégrée d'ordre d , ce que l'on note $I(d)$, s'il est nécessaire de la différencier d fois pour la rendre stationnaire. Le cas le plus fréquent correspond au cas où les deux séries x_t et y_t sont intégrées d'ordre 1.

3. On rappelle que les deux techniques les plus utilisées pour estimer un ECM sont, d'une part, la méthode de Engle et Granger (1987) consistant à estimer dans un premier temps la relation de long terme (relation de cointégration) et dans un deuxième temps la dynamique de court terme et, d'autre part, la méthode de Johansen (1988) basée sur la méthode du maximum de vraisemblance.

4. Sinon ϵ_t est non stationnaire et intégré du même ordre que les séries x_t et y_t , par exemple $I(1)$, et il ne peut exister de relation de cointégration entre les deux séries; l'estimation d'un modèle à correction d'erreur est alors non pertinente.

5. Un bruit blanc u_t est un processus de moyenne nulle, de variance constante (σ_u^2) et non autocorrélé. On note $u_t \sim BB(0, \sigma_u^2)$.

La stratégie d'estimation d'un modèle à correction d'erreur fractionnaire (FECM) se différencie au niveau de la modélisation du terme d'erreur ϵ_t . Comme précédemment, la méthodologie peut être décrite en trois étapes ⁶ :

- *Étape 1.* Estimer la relation de long terme tout comme précédemment, éventuellement avec une autre méthode que les moindres carrés ordinaires puisque la super-convergence est atténuée (voir *infra*).
- *Étape 2.* Tester l'ordre d'intégration de ϵ_t . Si ϵ_t est $I(d)$, le modéliser comme un processus $ARFIMA(0, d, 0)$ ⁷ : $\nabla^d \epsilon_t = (1 - L)^d \epsilon_t = u_t$ avec $u_t \sim BB(0, \sigma_u^2)$, L désignant l'opérateur retard tel que $LX_t = X_{t-1}$, $t \in N$. ⁸
- *Étape 3.* Ecrire le FECM de manière comparable au ECM ⁹ :

$$\Delta y_t + \beta \Delta x_t = -(\nabla^d - \Delta)(y_t + \beta x_t) + u_t. \quad (2)$$

Notons que la force de rappel dans le cas de la cointégration standard (c'est-à-dire entière) est un terme à un retard, et s'écrit : $-(1 - \rho)L$. En revanche, la force de rappel dans le cas de la cointégration fractionnaire s'écrit ¹⁰ :

$$\begin{aligned} -(\nabla^d - \Delta) &= -\left(\sum_{h=0}^{+\infty} \frac{\Gamma(h-d)}{\Gamma(h+1)\Gamma(-d)} L^h - (1-L) \right) \\ &= -\left[\left(1 - \frac{\Gamma(1-d)}{\Gamma(-d)}\right)L + \sum_{h=2}^{+\infty} \frac{\Gamma(h-d)}{\Gamma(h+1)\Gamma(-d)} L^h \right]. \end{aligned} \quad (3)$$

La « force de rappel fractionnaire » vers l'équilibre de long terme prend donc en compte tous les retards, c'est-à-dire tous les écarts à l'équilibre des périodes

6. Une présentation formelle du modèle à correction d'erreur fractionnaire est donnée par Lyhagen (1998).

7. Les processus $ARFIMA(p, d, q)$ (autorégressifs moyenne mobile fractionnairement intégrés) ont été introduits par Granger et Joyeux (1980) et Hosking (1981). Ils constituent une généralisation des processus $ARIMA(p, d, q)$ au cas où le paramètre de différenciation (ou d'intégration) d peut prendre des valeurs réelles et non plus seulement des valeurs entières. Ces processus sont stationnaires et inversibles pour $d \in]-0,5; 0,5[$. Pour une synthèse de la littérature sur ces processus, voir Lardic et Mignon (1999).

8. Afin de conserver les notations habituellement utilisées en économétrie des séries temporelles, le développement binomial $(1 - L)^d$ est noté ∇^d et, comme précisé précédemment, l'opérateur de différence première est noté Δ . Bien entendu, on a $\nabla^d = \Delta = 1 - L$ pour $d = 1$.

9. Dans le FECM, des termes de retard peuvent bien entendu être rajoutés pour prendre en compte des termes autorégressifs dans la structure du résidu.

10. Notons que cette force de rappel prend une forme plus générale dans le cas d'un processus $ARFIMA(p, d, q)$. Par ailleurs, l'équation (3) est obtenue en notant que le développement binomial est donné par : $\nabla^d = (1 - L)^d = 1 - dL - \frac{d(1-d)}{2!} L^2 - \frac{d(1-d)(2-d)}{3!} L^3 - \dots = \sum_{h=0}^{\infty} \frac{\Gamma(h-d)}{\Gamma(h+1)\Gamma(-d)} L^h$ où $\Gamma(\cdot)$ est la fonction eulérienne de seconde espèce.

précédentes. En ce sens, le retour à l'équilibre est plus lent puisque les conséquences d'un choc persisteront durant toutes les périodes futures, et non plus simplement la suivante comme dans le cas de la cointégration standard. Cette force de rappel rend donc compte, en théorie, de l'ajustement inertiel des variables à leur niveau « naturel ».

2.1. Méthodologie d'estimation

Les méthodes fondées sur le maximum de vraisemblance, généralisant au cas fractionnaire la procédure de Johansen (1988), existent bel et bien mais sont difficilement implémentables et peu intuitives. Une démarche en deux étapes est en revanche fréquemment citée dans la littérature sur la cointégration fractionnaire. Outre une certaine simplicité, elle permet de vérifier point par point les conditions nécessaires et suffisantes de la cointégration et constitue une approche à recommander dans la phase d'étude sur données réelles. Elle se fonde largement sur les travaux de Marinucci et Robinson (2001), qui ont développé un cadre cohérent d'étude en distinguant quatre étapes : estimation de l'ordre d'intégration des séries initiales, test d'égalité de ces ordres, estimation des relations de cointégration et estimation de l'ordre d'intégration des résidus.

Concernant l'égalité des ordres d'intégration des deux séries initiales, une condition nécessaire pour que le système présente de la cointégration – entière ou fractionnaire – est que l'ordre d'intégration de ces séries soit le même. Des estimations fréquentielles des deux paramètres d'intégration d_i ($i = 1, 2$), on peut déduire un test du Khi-deux pour cette hypothèse d'égalité. Concernant l'estimation des relations de cointégration, l'espace de cointégration est de dimension un et il suffit alors d'estimer le vecteur de cointégration $[1 \ \beta]$ ¹¹.

Dans le cas de la cointégration entière, un vecteur cointégrant est estimé avec une vitesse de convergence sur-optimale (en $1/T$ au lieu de $1/\sqrt{T}$) s'il n'existe pas d'autres relations de cointégration. Le biais de simultanéité est alors nul. L'estimation par moindres carrés ordinaires (OLS) peut être étendue au cas fractionnaire dans une certaine mesure : pour des séries de base $I(1)$, la convergence est en $(1/T)^{1-d}$, ce qui est plus rapide que les moindres carrés si le résidu est stationnaire ($d \leq 0.5$). Une procédure en deux étapes est alors justifiée par cette propriété de « super-convergence », à condition que les résidus ne soient pas trop proches de la non-stationnarité. Robinson et Marinucci (2001) proposent un estimateur fréquentiel des moindres carrés en deux étapes (FOLS) du vecteur cointégrant. On considère la relation de cointégration suivante :

$$y_t + \beta x_t = e_t \quad \forall t = 1, \dots, T \quad (4)$$

où $e_t \sim BB(0, \sigma_e^2)$.

11. Dans le cas multivarié, l'estimation porte, d'une part, sur la dimension de l'espace cointégrant et, d'autre part, sur les vecteurs de cointégration.

Soit m le nombre d'ordonnées du périodogramme. On définit la transformée de Fourier discrète du vecteur x pour la fréquence $\lambda_j = 2\pi j/T$, $j = 1, \dots, m$:

$$\omega_x(\lambda_j) = \frac{1}{\sqrt{2\pi T}} \sum_{t=1}^T x_t e^{it\lambda_j}, \quad (5)$$

le périodogramme croisé des vecteurs x et y :

$$I_{xy}(\lambda_j) = \omega_x(\lambda_j) \omega_y'(-\lambda_j) \quad (6)$$

et le périodogramme moyen associé aux vecteurs x et y :

$$\hat{F}_{xy}(m) = \frac{4\pi}{T} \sum_{j=1}^m \text{Re}(I_{xy}(\lambda_j)). \quad (7)$$

L'estimateur FOLS $\hat{\beta}_m$ du coefficient β est alors donné par :

$$\hat{\beta}_m = \hat{F}_{xx}(m)^{-1} \hat{F}_{xy}(m), \quad (8)$$

qui est convergent sous la condition de bande usuelle $\frac{1}{m} + \frac{m}{T} \rightarrow 0$. Il converge vers β à la vitesse $\left(\frac{1}{T}\right)^{1-d}$ si les séries y_t et x_t sont $I(1)$ et plus généralement à la vitesse $\left(\frac{1}{T}\right)^{d_x-d}$ si d_x est l'ordre d'intégration des séries y_t et x_t (voir Robinson et Marinucci (2001)).

La cointégration fractionnaire sera mise en évidence si l'ordre d'intégration des résidus, d , est significativement inférieur à celui des séries de base, et en particulier inférieur à $1/2$. Afin d'estimer cet ordre, les méthodes fréquentielles peuvent être utilisées¹². Cette estimation donne la forme et l'intensité de la force de rappel. La dynamique de court terme – c'est-à-dire la relation entre les séries différenciées – peut alors être estimée par les moindres carrés ordinaires. Cet enchaînement de procédures permet d'estimer *in fine* un modèle à correction d'erreur fractionnaire.

Nous nous proposons de réaliser des simulations de Monte Carlo en vue de comparer les méthodes d'estimation OLS (moindres carrés ordinaires)¹³ et FOLS, en essayant de dégager les conditions d'apparition de biais, et les moyens de les réduire.

12. La méthode d'estimation du paramètre d'intégration fractionnaire la plus populaire dans le domaine fréquentiel est la méthode de Geweke et Porter-Hudak (1983) qui consiste, en utilisant les fréquences basses, à régresser le logarithme du périodogramme sur le logarithme de la fréquence. D'autres techniques existent, pour une revue de la littérature voir Lardic et Mignon (1999).

13. L'estimateur OLS de β est naturellement donné par le rapport de la covariance empirique entre les deux séries x_t et y_t à la variance empirique de x_t .

2.2. Simulations de Monte Carlo

Considérons le modèle fractionnaire bivarié suivant :

$$\begin{cases} y_t + \beta x_t = \epsilon_t \\ y_t + \alpha x_t = \nu_t \\ \nabla^d \epsilon_t = u_t \\ \nabla^{d^*} \nu_t = w_t \end{cases} \quad (9)$$

avec $u_t \sim BB(0, \sigma_u^2)$ et $w_t \sim BB(0, \sigma_w^2)$. Il y a cointégration entière si $d = 0$ et $d^* = 1$, cointégration fractionnaire si $d \leq 1$ et $d^* = 1$ et $[1 \ \beta]'$ est alors le vecteur cointégrant. Après quelques manipulations matricielles, on obtient le modèle à correction d'erreur vectoriel :

$$\begin{bmatrix} \Delta y_t \\ \Delta x_t \end{bmatrix} = (\beta - \alpha)^{-1} \begin{bmatrix} \alpha \\ -1 \end{bmatrix} [1 \ \beta][\nabla^d - \Delta] \begin{bmatrix} y_t \\ x_t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \psi_{1t} \\ \psi_{2t} \end{bmatrix} \quad (10)$$

où ψ_{ij} est une combinaison linéaire de u_t et w_t . Ce système a été introduit originellement par Engle et Granger (1987), puis par Cheung et Lai (1993) afin de tester la puissance des estimateurs issus de l'application de la méthode de Geweke et Porter-Hudak (1983) dans un cadre de cointégration fractionnaire.

Ce système bivarié est estimé afin de mesurer les biais du vecteur cointégrant dans les différentes procédures d'estimation. On choisit $\alpha = 0$, $d^* = 1$, $\sigma_u = \sigma_w = 0.03$ et on simule ϵ_t comme un processus $ARFIMA(0, d, 0)$ et ν_t comme un processus $ARFIMA(0, 1, 0)$, ce qui donne le système fractionnairement cointégré suivant¹⁴ :

$$\begin{pmatrix} y_t \\ x_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \beta \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \epsilon_t \\ \nu_t \end{pmatrix}. \quad (11)$$

Les séries observées y_t et x_t sont donc $I(1)$, l'une explicitement, l'autre comme combinaison linéaire d'une série $I(1)$ et d'une série d'ordre inférieur. Les simulations de Monte-Carlo sont effectuées avec 1000 répétitions. Les questions abordées sont les suivantes : quelle est l'importance du biais OLS sur le coefficient β lorsqu'il y a cointégration fractionnaire? Ce biais est-il réduit par l'estimation fréquentielle (notée FOLS) et quel est, dans ce cas, l'impact de la bande fréquentielle?

14. Dans un premier temps, aucun coefficient ARMA n'est considéré et on suppose que $\beta = -1$.

2.2.1. Biais OLS et cointégration fractionnaire

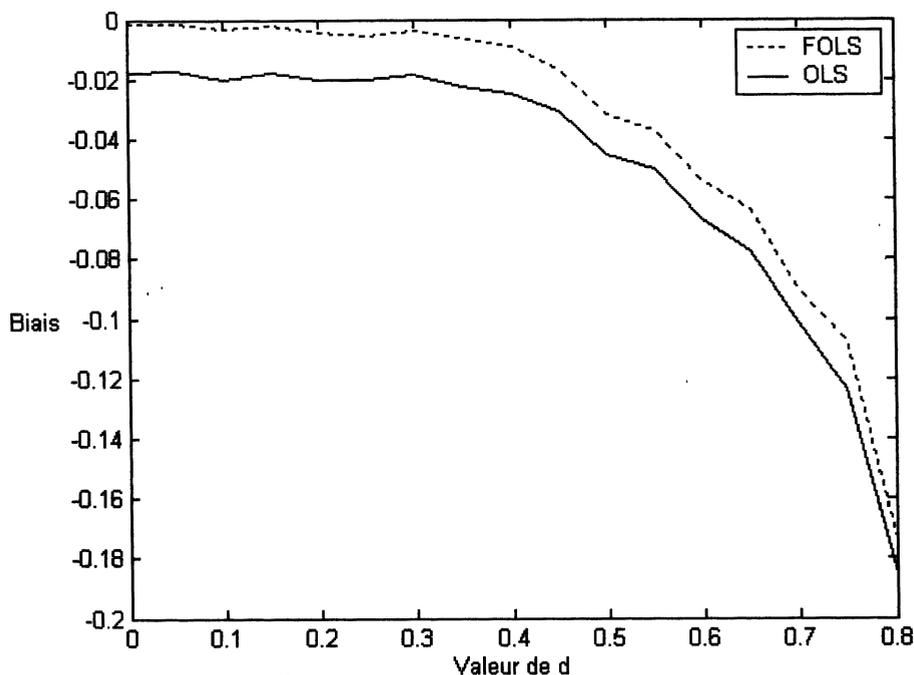


FIG 1. — Biais des estimateurs OLS et FOLS (en %)

Le biais OLS, fonction de d , est représenté sur la figure 1 en traits pleins. Le biais représente 2% du coefficient β lorsqu'il n'y a pas cointégration fractionnaire et demeure stable lorsque l'on dote le résidu d'une structure fractionnaire stationnaire. Ainsi, pour d inférieur à 0.5, le biais reste toujours inférieur à 5%. Cette propriété est bien l'illustration d'une bonne convergence. Il augmente de façon drastique dans le cas non stationnaire, et au fur et à mesure que l'on se rapproche d'un résidu $I(1)$, la régression devient de plus en plus fallacieuse. Le biais est de plus constamment négatif, ce qui montre que $\hat{\beta}_{OLS}$ sous-estime la vraie valeur du paramètre. Inclure une constante dans la relation de long terme contribue en outre à renforcer ce biais¹⁵.

Ce graphe illustre par ailleurs un apport considérable de la cointégration fractionnaire : les phénomènes de transition entre variables $I(1)$ et $I(0)$ sont explorés ; à cet égard on observe une évolution continue du biais, et non pas une brusque modification lors du passage de la stationnarité à la non-stationnarité¹⁶.

15. Les résultats des simulations (non reportés ici) sont disponibles sur demande auprès des auteurs.

16. Notons que si l'on généralise la structure des résidus en incluant des coefficients autorégressifs et moyenne mobile, le biais reste comparable au cas précédent.

2.2.2. Réduction du biais avec un estimateur fréquentiel (FOLS)

On considère ici l'estimateur de Robinson et Marinucci (2001) décrit précédemment :

$$\hat{\beta}_m = \hat{F}_{xx}(m)^{-1} \hat{F}_{xy}(m). \quad (12)$$

La simulation précédente (avec coefficient autorégressif) est reconduite pour un nombre d'ordonnées du périodogramme $m = T^\alpha$ avec $\alpha = 0,5$, α désignant la largeur de la bande de fréquence. Sur la figure 1, la courbe en pointillés correspond à l'estimateur FOLS. Si l'on compare cette courbe à celle relative à l'estimateur OLS (courbe en traits pleins), il apparaît que le biais est très significativement réduit dans le domaine stationnaire, mais suit la même évolution que le biais OLS quand le résidu devient non stationnaire. Dans le domaine stationnaire, $\hat{\beta}_{OLS}$ et $\hat{\beta}_m$ sont convergents car le spectre du résidu $I(d)$ est dominé par le spectre du régresseur $I(1)$ (ce qui rend d'ailleurs inutile une condition d'orthogonalité entre résidu et régresseur). Il n'est donc pas surprenant que la convergence de l'un et l'autre des estimateurs diminue drastiquement lorsque d se rapproche de 1, puisque le résidu n'est plus négligeable devant le régresseur. Il n'est en revanche pas possible d'améliorer l'efficacité de l'estimateur fréquentiel en augmentant la bande de fréquence. En effet, ceci est illustré par la figure 2 qui présente le biais FOLS pour des valeurs de d comprises entre 0.3 et 0.8, et pour différentes bandes de fréquence ($\alpha = 0.5, 0.6, 0.7, 0.8$).

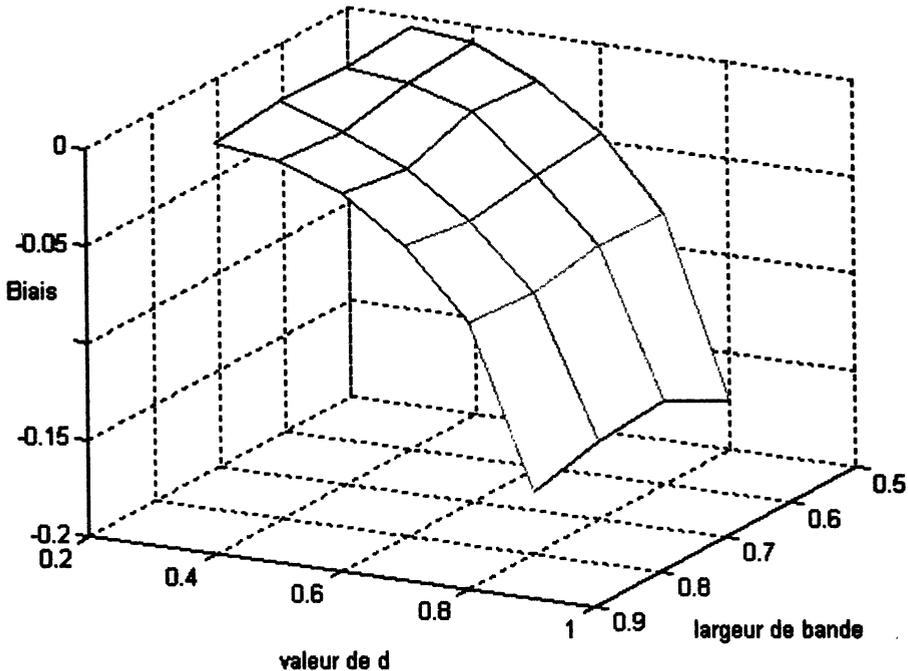


FIG 2. — Influence de la largeur de bande (*bandwidth* α) sur le biais FOLS

2.3. Analyse des résidus

Le principal problème est de déterminer quelles structures de résidus peuvent être identifiées sans biais, et parmi celles-ci, quelle est la plus vraisemblable et la plus performante en termes de prévision. A titre d'exemple, nous considérons un processus $ARFIMA(1, d, 1)$ pour ϵ_t défini par :

$$(1 - L)^d(1 - \rho L)\epsilon_t = (1 - \theta L)u_t \quad (13)$$

où ρ et α sont des réels, $u_t \sim BB(0, \sigma_u^2)$ et où des restrictions de nullité sont éventuellement imposées à certains coefficients (correspondant aux valeurs retardées de ϵ_t et/ou u_t). Une approche empirique visant à déterminer la structure des résidus consiste à rechercher une ou plusieurs « contraintes identifiantes » liant les paramètres structurels. Elles découlent soit de l'estimation des retards du résidu, soit de l'estimation du ou des termes à correction d'erreur dans les dynamiques de court terme. Dans le premier cas de figure, le développement en série entière de $(1 - L)^d$ et de $(1 - \theta L)^{-1}$ donne après quelques simplifications élémentaires :

$$\left(1 - (\rho + d - \theta)L + \left[\theta^2 - (\rho + d)\theta - \frac{d}{2}(1 - d - 2\rho) \right] L^2 \right) \epsilon_t = u_t + v_t, \quad (14)$$

les termes polynomiaux $a(h)L^h(\epsilon_t)$ d'ordre h supérieur ou égal à 3 étant regroupés dans le terme v_t . Pour des valeurs « usuelles » de $\Phi = (\rho, d, \theta)$, tous ces termes sont inférieurs à 10^{-2} . Dans le cas de la cointégration entière, la modélisation $AR(1)$ du résidu prend seulement en considération le premier retard, et sous réserve que v_t soit négligeable devant u_t , on estime alors un coefficient autorégressif valant :

$$\hat{\varphi}_1 = \rho + d - \theta. \quad (15)$$

De même, si l'on prenait en considération le deuxième retard du résidu, il faudrait estimer le coefficient :

$$\hat{\varphi}_2 = (\rho + d)\theta + \frac{d}{2}(1 - d - 2\rho) - \theta^2. \quad (16)$$

On s'intéresse maintenant aux coefficients des termes de correction d'erreur dans l'équation de court terme. Le système :

$$\begin{cases} y_t = \beta x_t + \epsilon_t \\ (1 - L)^d(1 - \rho L)(1 - \theta L)^{-1}\epsilon_t = u_t \end{cases} \quad (17)$$

donne ainsi

$$\Delta y_t = \beta \Delta x_t + (\Delta - (1 - L)^d(1 - \rho L)(1 - \theta L)^{-1}) \epsilon_t + u_t. \quad (18)$$

L'écriture de la force de rappel s'en déduit immédiatement en utilisant (14) et négligeant les termes d'ordre supérieur à 3 (regroupés dans v_t) :

$$\Delta y_t = \beta \Delta x_t + \left((\rho + d - \theta - 1)L + \left[(\rho + d)\theta + \frac{d}{2}(1 - d - 2\rho) - \theta^2 \right] L^2 \right) \epsilon_t + u_t. \quad (19)$$

L'équation (19) fournit l'expression théorique des coefficients des termes à correction d'erreur dans l'estimation de la dynamique de court terme :

$$\begin{cases} \hat{\gamma}_1 = \rho + d - \theta - 1 \\ \hat{\gamma}_2 = (\rho + d)\theta + \frac{d}{2}(1 - d - 2\rho) - \theta^2 \end{cases} \quad (20)$$

D'un point de vue théorique, $\hat{\gamma}_1 = \hat{\varphi}_1 - 1$ et $\hat{\gamma}_2 = \hat{\varphi}_2$. Les équations (15), (16) et (20) fournissent ainsi deux des relations liant les paramètres structurels du modèle à correction d'erreur fractionnaire. Leur utilisation dépend de la significativité respective des coefficients $\hat{\varphi}_1$, $\hat{\varphi}_2$, $\hat{\gamma}_1$, $\hat{\gamma}_2$. Disposer de deux relations indépendantes nous permettrait alors d'identifier immédiatement les paramètres structurels. Cet exemple montre, qu'en pratique, la structure retenue pour les résidus (ici un processus $ARFIMA(1, d, 1)$) peut être déterminée par le biais de régressions simples appliquées aux résidus ou au terme à correction d'erreur.

La dernière étape de l'analyse concerne l'utilisation du FECM à des fins prévisionnelles.

3. Prévision et modèle à correction d'erreur fractionnaire

Considérons une prévision effectuée en t pour un horizon T . Si le modèle structurel retenu pour le résidu est, par exemple, un processus $AR(1)$, nous avons :

$$\epsilon_{t+T} = \rho^T \epsilon_t + \sum_{h=1}^T \rho^{T-h} u_{t+h} \quad (21)$$

de sorte que la prédiction du résidu en $t + T$ est donnée par :

$$\epsilon_{t+T}^e = E(\epsilon_{t+T} | \underline{\epsilon}_t) = \rho^T \epsilon_t \quad (22)$$

puisque la série de bruits u_t est indépendante de $\underline{\epsilon}_t = (\epsilon_t, \epsilon_{t-1}, \epsilon_{t-2}, \dots)$ et de moyenne nulle. Dans le cas présent, la prévision est rendue particulièrement simple par le fait que le processus est markovien, i.e. que $E(\epsilon_{t+T} | \underline{\epsilon}_t) = E(\epsilon_{t+T} | \epsilon_t)$.

Avec un processus à mémoire longue, cette dernière propriété n'est plus vraie. Le produit de convolution de $(1 - L)^d$, $(1 - \rho L)$ et $(1 - \theta L)^{-1}$ permet en effet

d'écrire, pour tout $T > 1$, une représentation $AR(\infty)$ pour le résidu :

$$\epsilon_{t+T} = \sum_{h=1}^{T-1} a(h)\epsilon_{t+T-h} + \sum_{h=T}^{t+T-1} a(h)\epsilon_{t+T-h} + u_{t+T} \quad (23)$$

sous l'hypothèse $\epsilon_h = 0$ pour $h \leq 0$.

En prenant l'espérance conditionnelle par rapport à $\underline{\epsilon}_t$, on en déduit la prévision en $t + T$:

$$\epsilon_{t+T}^e = \sum_{h=1}^{T-1} a(h)\epsilon_{t+T-h}^e + \sum_{h=T}^{t+T-1} a(h)\epsilon_{t+T-h}. \quad (24)$$

Les anticipations effectuées en t pour la date $t + T$ se calculent donc de manière récursive à partir des anticipations effectuées en t pour toutes les dates intermédiaires (celles comprises entre $t + 1$ et $t + T - 1$). Une telle procédure est justifiée par le caractère non-markovien des processus à mémoire longue : la seule connaissance du résidu à la date t ne permet pas de construire une anticipation en $t + T$ puisque tout le passé du processus intervient. Par suite, l'erreur de prévision peut être calculée à partir de la représentation de long terme ou de court terme puisque celles-ci doivent être équivalentes si le modèle est bien spécifié. Nous choisissons ici la représentation de long terme en raison de sa simplicité.

Considérons le système suivant :

$$\begin{cases} y_t = \beta x_t + \epsilon_t \\ (1 - L)^d(1 - \rho L)\epsilon_t = (1 - \theta L)u_t \end{cases} \quad (25)$$

Comme précédemment, on note y_{t+T}^e , x_{t+T}^e et ϵ_t^e les prévisions effectuées en t pour un horizon T , ces prévisions étant reliées par l'équation suivante :

$$y_{t+T}^e = \beta x_{t+T}^e + \epsilon_{t+T}^e. \quad (26)$$

Si les séries x et y sont $I(1)$ la meilleure prévision βx_{t+T}^e effectuée en t est donnée par l'observation $\beta x_t = y_t - \epsilon_t$. Le calcul récursif de ϵ_{t+T}^e donne :

$$y_{t+T}^e = y_t + \epsilon_{t+T}^e - \epsilon_t. \quad (27)$$

On peut alors comparer la prédiction y_{t+T}^e à sa réalisation effective y_{t+T} , et calculer l'erreur quadratique moyenne :

$$\epsilon = \left(\sum_t (y_t + \epsilon_{t+T}^e - \epsilon_t - y_{t+T})^2 \right)^{1/2} \quad (28)$$

Il est alors possible de minimiser l'erreur quadratique moyenne ϵ sur les jeux de paramètres $\Phi_0 = (\rho)$, $\Phi_1 = (\rho, d)$ et $\Phi_2 = (\rho, d, \theta)$. Cette technique permet ainsi de comparer les performances prédictives des modèles $AR(1)$, $ARFIMA(1, d, 0)$ et $ARFIMA(1, d, 1)$, pour n'importe quelle échéance T .

4. Conclusion

Dans ce papier, nous avons présenté divers aspects méthodologiques liés à l'estimation d'un modèle à correction d'erreur fractionnaire (FECM). Nous avons dans un premier temps étudié les biais associés à l'estimation du coefficient de long terme par la technique des moindres carrés ordinaires (OLS) et par la technique fréquentielle en deux étapes (FOLS) proposée par Marinucci et Robinson (2001). Les simulations de Monte Carlo nous ont permis de mettre en évidence le fait que l'approche FOLS conduit à un biais plus faible que la méthode OLS dans le cas stationnaire. De plus, l'augmentation du nombre d'ordonnées du périodogramme retenu lors de l'estimation ne permet pas d'accroître significativement la puissance de l'estimateur FOLS. Dans un deuxième temps, nous avons mis en évidence les contraintes sur les paramètres qui doivent être validées par le FECM afin d'éviter des problèmes de mauvaise spécification. Ces contraintes fournissent des informations utiles concernant la valeur du paramètre de mémoire longue. *In fine*, l'expression théorique des prévisions issues d'un FECM ont été présentées.

Remerciements

Nous tenons à remercier un rapporteur anonyme et l'éditeur pour leurs remarques très pertinentes qui ont permis d'améliorer la version initiale de ce travail. Bien entendu, nous restons seuls responsables des éventuelles erreurs ou omissions.

Références

- [1] BAILLIE R.T. (1996), «Long memory processes and fractional integration in econometrics», *Journal of Econometrics*, 73(1), 5-59.
- [2] CHEUNG Y.W., LAI K.S. (1993), «Finite-sample sizes of Johansen's likelihood ratio test for cointegration», *Oxford Bulletin of Economics and Statistics*, 55, 313-28.
- [3] ENGLE R.F., GRANGER C.W.J. (1987), «Co-integration and error-correction : representation, estimation, and testing», *Econometrica*, 55, 251-76.
- [4] GEWEKE J., PORTER-HUDAK S. (1983), «The estimation and application of long memory time series models», *Journal of Time Series Analysis*, 4, 221-238.
- [5] GRANGER C.W.J., JOYEUX R. (1980), «An introduction to long-memory time series models and fractional differencing», *Journal of Time Series Analysis*, 1, 15-39.

- [6] HOSKING J.R.M. (1981), «Fractional Differencing», *Biometrika*, 68, 165-176.
- [7] JOHANSEN S. (1988), «Statistical analysis of cointegration vectors», *Journal of Economic Dynamics and Control*, 12, 231-254.
- [8] LARDIC S., MIGNON V. (1999), «La mémoire longue en économie : une revue de la littérature», *Journal de la Société Française de Statistique*, 140 (2), 5-48 ; article suivi d'une discussion et d'une réponse des auteurs, 49-108.
- [9] LYHAGEN J. (1998), «Maximum likelihood estimation of the multivariate fractional cointegrating model», *Working Paper Series in Economics and Finance 233*, Stockholm School of Economics.
- [10] MARINUCCI D., ROBINSON P.M. (2001), «Semiparametric analysis of fractional cointegration», *Journal of Econometrics*, 105, 225-247.