JOURNAL DE LA SOCIÉTÉ FRANÇAISE DE STATISTIQUE

BERNARD BRU

Souvenirs de Bologne

Journal de la société française de statistique, tome 144, nº 1-2 (2003), p. 135-226

<http://www.numdam.org/item?id=JSFS_2003__144_1-2_135_0>

SOUVENIRS DE BOLOGNE

Bernard BRU *

RÉSUMÉ

En 1928, à l'occasion du Congrès international des mathématiciens de Bologne, se sont trouvés réunis un grand nombre de ceux qui vont établir le calcul des probabilités et la statistique mathématique comme des disciplines scientifiques à part entière, internationalement reconnues, et susceptibles d'applications très riches dans tous les domaines. On examine en particulier l'émergence à Bologne et la reconnaissance d'une des grandes théories probabilistes du XX^e siècle, la théorie des chaînes de Markov. On en profite pour esquisser en annexe des profils rapides des orateurs statisticiens et probabilistes d'une des sous sections du Congrès de Bologne, la sous-section IVA.

ABSTRACT

In 1928, at the time of the international Congress of the mathematicians of Bologna, were joined together a great number of those who will establish the theory of probability and the mathematical statistics as scientific disciplines with whole share, internationally recognized, and suitable for very rich applications in all domains. We will examine in particular emergence in Bologna and the recognition of one of the great probabilistic theories of the 20th Century, the theory of the Markov chains. Moreover, we will outline in appendix fast profiles of the speakers, statisticians and probabilists, of one of the sub-sections of the Congress of Bologna, sub-section IVA.

1. Introduction

On ne sait pas quand, comment ni pourquoi tout a commencé. Certes, lorsqu'on raconte une histoire, il y a un début : il était une fois... Mais on sait bien alors que ce n'est pas une histoire vraie, une histoire d'historien, qui, lui, ne se risquerait pas à décider de quelle fois il s'agit, de quel début dans l'immensité des débuts possibles, envisageables, probables, vraisemblables, dont l'étendue même est impossible à imaginer, encore moins à mesurer, à cerner, tant sont insignifiantes et innombrables les circonstances, les occasions, les rencontres qui soudain s'opèrent, s'associent, se disjoignent, se brouillent ou se conjuguent dans l'espace et le temps des cultures humaines, tant sont interchangeables et en même temps uniques et irremplaçables, les hommes, les institutions, les climats qui participent à la création et à l'établissement d'une science. En attendant que celle-ci ne meure à son tour, soumise au cycle vital des sciences qui progressent sans cesse, en épuisant ce qui les a nourries.

* Équipe MAP5 – Université Paris 5 – 45, Rue des Saints-Pères, F-75006 Paris. E-mail : Bernard.bru@univ-paris5.fr

Pourtant il y a incontestablement un avant et un après dans l'histoire de la statistique mathématique et du calcul des probabilités qui va nous intéresser ici.

En 1900, c'est encore l'avant : il y a bien Karl Pearson à Londres, Edgeworth à Oxford, Bachelier à Paris, quelques physiciens « allemands » à Zurich, Vienne, Lemberg ou Berlin, assez bizarres il est vrai, les élèves de Chebyshev à Saint Pétersbourg, sérieux quant à eux, une demi-douzaine d'actuaires-astronomes-mathématiciens scandinaves, et puis certains statisticiens-économistes allemands, clairsemés et mal vus de leurs collègues, des géomètres-mécaniciens-statisticiens italiens aussi, d'autres encore, qui appliquent tous le calcul des probabilités, mais chacun à leur manière et dans l'ignorance hautaine ou naïve de celles de leurs voisins (ou de leurs prédécesseurs). Pour sa part, l'Europe mathématique profonde considère que tout ça n'est pas très convenable. Un mathématicien digne de ce nom doit ignorer ces choses, sauf s'il est dans l'obligation professionnelle de les enseigner, et encore se doit-il alors d'indiquer qu'il s'agit là d'un sujet controversé, qui « *nous apprend surtout que nous ne savons rien.* » (Poincaré, *Calcul des probabilités*, Paris, 1896, phrase finale). Quant à la statistique mondiale, la vraie statistique, celle des congrès de l'Institut International de Statistique, elle ne s'en laisse pas compter et ignore doctement tous ces calculs de probabilités incertains et inutiles.

En 2000, c'est l'après : il n'y a pas de doute à cet égard. Partout dans le monde, la théorie des probabilités a pignon sur rue et la statistique mathématique est enseignée et utilisée à grande échelle, de façon relativement unifiée. Certains esprits chagrins pensent d'ailleurs qu'en 1968 (pour prendre un chiffre rond), tout est consommé déjà, et qu'en 2000, on est en phase descendante, l'euphorie statistique des années soixante s'essoufflant quelque peu. Mais ce sont là de mauvais prophètes et nous voulons parler d'histoire ancienne et non d'histoire future, quoique les incertitudes de la première ne soient pas moindres que celles de la seconde.

Il y a donc entre un avant et un après quelque chose d'insaisissable, d'indicible, qui marquerait un changement véritable dans les mentalités savantes et les manières de faire. Et comme il faut cependant commencer, nous allons raconter une amorce de début, une rencontre clairement identifiée, où se sont trouvés rassemblés, une unique fois dans la première moitié du vingtième siècle, la plupart des mathématiciens « statisticiens » de tous les pays, juste avant qu'ils ne vivent eux-mêmes, séparément, cette irruption probabiliste assez inattendue, et qu'ils en deviennent, pour certains d'entre eux, les protagonistes.

Il s'agit, on l'aura compris, du Congrès international des mathématiciens qui s'est tenu à Bologne du 3 au 10 septembre 1928.

Depuis leur création en 1897, les Congrès internationaux des mathématiciens n'ont guère manifesté d'intérêt pour la statistique probabilisée (Krengel, 1994). De plus, l'idéal de fraternité et de coopération universelles qui animait les fondateurs s'est trouvé mis à rude épreuve par la première guerre mondiale (Lehto, 1998). Après la victoire, les savants alliés, soucieux de stigmatiser et de punir la barbarie scientifique allemande qui a conduit le monde civilisé au chaos et à la destruction, ont mis ses représentants au ban de toutes les manifestations internationales. De sorte que les congrès de Strasbourg en 1920 et de Toronto en 1924 ont exclu toute participation allemande, alors même que les mathématiques allemandes, celles de Berlin et Göttingen notamment, occupent incontestablement une place de tout premier plan dans le monde. En 1928, la France, qui symbolise alors l'humanisme savant, la science mise au service de l'homme et de la liberté, a finalement admis que cette quarantaine honteuse avait assez duré et qu'il y avait lieu d'accueillir de nouveau les représentants de la science de langue allemande, qu'il y avait même intérêt à le faire, tant paraissait grande leur avance scientifique en certains domaines. D'un autre côté, la nouvelle URSS, jusqu'alors isolée, mais désireuse de démontrer son excellence scientifique et d'observer ce qui se faisait ailleurs, a envoyé une importante délégation, et ce serait la dernière fois avant la mort de Staline, les frontières se refermant dès le début des années trente. Du même coup, les organisateurs du Congrès ont élargi leurs horizons et la statistique sous toutes ses formes a été munie d'une Section pour elle toute seule, la section IV intitulée « Sciences actuarielles », à laquelle vont participer non seulement les orateurs statisticiens proprement dits, mais aussi un certain nombre de mathématiciens jusqu'alors réservés sur les applications des mathématiques à de tels sujets et qui y trouvent un terrain neutre, où les hiérarchies sont encore mal assurées, et où l'on discute de problèmes intéressants dans une atmosphère conviviale. Et cette ouverture inattendue des mathématiques pures à leurs applications, certes toisées d'assez haut, est très exceptionnelle et ne se reproduirait plus de sitôt, au point que les statisticiens mathématiciens, une fois constitués en corporations clairement identifiées, créeraient leurs journaux, leurs organes, leurs congrès, sans plus chercher ailleurs une reconnaissance qu'ils s'accorderaient à eux-mêmes.

C'est donc cette histoire-là que nous allons raconter très brièvement. Nous en profiterons pour glisser subrepticement, honni soit qui mal y pense, une sorte d'argumentation visant à établir ou à conforter un commencement possible, non pas bien sûr celui de la statistique mathématique tout entière, ce serait assurément présomptueux et d'ailleurs absolument faux, mais celui d'une théorie mathématique particulière, celle des processus de Markov, dont l'importance dans la science du XX^e siècle en général, et dans la statistique mathématique en particulier, ne s'est jamais démentie. Pour nous faire pardonner cette fantaisie historique, nous proposons en annexe un bref parcours biographique d'un certain nombre des orateurs de la sous-section IVA, probabilités et statistiques, du Congrès de Bologne, susceptible de fournir au lecteur éventuel quelques éléments qui pourraient lui permettre, nous l'espérons tout au moins, de raconter à son tour les véritables débuts de cette ténébreuse affaire. Les orateurs de la sous-section IVB, actuariat et économétrie, auraient certainement mérité qu'on s'intéressât à eux de la même façon, d'autant que la frontière est ténue entre les deux sous sections et sans doute plus idéologique ou circonstancielle que scientifique. Mais il aurait fallu parler également de ceux qui étaient présents à Bologne et qui n'ont pas parlé, de ceux qui n'étaient pas présents à Bologne et qui auraient pu y parler, et de tant d'autres qui parleraient bientôt ailleurs, dont l'importance et le génie ne sont pas moindres. Pour rester dans des limites tolérables, il fallait choisir (arbitrairement), et la sous-section IVA était un choix possible.

2. La section IV

On l'a dit, l'ensemble des sciences actuarielles est réuni à Bologne dans la section IV subdivisée en deux sous sections, probabilités et statistique d'une part, actuariat et économie d'autre part. Si l'on regarde la liste des orateurs et des participants potentiels aux travaux de la section, on se rend compte que presque tout le monde est là. Fisher, Darmois, Neyman, Pólya, Slutsky, Romanovsky, de Finetti, Cantelli, Gumbel, etc. y prennent la parole. Gini, Pietra, Lomnicki, Khinchin figurent sur la liste des congressistes (le dernier avec sa femme) ; ils participent aux discussions mais n'ont pas proposé de contribution dans les Actes, publiés, il est vrai, quatre ans plus tard. Bernstein, Hadamard, Fréchet, Lévy, Kryloff et Bogoliouboff, qui vont jouer un rôle très important, sont là également, beaucoup d'autres encore que nous verrons apparaître ici ou là. Seuls manquent à l'appel Richard von Mises et Harald Cramér sans doute occupés ailleurs et les moins de 25 ans qui n'ont pas obtenu leur billet pour Bologne, le jeune Kolmogorov notamment – toutefois Mises fera une importante conférence au congrès de Zurich de 1932 et Cramér sera l'une des vedettes du colloque de Genève de 1937, *infra*.

L'incorporation de la théorie des probabilités aux sciences actuarielles peut surprendre rétrospectivement, maintenant que l'on sait qu'en 1928 elle est en plein renouvellement, mais elle situe assez bien sa place dans les mathématiques officielles du temps. Les trois principales sections du Congrès sont numérotées par ordre de mérite : Section I, Analyse (la science des nombres), Section II, Géométrie (la science de l'étendue), Section III, Mécanique (la science du mouvement). Au-dessous se trouvent reléguées, la section IV consacrée aux sciences actuarielles et la section V aux « sciences de l'ingénieur » (aérodynamique, hydrodynamique, ...). Les sections VI et VII sont visiblement des fourre-tout sans intérêt (pédagogie, logique, philosophie, histoire). Les principaux ténors de notre histoire mettent d'ailleurs un point d'honneur à parler dans l'une des trois premières sections, Fréchet, Hadamard, Bernstein, Lévy par exemple. Seul contre tous, Borel, dont le militantisme probabiliste date des années d'avant-guerre, paraît avoir voulu informer solennellement les congressistes que le calcul des probabilités peut et doit s'appliquer aux sciences les plus exactes, la théorie des nombres ou celle des fonctions, mais ne considère nullement, pour autant, que la science des probabilités fasse partie des mathématiques, ce qui ne dut satisfaire personne. Toutefois Borel n'était pas présent à Bologne et Hadamard, qui présidait la séance où il devait parler, demanda à Élie Cartan de lire le texte qu'il avait préparé (Borel, 1929) – on imagine la scène !. On se perd en conjectures sur l'absence de Borel au Congrès de Bologne où il était chargé de prononcer une des conférences plénières (honneur généralement prisé). Il faudrait examiner ce point. Pincherle, président du Congrès, s'était cru obligé de célébrer, dans son discours d'ouverture, le « génie exceptionnel » qui veillait alors aux destinées de l'Italie et Benito Mussolini était président d'honneur du Congrès. Borel aurait-il considéré qu'un parlementaire français, républicain indépendant, n'avait pas à cautionner une telle présidence (ou peut être plus simplement était-il pris par ses multiples obligations politiques et scientifiques du moment) ? Émile Picard, quant à lui, avait refusé tout net de participer au Congrès, considérant que décidément la science allemande était irréductiblement perverse et qu'il n'y avait pas lieu de la réhabiliter (d'autant qu'à Bologne elle tenait le haut du pavé et à juste raison). Salvatore Pincherle (1853-1936), l'un des fondateurs du calcul fonctionnel, était juif comme nombre de très grands mathématiciens italiens. Il n'eut pas à subir directement la politique raciale de l'Italie fasciste qui ne se mit en place que dix ans plus tard. En 1928, il présidait l'Union mathématique italienne qu'il avait fondée en 1922, et il avait les faveurs du pouvoir. Il avait d'ailleurs signé le manifeste des intellectuels fascistes, l'un des seuls parmi les représentants des sciences de la matière. Les congressistes, sans doute embarrassés, envoyèrent dès l'ouverture du congrès un message de sympathie à Picard et dorénavant ils veilleraient à ne plus se compromettre de la sorte ; les deux congrès suivants auraient lieu en terrain neutre, Zurich en 1932 et Oslo en 1936. Picard n'y participerait pas davantage ; les congressistes de Zurich tiendraient cependant à lui adresser un télégramme curieusement libellé de la sorte : « *Les membres du Congrès international des mathématiciens prient l'illustre doyen des maîtres de l'analyse de notre époque d'agréer l'hommage de leur admiration et de leur profond respect.* » (Comptes Rendus de Zurich tome I, p. 43). Il faudrait analyser plus en détail les efforts des mathématiciens de l'entre-deux-guerres pour tenter de sauver au nom de la science pure la paix éternelle des peuples ; Borel dut y contribuer de toutes ses forces, il était présent à Zurich et Oslo sans doute principalement pour cela, mais nous sortons de notre sujet, revenons-y.

La position subalterne du calcul des probabilités et de la statistique au Congrès de Bologne n'a pas démoralisé l'ardeur savante des orateurs de la section IV, tous témoins vivants de la renaissance spectaculaire d'une discipline sinistrée depuis longtemps, d'autant que pour la première fois, on l'a dit, ils se trouvent réunis nombreux venant de toutes les écoles alors actives dans le monde, et dans un climat mathématique propice aux développements théoriques. Certains « mathématiciens » considérables participent d'ailleurs activement aux débats, Lévy, Khinchin, Fréchet, Darmois, Bernstein ou Pólya par exemple, et les thèmes abordés sont d'une richesse et d'une nouveauté sans précédent. Trois des plus grands courants de la statistique mathématique du xx^e siècle vont, en effet, être présentés à Bologne. D'abord la statistique fishérienne, défendue par le Maître lui-même, qui est déjà intervenu au Congrés de Toronto quatre ans plus tôt, mais devant un auditoire réduit. À lui tout seul – et il n'en paraît pas mécontent –, Fisher incarne à Bologne toute la statistique mathématique anglaise. Karl Pearson, on le sait, ne se déplace jamais ; d'ailleurs il n'est pas considéré, et ne se considère pas, comme un mathématicien anglais, et ses disciples ne s'autorisent pas à le remplacer. Fisher, qui, lui, se considère volontiers comme un géomètre et qui l'est incontestablement, présente donc sa propre théorie du test du Chideux dans ses rapports avec la méthode fishérienne du maximum de vraisemblance, thème qui deviendra classique après remise aux normes, Cramér (1946), Chernoff, Lehmann (1954), etc... C'est également à Bologne que Neyman présente pour la première fois en public sa théorie des tests, qui s'appelle alors la « théorie des probabilité des hypothèses », en un français qui n'admet pas les anglicismes trop arrogants, et bientôt paraîtront les grands mémoires de Neyman et Pearson (1933). Neyman est un disciple de Borel et Lebesgue et sa théorie s'inscrit dans ce cadre, l'un des mieux représentés à Bologne, où les écoles hongroises, polonaises et russes affirment leur vitalité triomphante, Banach, Steinhaus, Riesz, dix autres sont présents à Bologne et la nouvelle analyse fonctionnelle s'établit (Dieudonné, 1981). Les deux théories statistiques dominantes du xx^e^ siècle sont donc là mais on trouve également dans la sous-section IVA une autre théorie statistique de première grandeur, celle des séries temporelles (stationnaires notamment) avec l'un de leurs fondateurs, Eugene Slutsky, qui expose sa remarquable théorie des fonctions aléatoires, mais aussi Georges Darmois dont la conférence, brillante, traite de l'analyse statistique des « séries qui se développent dans le temps ». La statistique mathématique classique n'est pas oubliée pour autant. On traite à Bologne de moyennes, de coefficients de dispersion, de corrélations, d'interpolation, de courbes de fréquence et de leurs développements en séries, comme il se doit. Nous ne développerons pas davantage ce thème ici, renvoyant le lecteur intéressé à l'annexe et bien sûr aux Actes du Congrès. Nous présenterons plutôt quelques éléments épars sur l'un des thèmes probabilistes originaux du Congrès de Bologne, ce qu'on appelle communément (et d'ailleurs depuis Bologne) la théorie des chaînes de Markov.

3. Les événements liés en chaînes

Plusieurs des conférences de la sous-section IVA, probabilités et statistiques, sont liées à un sujet absolument ésotérique dans les mathématiques des années vingt, la probabilité des événements liés en chaînes. Plus étonnant, Hadamard consacre un exposé de la section III au même sujet. Or Hadamard est un monstre sacré du Congrès. Il a prononcé une des trois conférences inaugurales, en compagnie de Hilbert (l'autre grande vedette de Bologne) et de Puppini (lequel représente à la fois l'Université de Bologne et le fascisme italien dont il est thuriféraire et bientôt ministre. On reconnaît la diplomatie subtile de Pincherle qui a réussi l'exploit de faire cohabiter à Bologne Allemands et Français). Un certain nombre des congressistes bolognais vont s'emparer aussitôt du sujet, initiant une série ininterrompue de travaux prolongés sur plus d'un demi-siècle, qui transformeront progressivement un ensemble réduit de résultats anecdotiques et superficiels en une théorie générale, parmi les plus développées de la théorie des probabilités, aux liens surprenants et profonds avec les autres théories de l'analyse mathématique, et aux applications innombrables et universelles.

Or qui, avant Bologne, s'est intéressé aux propriétés asymptotiques des suites d'événements dépendants ? Daniel Bernoulli et Laplace bien entendu, mais ils ne comptent plus. Markov évidemment, qui a introduit et remarquablement étudié ce thème en 1906-1907 et jusqu'à sa mort en 1922, mais il faut bien constater qu'il a été peu lu et guère imité, si ce n'est par le grand

Serge Bernstein qui l'a mis au programme de son cours de probabilités de l'Université de Kharkov pendant la première guerre mondiale et l'a développé dans plusieurs mémoires importants de 1922 à 1927, qu'au reste personne n'a lus davantage ni à Leningrad, ni à Moscou, ni à Paris, ni ailleurs, à l'exception de rares originaux, Pólya à Zurich par exemple qui s'est intéressé à des problèmes particuliers de ce type, sans rencontrer lui non plus l'enthousiasme de ses collègues mathématiciens. Bachelier à Paris a écrit dès le début du siècle une théorie presque générale des probabilités continues « connexes » (une théorie des schémas markoviens continus), là encore personne ne l'a lu et tout le monde sait que Bachelier est méritant certes mais qu'il n'est pas très bon. Les chaînes d'événements sont également présentes, sans crier gare ni être nommées, dans les travaux de physiciens, ingénieurs et actuaires ici ou là, mais il ne s'agit pas de mathématiques, et ces savants seraient eux-mêmes très étonnés d'apprendre qu'ils travaillent sur des objets mathématiques non identifiés (on verra la bibliographie et ci-dessous pour des références).

Que s'est-il donc passé à Bologne ?

Pour le comprendre, il faudrait remonter assez loin en arrière, et cela risquerait pour le coup de nous entraîner trop loin. Nous nous contenterons donc d'isoler deux ou trois éléments qui ne sont pas absolument sans rapport avec la question posée. Nous ne parlerons pas ou très peu de Markov, pour lequel nous professons la plus grande admiration mais dont personne ne paraît se recommander à Bologne, pas même dans la délégation soviétique. Markov a été fort bien étudié ailleurs, notamment par Oskar Sheynin (1989), Eugene Seneta (1996) et Micheline Petruszewycz qui a traduit, édité et commenté les grands textes markoviens dans un très bel ouvrage (1981). On s'y reportera. Ce sont Hadamard et Hostinský qui semblent avoir joué le rôle déterminant dans l'affaire bolognaise, ce sont donc eux que nous suivrons en priorité et d'abord leur source commune.

4. Poincaré et le battage des cartes

Poincaré, on ne l'ignore pas, a commencé par manifester la plus extrême réserve vis-à-vis du calcul des probabilités, dont il restreint d'autorité le champ d'application aux jeux de hasard et à leurs variantes militaires, économiques ou expérimentales, le tir au canon, les assurances sur la vie, les erreurs d'observation. C'est un fait, en diverses circonstances, les hommes jouent aux dés, mécanismes subalternes qui suivent des règles mathématiques assez simples, voilà tout. Or il se trouve qu'au début du XX^{e} siècle, Poincaré va assister, impuissant, à l'effondrement de l'édifice imposant de la physique classique. Il en prend acte. C'est profondément regrettable mais c'est un fait. Il faut en tout cas éviter les débordements qu'en période troublée les faux prophètes exploitent. La raison, cet éclair dans la nuit, doit être sauvée. Et d'abord, puisqu'à peu près seules, et bien qu'elles aient été jusqu'alors tenues pour assez suspectes, les théories cinétiques échappent au désastre, tentons de les établir en doctrine cohérente (ce qui n'est pas précisément le cas en 1900, notamment pour ce qui concerne le « principe ergodique » et le paradoxe de l'irréversibilité : les systèmes dynamiques de la mécanique statistique évoluent irréversiblement vers un état ne dépendant plus des conditions initiales, alors que leurs équations sont entièrement réversibles dans le temps). En 1907, Poincaré décide d'intervenir publiquement. Il publie un article intitulé « Le hasard » dans la *Revue du Mois*, que vient de fonder Borel, le premier mathématicien français à avoir senti que le calcul des probabilités s'apprêtait à jouer, en ce nouveau siècle, un rôle nouveau (1905, 1906, 1909, 1914). Cet article (1907) de Poincaré, fort intéressant, est repris en divers endroits notamment dans l'un de ses ouvrages philosophiques les plus lus, *Science et Méthode* (1908a), et en introduction de la seconde édition de son *Calcul des probabilités* (1912), publié peu de temps avant sa mort. Il n'est pas exagéré de dire que c'est de cet article que procèdent les contributions bolognaises de Hadamard, Hostinský et quelques autres et d'une certaine façon toute l'affaire de Bologne.

Comme à son habitude et à celle de son temps Poincaré ne cite pas ses sources mais on les devine ligne à ligne sans grandes difficultés. De quoi s'agit-il ? De reconnaître officiellement

> « que le hasard est autre chose que le nom que nous donnons à notre ignorance, que parmi les phénomènes dont nous ignorons les causes, nous devons distinguer les phénomènes fortuits, sur lesquels le calcul des probabilités nous renseignera provisoirement, et ceux qui ne sont pas fortuits et sur lesquels nous ne pourrons rien dire tant que nous n'aurons pas déterminé les lois qui les régissent. Et pour les phénomènes fortuits eux-mêmes, il est clair que les renseignements que nous fournit le calcul des probabilités ne cesseront pas d'être vrais le jour où ces phénomènes seront mieux connus» (Poincaré, 1907, p. 258-259). »

Ainsi Poincaré semble adopter une théorie (objective) du hasard proche de celle de Cournot : le hasard a « *une part notable dans le gouvernement du monde* », il produit des « *phénomènes fortuits* ». Du même coup, le calcul des probabilités acquiert une « *valeur scientifique* » : une « intelligence supérieure » ne pourrait contester ni d'ailleurs améliorer ses résultats dès lors qu'ils seraient convenablement fondés (Cournot, 1843).

Quels sont les phénomènes fortuits selon Poincaré ? Le premier exemple qu'il propose, est emprunté à un article écrit en 1899, (1899b), les assurances sur la vie, dont les dividendes ne seraient pas améliorés si un médecin « *très perspicace et très indiscret venait renseigner le directeur sur les chances de vie des assurés* » (note 1). Poincaré se livre ensuite à une analyse plus fine de la nature des dits phénomènes fortuits et de leurs « lois ». Cette analyse sera reprise par tous les auteurs de calcul des probabilités de la tradition française et servira notamment d'introduction officielle à la théorie des chaînes de Markov. Il est visible qu'elle provient d'une lecture attentive du grand livre de Gibbs (1902), du compte rendu qu'Hadamard en a fait (1906), et d'un article de Borel (1906b) paru peu de temps auparavant, mais aussi de Cournot, qui, du reste, fournit à Poincaré deux de ses exemples : le cône reposant en équilibre sur sa pointe, le côté sur lequel il tombe (et il est physiquement impossible qu'il ne tombe pas) est un phénomène fortuit, exemple selon Poincaré d'intervention déterminante d'une cause infiniment petite aux conséquences appréciables (une irrégularité de fabrication du cône ou de la surface sur lequel il est posé, une trépidation légère, etc.) et l'homme tué par une tuile tombant d'un toit (hasard des rencontres de chaînes causales indépendantes chez Cournot comme chez Poincaré qui toutefois considère cette source de hasard comme « secondaire »). Dans la première catégorie de hasard (extrême sensibilité aux conditions initiales), Poincaré range l'exemple de la roulette et celui des « *petites planètes* » qu'il a traité déjà dans son cours (1896) mais aussi (1899b), (1902, chapitre XI) : « *de petites différences dans les causes suffisent pour amener de grandes différences dans les effets* », de sorte que, toutes choses égales d'ailleurs, la probabilisation initiale des « causes » n'intervient plus explicitement dans celle des effets. Sous la seule hypothèse (minime) que la fonction de probabilité initiale ne varie pas trop brusquement, la probabilité des effets suffisamment lointains oublie ses origines et dans les deux exemples étudiés, elle est uniforme. Ce hasard là est donc régi par une loi indépendante des conditions initiales qui peuvent demeurer arbitraires. C'est la « méthode des fonctions arbitraires » de Poincaré qui contribue à pourvoir le calcul des probabilités d'une valeur scientifique en le libérant de l'arbitraire de la probabilisation initiale – et des « tendances idéalistes » qui profitent de la situation et dont on sait la perversité et l'extrême nocivité (Khinchin, 1952). Nous savons combien cette « méthode », déjà implicite dans le grand mémoire de Poincaré sur le problème des trois corps (1890), (Hadamard, 1922), va jouer un rôle important dans l'histoire de la théorie des probabilités; elle accorde officiellement à l'équiprobabilité le statut et les prérogatives d'une « loi naturelle » et la libère dans certaines circonstances de sa condition quelque peu infamante de n'être rien de plus qu'une indifférence subjectivement liée à notre état d'ignorance. Huygens, Moivre, Bernoulli, Laplace, Cournot, Bienaymé déjà et Bertrand après eux, considéraient bien l'équiprobabilité comme une équipossibilité physique, celle d'un « choix au hasard » de la nature, mais ce n'était visiblement pour eux qu'une idéalisation ou une approximation commode de la réalité où jamais l'on ne rencontre de tels miracles improbables. Poincaré cherche à préciser mathématiquement la nature de cette approximation avant de l'intégrer à son système de connaissance; c'est là, et Borel l'a fort bien noté, le fond de sa philosophie. Indiquons que les « fonctions arbitraires » sont présentes, sous une autre forme, chez Laplace qui le premier a énoncé en 1780 un théorème éliminant l'arbitraire de la loi *a priori* à force d'observations répétées. Ce résultat, que Mises et Bernstein appellent théorème de Laplace-Bienaymé, sera repris par Bienaymé et Cournot comme l'un des principes de base de la statistique asymptotique, qui fonde la « valeur pratique du calcul des probabilités ». L'arbitraire de la loi *a priori* disparaît peu à peu et l'on découvre à l'infini la Nature enfin dévoilée – sur ce point, voir par exemple Cournot (1843) et Bienaymé *et al.* (1997) qui donne des références.

Des exemples dont nous pouvons aisément identifier l'origine permettent à Poincaré d'introduire, après Laplace, une autre source de hasard : « la complexité des causes ». En théorie cinétique des gaz, un déplacement infime de la position initiale d'une molécule est au premier choc (et il est quasiment immédiat) multiplié par un grand nombre et au bout de n chocs par ce même nombre élevé à la puissance n, de sorte qu'au bout d'une fraction de seconde il prend une telle ampleur que le mouvement de la molécule considérée est infiniment éloigné de celui qu'il aurait sans ce déplacement. C'est, selon Poincaré (qui suit Borel), le nombre immense des chocs, « *la complexité des causes* », qui produit un tel phénomène (fortuit). Dans cette même catégorie de fortuité, Poincaré range les mélanges de liquide de Gibbs (1902) et le battage des cartes, métaphore ingénieuse imaginée (mais non traitée) par Hadamard (1906) pour mieux faire comprendre les mélanges de Gibbs. Poincaré ne cite ni l'un ni l'autre.

Les deux sources de hasard selon Poincaré vont alimenter d'innombrables textes et débats dont il serait trop long de rappeler les méandres. En fait, on le sent bien, c'est Poincaré que Poincaré veut avant tout convaincre. Y est-il parvenu ? On peut en douter. La première source du hasard selon Poincaré n'est-elle pas simplement un avatar du comportement de certains systèmes dynamiques aux trajectoires chaotiques, où le hasard n'intervient pas ? Et la complexité des causes, nous fait-elle véritablement progresser dans la compréhension ou la reconnaissance d'un hasard objectif qui serait inscrit dans la nature des choses ? N'est-ce pas simplement le hasard classique, celui des Stoïciens et des Sceptiques, l'ignorance où nous sommes des véritables causes, c'est-à-dire la négation du hasard pris dans la réalité des choses ? Tout cela aurait-il pu susciter un mouvement scientifique tel que celui de Bologne ? Cela paraît difficile à croire.

Le point intéressant est ailleurs. Poincaré, en effet, se plaît à détailler l'exemple du battage des cartes, et c'est là le seul point technique original de son article (qui par là-même justifierait à ses yeux la pertinence de sa publication). Chacun sait qu'un jeu de cartes bien battu devient équitable pour chacun des joueurs, ou encore, nous explique Poincaré, quelle que soit la distribution initiale des cartes, « *le grand nombre des battements, c'est- à-dire la complexité des causes* » rendra cette distribution uniforme, tous les rangements possibles des cartes du paquet seront équiprobables. Poincaré ajoute que « *même avec trois cartes la démonstration serait compliquée* » et qu'il se contentera de la donner pour deux cartes seulement. On peut conjecturer que, déjà en 1907, Poincaré est en possession de la démonstration générale qu'il publiera quatre ans plus tard dans la deuxième édition de son *Calcul des probabilités* (1912), mais rien ne l'indique de façon certaine. La démonstration du cas de deux cartes est en tout cas donnée explicitement et elle est particulièrement ingénieuse. Poincaré utilise la « méthode des espérances » développée par Bertrand (1888). Il n'y a que deux types de battements possibles : les deux cartes restent dans l'ordre initial ou elles sont inversées. Convenons que les habitudes du joueur sont ainsi faites que le premier type a une probabilité p et le second une probabilité $p = 1 - p$. Supposons donc n battements et que je gagne 1 franc si les cartes se retrouvent dans l'ordre initial et que je perde ce franc sinon (il s'agit de franc-or), l'espérance de gain est $(p - q)^n$ et, si l'on suppose p différent de 0 ou 1, cette espérance tend à s'annuler avec l'augmentation de n. Le jeu devient équitable exponentiellement vite.

Toutefois ajoute Poincaré : « *il y aura exception si l'un des nombres p et q était égal à 1 et l'autre nul. Cela ne marcherait plus alors parce que nos hypothèses initiales seraient trop simples* ». Ce deuxième type de hasard (complexité des causes) est donc lui aussi régi par des « lois » fixes et constantes qui s'apparentent au « principe ergodique » des physiciens, il y a une tendance irréversible vers l'uniformité indépendamment des conditions initiales, et cette fois-ci, une démonstration mathématique est possible. Le principe ergodique, au moins dans le cas de deux cartes, devient un théorème. La raison a le dernier mot !

Ainsi commence la version française de l'histoire des chaînes de Markov que longtemps Fréchet appellera chaînes de Markov-Poincaré (Fréchet-Hadamard, 1933 ou Fréchet, 1956). On reconnaît sur l'exemple des deux cartes, le « cas ordinaire » et le « cas singulier » de la théorie classique. À peu près simultanément Markov traite le cas régulier des chaînes « simples » de Markov qu'il introduit, en toute généralité, dans le cas homogène dans le temps (note 2). Les motivations de Markov sont assez différentes de celles de Poincaré et de Borel, elles ont été fort bien analysées par Seneta (1996) et nous n'y reviendrons pas ici. Indiquons simplement que la « tradition française » semble avoir totalement ignoré les travaux de Markov jusqu'en 1928, lorsqu'à l'occasion du Congrès de Bologne les deux « écoles » se sont rencontrées par l'intermédiaire de Pólya. Pourtant ce n'est pas la barrière de la langue qui s'opposait à ce que les mathématiciens français (et les autres) s'intéressent aux travaux de Markov ; ceux-ci en effet ont été présentés en français, dès 1910, dans l'une des revues internationales les plus lues en France (1910), et en allemand en 1912. Simplement les mathématiciens ne s'intéressaient pas encore aux chaînes de Markov et n'ont donc pas lu Markov ni d'ailleurs Bachelier, lui aussi publié à la même époque dans les meilleures revues (françaises celles-là et avec l'appui de Poincaré) ni du reste Poincaré lui-même, le plus grand mathématicien vivant. La notoriété ne suffit pas pour être lu, encore faut-il traiter d'un sujet qui se lise ; et l'on comprend mieux la singularité d'un Borel quittant une théorie, qui devient à la mode dans le monde mathématique et dont il est l'un des maîtres, la théorie « ensembliste » des fonctions d'une variable réelle, pour se consacrer « de toutes ses forces » au calcul des probabilités alors peu fréquentable, (quoiqu'avec une espèce de dégoût mathématique assez curieux et après avoir gagné la reconnaissance académique à laquelle il aspirait en combattant aux premières lignes sur tous les fronts véritablement mathématiques de son temps).

Comme on l'a dit, Poincaré a reproduit son article de la *Revue du Mois* en introduction de la seconde édition de son cours de probabilités de 1896, « revu et augmenté » d'un chapitre important intitulé modestement « *questions diverses* » (1912). Ce chapitre contient une étude détaillée du problème général du battage des cartes conduisant à une démonstration du « principe ergodique » probabiliste : indépendamment de la distribution initiale et quelles que soient les habitudes du joueur, pourvu qu'elles ne soient pas « trop simples », la distribution des cartes tend à devenir uniforme, chaque permutation des cartes devient équiprobable (note 3). En parallèle Poincaré traite du problème « dynamique » correspondant, le mélange de deux liquides l'un rose et l'autre incolore ; le mouvement de chacune des molécules, rose ou incolore, est soumis aux équations de la dynamique, il s'agit de montrer dans ce cadre un principe ergodique assurant (au moins en moyenne) le mélange des deux liquides (ce qui est la moindre des choses) Poincaré montre la difficulté de ce second problème si différent et si proche du précédent. De façon systématique d'ailleurs, Poincaré, à partir de 1907, va revoir – et le cas échéant enrichir – ses réflexions sur la théorie cinétique des gaz (1908b ou 1911, par exemple), réflexions dont il admet qu'elles n'ont pas encore atteint une maturité suffisante. Poincaré est mort le 17 juillet 1912. Le théorème ergodique de Birkhoff date de 1931. Quant aux problèmes généraux de la théorie cinétique des gaz et aux solutions de l'équation de Boltzmann, ils seront progressivement soumis à l'analyse – on se reportera à l'intéressante introduction de Chapman et Cowling (1939) pour des références –; ils demeurent, on le sait, au cœur des recherches actuelles et futures.

5. Borel et le battage des cartes

C'est évidemment Borel qui, le premier et le seul à Paris, va réagir au chapitre nouveau du livre de Poincaré, auquel il répond aussitôt par une courte note [1912] donnant une démonstration rapide et élémentaire du cas « ordinaire » du battage des cartes. C'est la première fois qu'il est fait usage en France de ce qui plus tard s'appellera la « méthode de Markov » ou le « principe de moyenne » (Fréchet, 1938b), c'est-à-dire l'exploitation simple de la remarque évidente que tout ce qui dépend du énième battage est en probabilité une moyenne pondérée, un barycentre, de l'étape précédente, et par conséquent a tendance à se concentrer d'étape en étape et à converger sous de bonnes hypothèses (note 4). Il est assez clair que Borel ignore alors les travaux de Markov (qu'il ne cite nulle part) et que c'est en lisant le nouveau chapitre de Poincaré le crayon à la main qu'il propose cette démonstration comme Markov l'avait fait avant lui et bien d'autres après. Cela le confortera dans l'idée que les théorèmes limites probabilistes n'ont nul besoin de la sophistication de l'analyse de Fourier pour être vrais, le calcul ordinaire suffit. Jamais Borel n'utilisera ni n'enseignera les « fonctions caractéristiques », il laissera ce soin à Lévy et à Darmois (sur ce point particulier, voir Lévy, 1970, p.82).

Il faudrait naturellement indiquer ici le rôle de tout premier plan joué par Borel dans la renaissance de l'école française de théorie des probabilités pour laquelle il a obtenu la construction de l'Institut Henri Poincaré, inauguré à l'automne 1928, quelques jours après Bologne. C'est également Borel qui a été le principal artisan de la création de l'ISUP en 1925 et le directeur du grand *Traité de Calcul des probabilités et de ses applications*, en 5 tomes et 18 fascicules publiés chez Gauthier-Villars de 1925 à 1939. Toute cette histoire est trop longue et trop riche pour être racontée ici ; nous renverrons aux Actes du Colloque Borel qui s'est tenu à Saint-Affrique en juillet 1999 à l'initiative de P. Guiraldenq (1999).

6. Lévy et le battage des cartes

Indiquons en passant que Paul Lévy, qui deviendra après la guerre un des grands spécialistes de la théorie markovienne, consacre un paragraphe à la loi (gaussienne) des vitesses de Maxwell et quelques lignes au battage des cartes de Poincaré, dans son premier livre de calcul des probabilités (1925). Sans s'en rendre compte, Lévy améliore à cette occasion les résultats de Borel et Poincaré (*infra*). Le battage des cartes (avec sa solution incomplète) devient un classique du cours de probabilités de l'École polytechnique, dont Lévy est chargé, et Hadamard aussi, en alternance avec lui, ce qui nous amène au paragraphe suivant, qui lui nous plonge au cœur de l'affaire.

7. Hadamard et le battage des cartes

Jacques Hadamard (1865-1963) est un des très grands mathématiciens de son temps; il s'est intéressé et jusqu'à la fin de sa longue vie à tous les domaines des mathématiques vivantes. Ses contributions personnelles au calcul des probabilités sont peu nombreuses, tardives et marginales dans l'ensemble de son œuvre, mais elles touchent directement à notre sujet et elles en sont même d'une certaine façon le point de départ officiel. À l'inverse de Borel (d'ailleurs tout est inversé chez Borel et Hadamard), Hadamard a peu de goût ni de talent pour l'action directe sur les hommes, non pas qu'il s'en désintéresse, il sera longtemps membre du Comité Central de la Ligue des Droits de l'Homme, mais il préfère cultiver la science pour la science comme ses maîtres Hermite et Poincaré. Son amitié avec Duhem, ses cours au Collège de France l'ont conduit à s'occuper activement des questions mathématiques liées à l'hydrodynamique, la mécanique et la physique, mais il ne semble pas avoir pris très au sérieux la théorie cinétique des gaz, ni le calcul des probabilités dont le contenu mathématique devait lui sembler assez mince à la fin du dix-neuvième siècle et qu'il n'a eu ni le goût ni le temps de suivre dans ses développements des années trente, trop tardifs certainement pour qu'il ait pu envisager de s'y consacrer à son tour (en cela il n'est pas si éloigné de Borel, une fois n'est pas coutume). Certes, comme on l'a dit, Hadamard a compris, en même temps que Borel et Poincaré qu'un dispositif aléatoire aussi simple que le battage des cartes permet de « simuler » d'une certaine façon les singularités du principe ergodique de la mécanique et de montrer ainsi que les paradoxes dont il est environné ne sont pas mortels, mais cela ne résout pas pour autant le problème dynamique, le seul qui lui semble réellement digne de l'attention d'un mathématicien.

Comme pour beaucoup de ses contemporains (Bernstein, Lévy, Lindeberg, ...), ce sont peut-être les nécessités d'un enseignement rénové du calcul des probabilités après la première guerre mondiale qui amène Hadamard à reprendre une théorie qu'il a abandonnée depuis longtemps. Nommé professeur d'analyse à l'École polytechnique en remplacement de Camille Jordan en 1912, Hadamard entreprend en effet la rédaction de son cours d'analyse vers le milieu des années vingt. Le premier volume qui correspond à l'enseignement de la première année paraît en 1926, le second, sans doute écrit dans la même période, en 1930. On y trouve un long et intéressant chapitre consacré à la théorie des probabilités et à la statistique et notamment le paragraphe obligé sur le battage des cartes (qui utilise la méthode des moyennes de Markov-Borel-Hadamard et reprend la note (1927b) dont nous parlons ci-dessous). On pourrait également penser aux nouveaux travaux probabilistes de Paul Lévy, disciple très proche d'Hadamard, tous présentés par lui à l'Académie, qui auraient pu l'inciter à étudier de tels sujets – sur ce point on verra la thèse très riche de Bernard Locker (2001). On pourrait même imaginer que c'est en réfléchissant à l'œuvre de Duhem, un des pionniers de la thermodynamique des processus irréversibles, dont il est en train d'écrire l'éloge mathématique (1927a), qu'il est amené à repenser au principe ergodique et à l'irréversibilité dynamique et statistique. Il est de toute façon assuré qu'Hadamard a longuement réfléchi au problème ergodique à la suite de Poincaré qui a montré qu'il pouvait être formulé de façon non contradictoire et en a précisé à plusieurs reprises l'intérêt et la difficulté, (par exemple 1912, derniers paragraphes). Hadamard ne s'en cache d'ailleurs pas (Hostinský, 1928a et Hadamard, 1928c) et incite les jeunes mathématiciens à s'y attaquer (Weil, 1991). Quel problème en effet correspond davantage aux goûts et aux choix de la théorie qualitative des systèmes dynamiques de Poincaré et de la tradition parisienne de physique mathématique à laquelle Hadamard aime à se rattacher ? Quelle qualité pourrait surpasser en intérêt et en fascination cette tendance vers le mélange et l'uniformité, insensible aux conditions initiales, si visiblement manifestée par les systèmes les plus simples de l'hydraulique, postulée de toute évidence par la théorie des gaz, et pourtant si rebelle à la théorie mécanique, comme le postulat d'Euclide le fut un temps à la théorie géométrique ? Dès que le théorème ergodique sera publié, il apparaîtra d'ailleurs comme : « *the only result of real generality established for the solutions of dynamical systems* » – Wiener, Wintner (1941), G.D. Birkhoff (1942). Quoiqu'il en soit, en l'absence d'éléments déterminants, on ne peut que constater la présentation le 4 juillet 1927 d'une note d'Hadamard sur le battage des cartes (1927b) qui, venant à son heure d'un auteur aussi prestigieux, va jouer un rôle de premier plan.

Cette note commence par donner deux démonstrations différentes du « cas ordinaire », celui où le principe ergodique probabiliste s'applique : la probabilité d'un rangement particulier tend vers l'uniformité indépendamment de la situation initiale. Ces deux démonstrations sont fondées sur le principe des « probabilités composées » (ou de la moyenne, ou de Markov) qu'il attribue dans sa conférence de Bologne à Urban (1923), (voir Hadamard, 1928c, p. 134). La première démonstration est identique à la démonstration de Borel (1912) qui n'est pas cité, la seconde plus précise et plus courte encore est peut-être celle que Lévy avait en vue dans son traité de 1925 ; elle donne une estimation de la vitesse de convergence (note 5). Ces deux démonstrations seront les seules qui seront lues et citées dans la littérature française commençante sur les chaînes, et, en dépit de leur absence d'originalité véritable, elles serviront de référence. La principale innovation de la note d'Hadamard reprise en 1928 dans sa conférence au Congrès de Bologne est l'étude complète (quoique sans démonstration en forme) du « cas singulier » – le cas périodique des traités classiques, voir par exemple Feller (1950a) –, c'est-à-dire le cas dans lequel, aussi nombreux que soient les battages, il y a toujours des états à tour de rôle de probabilité nulle. La méthode proposée par Hadamard est «directe» , elle consiste à suivre les rangements cycliquement «conséquents» les uns des autres. Comme le souligne Fréchet (1938, seconde partie, chapitre II, troisième méthode), l'adjectif « *conséquent*» utilisé par Hadamard est emprunté à la théorie des trajectoires de Poincaré «*en raison de l'analogie des circonstances*» et il n'est pas douteux que la «méthode directe» est d'origine mécanique – voir Poincaré (1890) et (1899a). Elle annonce et a d'ailleurs inspiré en partie la méthode utilisée de façon systématique et remarquablement développée par Kolmogorov (1936, 1937) et Doeblin (1936, 1938a), indépendamment, dix ans plus tard.

La note de juillet est suivie, quelque temps plus tard, de deux nouvelles notes importantes (1928 a,b) dont nous parlons au paragraphe suivant et qui, elles aussi, sont les premières références françaises de la théorie probabiliste des «opérations itérées» dans laquelle s'inscrivent un grand nombre de travaux mathématiques des années trente, notamment ceux de l'École de Fréchet à l'IHP.

8. Hostinský et le battage des cartes

La communauté mathématique parisienne n'a pas été la seule à saisir le mouvement irréversible de probabilisation commencé au début du siècle. Nous avons déjà signalé certains travaux des écoles de physique statistique et d'hydrodynamique notamment en Angleterre et aux Pays-Bas, ceux des écoles anglaises de statistique mathématique, les écoles scandinaves ou italiennes d'actuariat dont les aspects purement mathématiques sont très riches, l'intérêt grandissant de certains nouveaux mathématiciens pour le calcul nouveau des probabilités, Hausdorff, Hardy, Bernstein, Pólya, Lindeberg, Khinchin, Kolmogorov, Steinhaus,... Il faudrait rappeler ici, de façon synthétique, cohérente et ordonnée, la renaissance multicentrique des écoles probabilistes européennes, mais ce serait une tâche démesurément longue dont nous ne maîtrisons pas tous les linéaments et les détours. Nous devrions au moins citer deux noms qui s'imposent au début des années trente, deux savants éminents qui se verront charger d'exposer les progrès récents de la théorie des probabilités au Congrès international des mathématiciens de Zurich en 1932, Serge Bernstein et Richard von Mises, savants considérables qui ont été tous deux des pionniers de l'étude générale des événements liés en chaîne (note 6). Peut-être faudrait-il aussi raconter les débuts flamboyants de l'École probabiliste de Moscou qui sera dans les années trente l'une des premières au monde? Toutefois, au risque d'apparaître sacrilège ou iconoclaste, nous nous limiterons au moins considéré des auteurs probabilistes de l'entre-deux-guerres, qui paradoxalement a joué le plus grand rôle dans le développement de l'École française des probabilités en chaîne de l'IHP mais aussi dans celui du Séminaire de probabilités de Moscou à partir de 1934 et qui, à Bologne, sera l'un des plus entourés ; nous voulons parler, on l'aura compris, de Bohuslav Hostinský (1884-1951).

Il existe, on le sait, à toutes les époques, de ces savants un peu trop humains, qui n'ont pas la touche du génie qui fait les œuvres rares, les audaces sublimes, les prodiges de virtuosité qu'on vénère et qui donne parfois le sentiment que l'utopie cartésienne n'est pas absurde. Il se trouve pourtant que ces savants si ordinaires aux œuvres peu lisibles, maladroites, souvent fautives, engluées dans leur temps et que rien ne signale à la postérité ont parfois la chance de rencontrer, au hasard de leurs carrières étroites, des idées lumineuses et grandioses tombées du ciel à leurs pieds, que d'authentiques génies, issus d'hérédités improbables, n'ont pas vu arriver sur terre, eux qui auraient su mieux sans doute les reconnaître et les dévoiler jusqu'en leurs beautés ultimes. D'une certaine façon, et c'est hélas l'opinion commune, Fréchet luimême pourrait relever de ce genre savant si l'on ne constatait d'évidence que ses rencontres inopinées avec les objets étranges de la mathématique sont pour lui si attestées et si fréquentes qu'invoquer à cet égard un hasard répété serait déraisonnable et qu'il faut bien lui reconnaître au moins une affinité particulière avec les mystères des nombres et des structures. Pour ce qui concerne Bohuslav Hostinský, professeur de physique théorique à l'Université Masaryk de Brno, qui paraît avoir été peu attiré par la physique d'Einstein ou celle de Planck, au point que la postérité la plus bienveillante l'oublierait ou le toiserait avec condescendance, il n'est pas douteux qu'il ait eu la chance unique de se trouver, avant Kolmogorov, Lévy, Fréchet, Hadamard et beaucoup d'autres, au carrefour de la théorie des événements en chaînes au moment où celle-ci passait soudainement de la semi-confidentialité des travaux qu'on reçoit sans les lire à une reconnaissance savante suffisante pour être gratifiée à partir du tome 5, en 1933, d'une rubrique spéciale dans le *Zentralblatt*, dont Hostinský d'ailleurs serait un temps l'un des principaux rédacteurs probabilistes.

Qui est Bohuslav Hostinský et que vient-il faire ici ? Il est assez vraisemblable qu'en d'autres temps il n'eût pas attiré à ce point l'attention et que sa chance (et sa malchance) à lui furent de naître tchèque (note 7) en 1884, de sorte qu'à la création de la République tchécoslovaque en 1918, il avait l'âge et la position de pouvoir contribuer à incarner l'ambition scientifique nationale de son pays libéré. Jusqu'alors les travaux de B. Hostinský, assez modestes en somme, touchent à cette partie de la géométrie qui constitue une part importante de la culture universitaire parisienne, dont les traités de Darboux sont les joyaux les plus admirés notamment en Europe Centrale et en Russie, et bien sûr à la mécanique rationnelle, cette physique mathématique française qui maîtrise la nature en la transformant selon ses plans en un jardin clos dont elle ne peut s'échapper. Hostinský est à 34 ans maître de conférences de mathématiques pures à l'Université tchèque de Prague, c'est-à-dire vraisemblablement à peu près rien dans l'échelle des valeurs académiques de l'époque, au regard des positions universitaires prestigieuses ouvertes seulement aux héros de la science dont les Universités allemandes de Prague et de Brünn sont comme celles de Strassburg, Breslau ou Königsberg, les luminaires aux confins de l'Empire culturel allemand. L'Université tchèque de Prague, créée en

1882 par dédoublement de l'ancienne université fondée au XIV^{e} siècle par Charles IV, ne semble pas avoir particulièrement brillé dans les matières scientifiques. C'est principalement une concession obligée et minime de la politique des Habsbourg au particularisme culturel tchèque, après la grande réforme dualiste de l'Empire, en 1867, qui reconnaît les droits historiques du royaume de Hongrie et n'accorde rien de tel à la couronne de Bohème, (voir par exemple Belina *et al.*, 1993, chapitre X). Cette concession, pour minime qu'elle soit, déroge cependant au principe établi d'absorption et d'assimilation des élites à la culture dominante, de sorte que fonder l'Université tchèque de Prague (après avoir dédoublé en 1869 l'École polytechnique de Prague) c'est aussi dégager une autre élite, certes de bas-étage, les savants tchèques professeurs à l'Université de Prague ne s'y trompant pas, qui refusèrent tout net d'intégrer la nouvelle Université tchèque, mais d'autant plus active. La « séparation » ne pouvait qu'exalter le génie tchèque et cristalliser en une opposition académique irréductible l'hostilité linguistique et culturelle latente des communautés tchèques et allemandes de Bohème et de Moravie ; mais autant cela allait de soi en esthétique, en musicologie ou en linguistique, autant la situation semblait désespérée dans les sciences théoriques et expérimentales où l'Allemagne dominait sans partage l'Europe Centrale et le Monde savant d'alors. Mais n'anticipons pas. Et ce qui devait arriver arriva.

Thomas Masaryk (1850-1937) nommé en 1882 professeur de philosophie à l'Université tchèque de Prague et bientôt son leader, s'est volontairement exilé à la fin de l'année 1914 ; il fonde en 1916 et dirige à Paris (18 rue Bonaparte) le Gouvernement provisoire de la République Tchécoslovaque dont il devient en 1918 le premier président, après en avoir représenté auprès des Alliés les aspirations nationales. Masaryk s'est vu conférer en 1919 le titre de « docteur honoraire de l'Université (française) de Strasbourg » parce qu'il « *a su fixer le but à atteindre, et associer la cause de son peuple à celle des grandes nations qui combattaient pour la liberté du monde. La libération des Tchèques et des Slovaques est ainsi devenue solidaire de celle des Alsaciens-Lorrains.* » (Université de Strasbourg, 1920, p. 58-59).

Maurice Fréchet (1878-1973) a été nommé professeur à Strasbourg en 1919 et ses travaux qui jusque là étaient exclusivement théoriques vont se trouver infléchis vers les applications (Armatte, 2001). Fréchet a l'âme d'un missionnaire, tout entier dévoué au service du génie français, seul capable à ses yeux de rétablir la Science à sa vraie place après la victoire de 1918. Fréchet entretient une correspondance internationale impressionnante, qui se trouve préservée pour l'essentiel aux Archives de l'Académie des sciences. Il s'emploie notamment à nouer des contacts avec les universitaires des pays libérés, les Tchèques notamment associés aux Alsaciens. Il souhaite savoir quelles sont les universités tchèques et leurs possibilités de publier en français. La réponse figure aux Archives de l'Académie des sciences (carton Fréchet 8). Datée du 19 octobre 1919, elle émane de Bohuslav Hostinský. Ainsi commence une correspondance fascinante, surréaliste, qui va durer jusqu'en 1951. Hostinský assure le secrétariat du Comité National provisoire des Mathématiques Tchéco-Slovaques, il est donc naturel que ce soit lui qui réponde au représentant de la France mathématique à l'écoute de ses frères tchèques. On peut à ce sujet invoquer le hasard des rencontres ou simplement remarquer que les mathématiques tchécoslovaques sont alors si discrètes qu'il était nécessaire qu'une telle rencontre eût lieu cette année là. Parmi les savants tchèques du moment on peut citer les noms de Karel Petr, Bohumil Bydzovsky ou de Frantisek Záviska qui probablement n'évoquent plus grand chose au lecteur contemporain mais qui avaient alors quelque notoriété et dirigeaient la revue de la Société tchécoslovaque de mathématique et de physique, *Casopis pro pestovany matematiky a fysiky*, fondée en 1872, dont Hostinský serait longtemps rédacteur. Hostinský indique à Fréchet qu'il n'existe actuellement qu'une université tchèque à Prague mais que deux nouvelles universités tchécoslovaques sont en projet à Brno (qui doublera l'université allemande) et à Bratislava. Quant aux publications mathématiques tchèques de langue française, il n'en existe pas mais Hostinský serait « très heureux » d'en avancer l'idée et de rendre ainsi service aux savants français. Il se déclare de culture mathématique française ; il a passé l'année universitaire 1908-1909, à Paris où il a suivi les cours de Darboux, Poincaré, Picard, Humbert, Hadamard, Appell et Borel. Darboux lui-même a publié ses premiers travaux (1909), et l'a encouragé à les poursuivre, ce qu'il se propose de faire avec la plus grande détermination.

Lors des fêtes d'inauguration de l'Université de Strasbourg en novembre 1919, la délégation de Tchécoslovaquie est conduite par le ministre de l'Instruction publique et de la Culture nationale de la République Tchéco-Slovaque, Gustave Habrman. Ce dernier y prononce un discours bien senti dans lequel il exprime nettement que la culture française a été le « *rayon de lumière qui, après trois siècles de sommeil intellectuel et d'oppression physique, est une des principales causes de notre résurrection nationale* ». Et Habrman d'annoncer à son tour la création de deux nouvelles Universités « nationales » à Brno (la Brünn des oppresseurs) et à Bratislava (Presbourg qui dut subir Napoléon) et d'appeler à la coopération franco-tchéco-slovaque dans tous les domaines de la culture qui seule lui permettra d'assurer son « avenir » et sa prospérité.

Au congrès « international » des mathématiciens de Strasbourg, du 22 au 30 septembre 1920, Hostinský fait partie de la délégation tchèque ; il préside une des séances de la section de géométrie et fait deux exposés l'un en géométrie et l'autre en mécanique. Hostinský prend dès lors une dimension internationale, Picard accepte de publier dans le Bulletin des sciences mathématiques une traduction d'un de ses articles tchèques sur l'application de la méthode des fonctions arbitraires de Poincaré au problème de Buffon (Hostinský, 1920) dont nous parlons plus bas.

L'Université de Brno, fondée en janvier 1919, ouvre ses portes en octobre 1921 ; elle a pris le nom mythique du président Masaryk. Bohuslav Hostinský est nommé professeur de physique théorique et premier doyen de la Faculté des sciences ; il sera recteur de l'Université en 1929-1930. Il crée aussitôt les *Publications de la Faculté des sciences de l'Université Masaryk* en édition bilingue tchèque-français avec une majorité de textes français. Les *Publications*, qu'il dirige pendant près de trente ans, vont jouer un rôle important dans les années trente aussi bien en théorie des probabilités en chaîne qu'en topologie. Eduard

Cech (1893-1960) a en effet succédé en 1923 à Mathias Lerch (1860- 1922), premier titulaire de la chaire de mathématiques pures de l'Université Masaryk qui s'est trouvée ainsi symboliquement rattachée par son intermédiaire, elle qui se voulait authentiquement tchèque, aux mathématiques éternelles, supranationales, extragalactiques de Weierstrass et Hermite, toutes entières dévouées aux mystères des nombres et à eux seuls. Après des études à Prague et à Turin, E. Cech s'est intéressé à la géométrie différentielle, puis à partir de 1928 aux travaux des écoles russes et polonaises en topologie générale ; il crée alors une école originale de topologie algébrique. Invité à l'Institute for Advanced Studies de Princeton en 1935, il anime à son retour un important séminaire de topologie à Brno jusqu'à la fermeture des universités tchèques en 1939. Les mathématiques tchèques ont commencé d'exister à Brno et ont pris assez vite suffisamment d'importance pour que, narguant l'impérialisme allemand sur ses terres, le deuxième Congrès des mathématiciens des Pays Slaves se tienne, après Varsovie en 1929, à Prague en 1934 et qu'Hostinský y prononce une conférence générale « sur les progrès récents de la théorie des probabilités ». L'indépendance mathématique de l'Europe slave est enfin conquise et Hostinský en est incontestablement l'un des héros.

En 1921 toutefois, Hostinský a un titre, un pouvoir, une ambition, mais n'a encore ni œuvre, ni école. Il enseigne la physique mathématique et le calcul des probabilités de Poincaré et bien sûr la théorie de Fredholm (1921). Ses recherches paraissent orientées vers l'acoustique mathématique (en mémoire de son père) et les probabilités géométriques, sujet sur lequel il a publié, on l'a dit, un premier article traduit en français en 1920 dont il nous faut dire un mot puisqu'il introduit notre sujet.

Carvallo déjà en 1912 puis Borel en 1914 avaient remarqué que dans le problème de l'aiguille de Buffon la manière de lancer l'aiguille n'est pas indifférente ; on peut, si l'on n'y prend garde, obtenir, en jetant une aiguille sur un parquet, une toute autre formule que celle de Buffon (Borel, 1914, p. 85 et par exemple Lomnicki, 1923, p. 69-71). Borel toujours pratique avait suggéré que pour obtenir une vérification expérimentale de la formule de Buffon – $1/\Pi$ lorsque la largeur des lames du parquet est double de la longueur de l'aiguille –, il valait mieux jeter en l'air une aiguille à coudre (la précision est importante) de sorte qu'elle retombe verticalement sur le sol et fasse ainsi avec les rainures du parquet un angle également distribué sur la circonférence, (*Le Hasard*, p. 82). Hostinský montre en 1917 que cette recommandation seule suffit à fort peu près, le point de chute de l'aiguille pouvant, lui, être distribué arbitrairement sur tout le plancher. La démonstration de Hostinský exploite la méthode des fonctions arbitraires que Poincaré a introduite dès 1890 en mécanique céleste (Hadamard, 1922, p. 2163) et qui constitue l'un des apports originaux de son cours de calcul des probabilités de 1894, dont le principe se réduit à la remarque suivante : lorsqu'on subdivise un intervalle (a, b) en $2n$ parties égales numérotées de 1 à $2n$, les intégrales d'une fonction arbitraire (ou presque) f prise sur les sous-intervalles pairs et celle prise sur les sous-intervalles impairs sont à peu près les mêmes, la différence entre les deux tend vers zéro lorsque n tend vers l'infini. Le premier exemple d'application de cette méthode est la démonstration du fait avéré que la bille d'une roulette de casino, au terme de ses rotations, a autant de chance d'être ici ou là, quelles que puissent être les habitudes de lancement du croupier, le second exemple est celui, plus célèbre encore, des petites planètes sur le zodiaque (Poincaré, 1896, 1899b, 1912).

Il semble que l'exemple de l'aiguille de Buffon ait peu à peu amené Hostinský à une première esquisse de théorie générale qui connut l'honneur d'être publiée en 1926 dans les *Acta mathematica*, mais que personne ne dut lire. On y trouve pourtant en filigrane une idée remarquable qui sera développée systématiquement dans la décennie suivante par de nombreux savants et non des moindres. Dans cet article, Hostinský envisage en effet le mouvement d'une boule dont deux hémisphères séparés par un grand cercle sont peints l'un en rouge et l'autre en blanc. On lance la boule et on se demande quelle est la probabilité qu'elle s'arrête sur la face rouge. Même question si on peint la boule de six couleurs différentes sur des surfaces égales (ou à peu près égales préciserait Borel), par exemple six tranches de melon. On imagine assez que la méthode des fonctions arbitraires peut s'appliquer encore et conduire aux résultats auxquels on s'attend, 1/2 dans le premier cas, 1/6 dans le second, le plan sur lequel la boule est lancée pouvant être partitionné en couronnes correspondant aux contacts successifs de chacune des couleurs et la fonction arbitraire exprimant les habitudes de lancement du joueur de boules se trouvant ainsi intégrée de façon équitable ou peu s'en faut dès que la boule roule suffisamment longtemps, et Hostinský le démontre à la manière de la roulette de Poincaré –. En 1928, après avoir démontré son théorème ergodique et lu la thèse de Francis Perrin, Hostinský traitera le problème de la sphère en rotation sur le modèle du battage des cartes (1928d, 1929a), ce qui donne à la physique théorique de Brno une cohérence et une capacité explicative de tout premier plan, mais n'anticipons pas. On peut imaginer ensuite que la boule se déforme et prenne l'apparence d'un dé qui roule sur un tapis de jeu, l'équiprobabilité des faces devient alors un nouvel exemple d'application de la méthode de Poincaré et échappe ainsi au désastre de n'être qu'une définition ou pire encore une idéalisation physiquement impossible. On peut aussi aplatir la boule en une pièce rouge d'un côté et blanche de l'autre, qui, après avoir suivi son mouvement en l'air et sur la table, a même probabilité de retomber sur l'une ou l'autre face, ce qui fournit une théorie mécanico-probabiliste de l'observation constante qu'au jeu de pile ou face les deux joueurs gagnent sensiblement le même nombre de parties. En résumé, conclut Hostinský, tout problème de probabilité où l'on a affaire aux « mouvements continus de différents corps » relève de la même méthode. Il suffit que le mouvement se prolonge suffisamment pour que la distribution finale soit indépendante de la probabilisation initiale du mouvement comme dans le cas de l'agitation des boules dans l'urne d'une loterie ou de l'aiguille de Buffon lancée en l'air ou du mouvement d'une main qui tire en aveugle un billet d'une boîte.

Hostinský indique également, sans le développer encore, qu'Emile Borel a suggéré l'emploi de la même méthode en théorie cinétique des gaz et cite le cours de Borel (1914b), qui peut avoir été pour Hostinský l'occasion d'utiliser ses connaissances géométriques dans le cadre de ses nouvelles fonctions à Brno, mais qui est un élément important de sa réflexion générale sur le déterminisme probabilisé (voir à ce sujet Beránek, 1984). On pourrait contester sans doute l'originalité des affirmations de notre auteur et prétendre que tout déjà est dans Poincaré ou dans Borel ; ce serait une erreur, l'un et l'autre de ces savants admettant sans grande discussion, pour le dé comme pour les tirages de boules, la définition classique des cas favorables et possibles, Poincaré considérant pour sa part qu'il y a lieu de s'intéresser aux fonctions arbitraires seulement pour les « probabilités géométriques » dont l'arbitraire a précisément été signalé dès l'origine par les savants de l'École française, Cournot, Bienaymé et bien sûr Bertrand, et Borel ne les tolérant que « dans certaines questions de probabilités des causes » (Le Hasard p. 95). Indépendamment de ce fait incontestable, on sent combien cette découverte progressive (entre 1917 et 1925), mais triomphale, de la généralité des « fonctions arbitraires » a joué un rôle déterminant dans la carrière de Hostinský, qui est devenu pendant quelques années le prophète et le défenseur le plus éloquent du rôle universel en physique du principe ergodique probabiliste sous toutes ses formes, et l'on ne comprendrait sans doute pas tout à fait la suite si l'on ne prenait pas en compte ici l'enthousiasme du savant découvrant soudainement que l'équiprobabilité des faces d'un dé jeté sur une table est une conséquence inéluctable de l'élimination de l'arbitraire par le mouvement continu, comme l'est aussi la formule de Buffon et bien d'autres choses encore – voir sur ce sujet Fréchet (1938b, première partie) et Plato (1983, 1987, 1994).

On ne sait jamais vraiment les sources, on l'a dit en commençant (c'est d'ailleurs une chance pour les historiens). Nous ferons donc ici l'hypothèse (audacieuse) que ce sont bien les travaux de Poincaré et de Borel qui ont été à l'origine de l'École de Brno des années trente – dans (1931a), Hostinský cite également von Kries (1886, 1926) pour son étude de la roulette, mais il s'agit vraisemblablement d'une référence tardive donnée après coup. Nous laisserons sans réponse convaincante la question de savoir quand et dans quelles circonstances Hostinský a lu et compris Borel et Poincaré, faute de documents. Hostinský a certainement lu très tôt Poincaré comme tout le monde. Il précise que c'est son collègue et ami, le philosophe K. Vorovka, professeur à Prague, qui l'a aidé à comprendre les idées de Poincaré sur le Calcul des probabilités, qui loin de s'opposer au déterminisme, permet de calculer, plus loin encore et avec une précision accrue, les conséquences ultimes des rassemblements complexes de causes comme celles des petites causes responsables de grands effets (1931a, 1935 p. 103) – voir aussi Vorovka (1913) et l'article nécrologique que Hostinský a écrit en 1929 à la mort de Vorovka (1929c).

Pour Borel dont la philosophie est quelque peu différente, il a bien fallu que ce soit Hostinský seul qui le lise et le comprenne, notamment ce passage des probabilités géométriques aux théories cinétiques qui ne va pas de soi et que Borel explique sur l'exemple des petites planètes dans son article de 1906 – Borel (1906, 1914b), Hostinský (1928c, 1931a, p. 11-13) – qui semble bien être l'un des points de départ de Hostinský dans toute cette affaire. Hostinský aurait pu assister au cours de probabilité de Borel à la Sorbonne en 1908-1909, à moins qu'il n'ait pas été à même d'en comprendre alors l'intérêt, fasciné qu'il devait être par Darboux et Poincaré, et qu'il n'ait commencé par lire, longtemps après, Castelnuovo qui en donne une recension fidèle et lumineuse (1919) – que Hostinský cite souvent, par exemple (1928c) – et finalement Borel lui-même, particulièrement on l'a dit (1914b) et bien sûr *Le Hasard* (1914a). Quoiqu'il en soit, la nouvelle mécanique probabilisée de Poincaré-Borel paraît faire partie du programme de Hostinský dès le milieu des années vingt et constitue sans doute la principale motivation de ses travaux en théorie des probabilités en chaîne. Lesquels vont débuter par un coup d'éclat qui va soudain hisser Hostinský au sommet des hiérarchies savantes, jusqu'au paradis du Collège de France et de la Sorbonne reconstruite, l'Institut Henri Poincaré.

Le 8 janvier 1928, les *Comptes rendus de l'Académie des sciences* publient une note de Hostinský, intitulée *Sur les probabilités relatives aux transformations répétées*, qui commence par l'avertissement suivant :

> « Le problème du battage des cartes proposé et résolu par Henri Poincaré a été récemment repris par Hadamard (1927b) qui a ramené la démonstration du théorème de Poincaré à un calcul de valeurs moyennes successives. Je me propose de montrer que l'analyse de M. Hadamard peut être appliquée à l'étude de problèmes plus généraux. »

La première généralisation de Hostinský peut surprendre ; elle consiste en effet en une définition générale des chaînes de Markov à nombre fini d'états, du moins ce qu'on appelle ainsi maintenant, ce qui prouve que ni Hostinský ni Hadamard qui a présenté sa note ne connaissent au début de l'année 1928 les travaux de Markov de 1907 ou du moins ne font le rapprochement entre le battage des cartes généralisé et les événements liés en chaîne de Markov. Hostinský affirme alors que la méthode des moyennes d'Hadamard (-Markov-Borel-etc.) s'applique sans changement si les probabilités de passer d'une « valeur » à une autre sont toutes (strictement) positives (note 8).

La seconde généralisation est, elle, absolument originale dans ce cadre là (en faisant abstraction des travaux de Bachelier et des physiciens, etc.). Il s'agit du passage à la « variable continue ». Soit M un point qui se meut sur le segment AB, par étapes successives. Partant d'une position x, on suppose que M se trouvera, en une étape, entre y et $y + dy$, avec probabilité $f(x, y)dy$ (note 9). Hostinský affirme que, sous des hypothèses très générales, au bout d'un très grand nombre d'étapes, le point M sera uniformément distribué sur AB, quelque soit son point de départ, version remarquable d'un principe ergodique probabiliste général. Hadamard reconnaît immédiatement l'importance de ce résultat puisqu'il joint à la note de Hostinský les « observations » suivantes :

> « Mon but, en présentant la démonstration dont parle M. Hostinský, était de permettre des progrès ultérieurs dans la voie d'une démonstration longuement cherchée celle du principe ergodique. Le travail qui précède semble montrer que ce but a été atteint au moins dans une certaine mesure et fait espérer que le premier résultat ainsi obtenu d'ores et déjà sera suivi d'autres analogues ».

Les autres résultats ne tardent pas en effet ; Hadamard présente dès le 23 janvier une note : *Sur les opérations itérées en calcul des Probabilité* (1928a), dans laquelle il aborde le problème général de Hostinský, celui pour lequel il n'y a plus nécessairement convergence vers une limite constante. Si $f(x,y)$ satisfait à de certaines conditions, la densité de passage en n « opérations » de x à y, $P^{(n)}(x,y)$, converge uniformément vers une fonction indépendante de x,$\varphi(y)$, *solution de l'équation intégrale homogène de seconde espèce*

$$\varphi(y) = \int_a^b \varphi(s)f(s,y)ds \qquad \text{(note 10).}$$

Les conditions énoncées par Hadamard, qui caractérisent dans ce nouveau contexte, le « cas ordinaire » de convergence des $P^{(n)}(x,y)$, sont associées aux solutions de l'équation de Fredholm homogène :

$$\phi(y) - \lambda \int_a^b \phi(s)f(s,y)ds = 0$$

qui est l'analogue de l'équation caractéristique considérée par Poincaré pour le battage des cartes (note 3), de sorte que, remarque Hadamard, « *nous sommes ramené, au fond, à la méthode primitive de Poincaré, dont je m'étais écarté dans ma note précédente* ». Le principe ergodique a lieu si l'équation n'a pas de racines de module 1 autre que 1 et si f ne s'annule pas sur un ensemble de mesure non nulle. Hadamard ne discute pas dans cette première note du cas singulier où précisément il y a trop de « valeurs caractéristiques » de module 1, ce sera la contribution la plus originale de sa communication au Congrès de Bologne en septembre 1928 (1931).

On ne s'étonnera pas particulièrement de ce que Hadamard fasse aussitôt observer (1928a), que la densité limite $\varphi(y)$ étant la solution de l'équation caractéristique associée à la valeur caractéristique 1, le fait qu'elle soit limite des densités de passage $P^{(n)}(x,y)$ est connue depuis longtemps en théorie des équations intégrales ; c'est la « méthode des substitutions successives » que l'on fait remonter à Liouville pour un noyau trigonométrique en 1837 et à Neumann (1870) – voir Locker, 2001 pour un historique et des références. Dans cette théorie les $P^{(n)}(x,y)$ s'appellent les « fonctions itérées » et l'on s'explique ainsi le titre de la note d'Hadamard qui conclut :

> « je me contenterai de signaler d'un mot que la méthode précédente se présente avec un degré de généralité suffisant pour permettre l'étude qui est en l'espèce notre but principal, celle du principe ergodique. La discussion de ce principe se trouvera ainsi ramenée aux équations intégrales, déjà introduites avec succès, comme on le sait, dans les théories cinétiques par M. Hilbert ».

Ainsi la note de Hostinský dont Hadamard ne fait ici que préciser les termes conduirait à la solution tant espérée de l'un des principaux problèmes des mathématiques du temps, le problème ergodique. En attendant, il permet de lier ensemble la si modeste théorie du battage des cartes et l'une des grandes théories mathématiques du début du siècle, la théorie des équations intégrales dont Volterra, Poincaré, Fredholm, Hilbert, Schmidt, Weyl, cent autres se sont emparés pour tenter de résoudre les équations de la physique mathématique, notamment l'équation de Boltzmann et qui peu à peu va constituer la théorie générale des opérations linéaires de l'analyse dont la richesse d'application et la généralité sont considérables – pour un historique de ces questions voir par exemple Dieudonné (1981). Il n'existe pas de théorie plus à la mode dans les universités du monde entier; des dizaines d'ouvrages célèbres lui sont consacrés dans toutes les langues mathématiques du temps, ceux de Bôcher (1909), Kneser (1911), Lalesco (1912), Fréchet, Heywood (1913), Goursat (1915), Courant, Hilbert (1924), Whittaker, Watson (1902-1927), etc.... Hostinský est l'occasion de cette rencontre, et tout va dorénavant aller très vite. Les mathématiques sont coutumières du fait, on y trouve à côté du développement lent et majestueux des théories en ordre de marche qui peu à peu conquièrent tout le territoire disponible, de ces irruptions soudaines qui bouleversent momentanément les idées reçues et les écoles en place et sont l'occasion de renouvellement et de progrès inattendus. La lumière cette fois ci est venue de Brno.

L'enthousiasme de Hadamard ne va durer que l'espace d'un printemps mais suffira à (re)lancer la théorie des probabilités en chaîne et d'ailleurs la théorie ergodique mathématique fondée dans le même temps. La semaine suivante, il présente une seconde note intitulée *Sur le principe ergodique*, dans laquelle il indique que tout système dynamique satisfaisant à la condition de réversibilité et au théorème de Liouville «*sur la conservation de l'extension en phases*» vérifie le principe ergodique de Hostinský, «*la distribution limite sera nécessairement celle dont la densité en phase est uniforme*», l'équation en λ ci-dessus ayant, comme seule solution, la constante 1. Le théorème de Hostinský peut donc s'interpréter également comme le premier résultat général assurant la validité du principe ergodique sous des conditions précises, quoiqu'il soit impossible d'en vérifier la validité pour un système mécanique un tant soit peu réaliste, même en faisant abstraction des chocs, comme le fait observer Hadamard dans sa communication de Bologne (1931), de sorte que les difficultés dynamiques demeurent le plus souvent hors d'atteinte. De plus, indique également Hadamard, si l'on se place dans le cadre de la mécanique classique où l'on part d'un point initial «*parfaitement déterminé*», les considérations probabilistes ne peuvent plus s'appliquer, à moins qu'on ne tourne la difficulté «*en suivant l'idée fondamentale que Poincaré a appliquée à la stabilité au sens de Poisson, c'est-à-dire en recherchant des résultats valables non plus partout mais presque partout.*» Le théorème de Hostinský peut être considéré comme un théorème ergodique en moyenne, le théorème «ponctuel» de Birkhoff ne sera démontré que trois ans plus tard. On pourrait s'inquiéter des affirmations quelque peu péremptoires de Hadamard concernant l'identité du théorème de Hostinský sur le battage des cartes en nombre continu et le problème ergodique de la mécanique qui s'intéresse aux trajectoires d'un système dynamique et énonce que ses cheminements remplissent sur le long terme (en moyenne ou ponctuellement) tout l'espace équitablement à bien peu près. En réalité Hadamard suit le même fil directeur depuis toujours et voit le battage des cartes probabiliste comme une métaphore particulièrement commode d'un système dynamique général – $x' = f(x,t)$ –, sa façon de traiter le battage des cartes en 1927 est dynamique, on l'a dit déjà, il suit les états «conséquents» du paquet de cartes. Le joueur en battant les cartes itère à chaque unité de temps une opération qui fait passer le paquet d'un état à un autre, de la même façon que l'équation du système (comme un joueur scrupuleux) itère de dt en dt une opération qui fait évoluer le système d'état en état le long de sa trajectoire. Et cette métaphore est mathématiquement correcte, il suffit d'adopter un cadre adéquat.

Il reste, en effet, pour établir une nouvelle théorie mathématique, la théorie ergodique, à poser convenablement la question ergodique « de manière qu'elle puisse être résolue » (comme dit Hadamard) et « *dans le langage approprié* » (comme dit Poincaré). Ce problème ne paraît pas avoir beaucoup intéressé Hadamard qui n'a pas même pris le temps de rédiger ses propres démonstrations ; sa communication au Congrès de Bologne ne fait que reprendre ses résultats de janvier 1928, en précisant la nature « périodique » du « cas singulier » ; la conférence de Hadamard n'est d'ailleurs parue qu'en 1931, mais Birkhoff et Kryloff et tous les autres y assistaient, il n'est pas impossible qu'elle ait été entendue. En France, André Weil, le plus brillant des jeunes mathématiciens du moment, qui va bientôt soutenir sa thèse, a compris aussitôt (en 1928) que les « transformations répétées » de Hostinský ou les « opérations itérées » de Hadamard peuvent être vues comme des itérés de transformations unitaires de l'espace fonctionnel de Hilbert et trouver là un langage et une théorie (spectrale) appropriés, (note 11), la chose est d'ailleurs déjà si implicite chez Hostinský et Hadamard qu'on ne peut en l'occurrence crier au génie. En effet, comme Hadamard (et comme Riesz avant eux [1918], et comme Fredholm lui-même quoique implicitement, dans le contexte des équations intégrales), Hostinský voit le noyau de transition $f(x, y)$ comme une transformation « *qui fait correspondre à toute fonction $g(x)$, une autre fonction $h(x)$* » donnée par la formule

$$h(x) = \int_a^b f(x, y) g(y) dy,$$

et « *représente une transformation fonctionnelle linéaire* » (Hostinský, 1928c, p. 11). Préciser que cette transformation est unitaire va de soi ; en revanche se placer dans l'espace de Hilbert des fonctions de carré sommable est hors de portée de Hostinský mais doit s'imposer à Weil avec une grande évidence. À partir de 1907 en effet, Fréchet, F. Riesz et E. Schmidt ont montré que la géométrie d'un tel espace est très analogue à celle de l'espace euclidien et Riesz et Fischer ont démontré que l'espace était complet, de sorte que la théorie était prête à l'emploi et n'avait plus qu'à se développer et se clore avec la théorie spectrale des opérateurs des espaces de Hilbert de von Neumann (*œuvres*) et Stone (1929-1932), dans le cadre abstrait dont la mécanique quantique abstraite de Dirac a besoin, (1930) – voir à ce sujet Dieudonné (1981) (note 12).

Les travaux non publiés de Weil seront publiés en 1931-1932 dans le cadre de la théorie des systèmes dynamiques par Koopman et von Neumann qui donne le premier théorème ergodique dynamique en moyenne (note 13). Le cadre des systèmes dynamiques permet d'ailleurs de traiter simultanément le cas ordinaire et le cas singulier, il est en effet naturel de considérer dans ce cas non pas les itérées elles mêmes mais leurs moyennes temporelles successives (temps moyen passé par la trajectoire dans une « région » de l'espace des phases) qui réduisent du même coup les périodicités éventuelles du cas singulier. La considération des moyennes de Cesàro permet, dans une certaine mesure, affirment Hadamard et Fréchet (1933, p. 96), de redonner au principe ergodique une généralité ébranlée au premier abord par la découverte du cas [singulier]. La seule hypothèse restante pour que ce principe ergodique « généralisé » soit valide est finalement que l'opération itérée par le système soit « ergodique » c'est-à-dire non décomposable, ($f(x,y)$ non nul dans le cadre de Hostinský), de sorte que le problème ergodique revient à déterminer quels systèmes vérifient effectivement l'hypothèse d'ergodicité, problème dont on ne semble pas avoir fait le tour. Sans que cela importe vraiment pour l'histoire que nous racontons, rappelons que les deux théories ergodiques, celle de Hostinský-Hadamard de 1928 et celle de Birkhoff-von Neumann de 1931 vont se trouver aussitôt réunies dans un même cadre, celui des « systèmes dynamiques abstraits », par Khinchin (1932) et Hopf (1932) ; ce cadre commun ne réduit évidemment pas l'une des théories à l'autre mais permet d'en délimiter au moins les parties et les articulations communes. Doob (1934) en déduira bientôt que la loi (forte) des grands nombres (abstraite) que vient d'établir Kolmogorov dans l'axiomatique que l'on sait (1933) est un corollaire simple du Théorème de Birkhoff-Khinchin ainsi conçu. De nombreux auteurs ont naturellement noté la quasi simultanéité d'apparition des deux axiomatiques, mécaniques et probabilistes, des années trente, systèmes dynamiques abstraits de Hopf, espaces de probabilité abstraits de Kolmogorov. Nous ignorons ce que Hadamard a pu penser du cadre « abstrait », il ne paraît pas s'être exprimé nettement à ce sujet. On peut toutefois imaginer qu'il n'en a pas été particulièrement impressionné (pas davantage en tout cas que Lévy). Sa dernière intervention officielle sur ces sujets est précisément « la » conférence qu'il prononce au Congrès de Bologne devant la section de mécanique, le 6 septembre 1928 (note 14), et une courte note cosignée en 1933 avec Fréchet (qui en est l'auteur principal) en l'honneur de Richard von Mises, dans laquelle il salue les résultats de Birkhoff-Koopman comme étant « *d'une importance fondamentale* », sans autres commentaires. Ce qui nous amène au paragraphe suivant. (Courage !).

9. Bologne et le battage des cartes

Quelques semaines après cet étonnant printemps ergodique, s'ouvre le Congrès international des mathématiciens de Bologne. Les sections III et IV, la mécanique et la probabiliste, vont s'en trouver bouleversés, on l'imagine volontiers.

Voyons la section IV, telle qu'on peut la reconstituer à partie des Actes publiés en 1832, alors que la théorie des « chaînes de Markov » est déjà un sujet relativement bien définie et important avec son flot régulier de publications (pour davantage de détails, biographiques notamment, on se reportera à l'annexe et aux notes ci-après.)

Commençons par le commencement. La conférence de Hostinský (1932c) porte naturellement sur les transformations itérées ; elle annonce son travail sur la théorie (continue) des sphères en rotation qui lui avait échappée en 1926. Utilisant la probabilisation des rotations de l'espace, proposée par Francis Perrin dans sa thèse sur les mouvements browniens de rotations soutenue en 1928, Hostinský peut enfin démontrer que si on lance une sphère arbitrairement sur un plan, la rotation devient uniforme à la limite (Hostinský, 1928d et 1929a). Villat présent à Bologne a aussitôt proposé à Hostinský de publier son résultat dans le *Journal de mathématiques pures et appliquées* qu'il dirige alors et de rédiger un fascicule du *Mémorial des Sciences mathématiques* sur l'ensemble de ses travaux. Ce sera (1931a), qui va jouer un rôle absolument déterminant dans le développement de la théorie des chaînes à Paris mais aussi à Moscou.

Paradoxalement la conférence de Romanovsky, l'un des futurs grands théoriciens des chaînes, ignore Markov et traite de la théorie anglo-allemande de la corrélation, ce qui tendrait à prouver que Romanovsky n'a découvert l'intérêt des « chaînes de Markov » qu'à Bologne et par l'intermédiaire de Hostinský. Le paradoxe n'est qu'apparent. Il n'est pas douteux en effet que Romanovsky ait étudié le traité de Markov dès sa parution en 1912. Mais on sait combien une lecture mathématique est conditionnée par l'état d'esprit du lecteur et de son temps, et qu'on y voit seulement ce qu'on veut bien y voir. Castelnuovo, qui s'est beaucoup inspiré des travaux de Chebyshev et ses élèves pour rédiger son très beau cours (1919/1928), ne signale les travaux de Markov sur les événements dépendants que tout à fait incidemment, renvoyant le lecteur au traité original de Markov sans lui consacrer ne serait-ce qu'un paragraphe. Quant à Keynes (1912), il ne fait qu'observer dans son compte-rendu du même traité de Markov qu'il ne contient rien de notablement nouveau mais qu'il est bien écrit et qu'il évite les erreurs habituelles à ce genre d'ouvrage.

La conférence de Pólya traite d'une caractérisation de la loi de Gauss (1932 et 1930, p. 118-132). Il est toutefois assuré que Pólya dut parler, hors conférences, de ses intéressants travaux sur les échanges de boules avec contagion, problème directement lié aux chaînes de Markov – c'est d'ailleurs Markov lui-même qui a introduit ce type de modèle (1907), (1917), (1918), comme exemple de probabilités liées en chaîne. Un élève de Pólya à l'École polytechnique de Zurich, F. Eggenberger, avait en effet considéré de tels schémas dans sa thèse, et les avait étudiés avec Pólya dans un bel article publié en 1923 dans la revue de von Mises, dans l'ignorance complète des travaux de Markov (et de Poincaré) – voir Eggenberger et Pólya, 1923 et 1928 – qui donne une interprétation des lois bêtas et gammas comme lois limites de schémas d'urnes, repris dans le livre de Feller (1950) – voir aussi Brillouin (1927a,b) qui traite indépendamment du même problème et Jordan (1927a). Il semble que ce soit Serge Bernstein qui ait alors informé Pólya de ses propres travaux sur les variables dépendantes et de ceux plus anciens encore de Markov – c'est du moins ce que Pólya indique dans ses conférences de l'IHP en mars 1929, (1930, p. 137). Ce serait donc vers 1925 que Pólya, dont la culture en analyse classique et moderne est très riche et l'intelligence brillante, se serait trouvé informé des travaux russes et, essentiellement parce qu'il en avait retrouvé une partie et qu'on l'en avait prévenu, de sorte qu'il était assez compréhensible qu'à son tour il tînt à informer Hadamard de la priorité de Markov pour la définition générale des chaînes (et de celle de Jentzsch (1912) dans l'étude des équations intégrales à noyaux positifs). En résumé les travaux de Markov ne paraissent avoir été vraiment lus et compris que par Bernstein qui les a enseignés à Kharkov dès avant la première guerre mondiale, et après lui par Slutsky qui les cite en 1925 (Chuprov et ses élèves ont naturellement lu Markov mais pour y trouver tout autre chose – voir Ondar, 1981) ; la tradition française les a ignorés jusqu'en 1928 et d'ailleurs ne les a pas lus davantage ensuite. Quant aux traditions allemande et anglaise il ne semble pas que leur éventuelle lecture de Markov ait en quoi que ce soit modifié le cours des événements. On peut alors se demander pourquoi, dès 1929, commence à se répandre la locution « chaîne de Markoff » qui sera très vite adoptée par Hostinský lui-même et tous les auteurs (sauf Fréchet qui s'en tient aux probabilités en chaîne par dépit de ne pouvoir imposer un nom français, Poincaré par exemple ou mieux encore Hadamard). Après une tentative discrète de Bernstein qui parle des « chaînes de A. Markoff » (1926, p.40), sans trop y prêter attention (un éponyme de quelque importance ne peut être muni d'un prénom ou d'une initiale de prénom), il semble bien que ce soit V. I. Romanovsky qui ait popularisé l'expression dans le titre de sa première note sur le sujet (Romanovsky, 1929). On comprend ses raisons : en 1929 les savants soviétiques, surtout s'ils s'occupent de statistique comme Romanovsky, doivent adopter un profil bas (Sheynin, 1998 et Blum, 1998, 2000). Il est préférable de passer de la « théorie de la corrélation » certainement contaminée par la science bourgeoise, aux « chaînes de Markov » authentiquement matérialistes, et slaves de surcroît, ce qui ne gâte rien. Pourquoi Hostinský s'est il rallié à Markoff ? D'abord par affinité mathématique et culturelle, Hostinský, une fois informé des travaux de Markov, les a lus et exposés dans son fascicule du *Mémorial* (1931a), mais certainement aussi contre les « autres », Pólya qui s'est vu crédité un peu rapidement des schémas d'urnes de Markoff, ou Mises qui semble s'approprier le sujet (1931), ou encore Bachelier, dont Hostinský pense le plus grand mal, qui lui non plus n'a jamais lu Markov et qui découvrira à la fin des années trente que ses « probabilités connexes » de 1906 s'appellent dorénavant « probabilités en chaînes » (Bachelier, 1938 p. 48-49 et 1939, p. VII). Le nom de Markov permettait au moins de ne vexer aucun des savants qui, indépendamment ou non de lui, avait refait le parcours des chaînes. Il existe certainement d'autres raisons dont nous ne dirons rien.

La conférence de Darmois (1929), nous l'avons dit, traite de l'analyse statistique des « *séries qui se développent dans le temps* ». Il est en cela un pionnier mais ne semble pas avoir poursuivi au-delà. Son texte écrit développé est publié dans la revue *Metron* en 1929. Darmois est le premier mathématicien français à parler de séries d'événements « *liés en chaîne* » suivant la terminologie de Markov, cette expression sera adoptée par Fréchet et ses élèves. Darmois lie les travaux de Markov aux études de corrélation développées par l'École de Karl Pearson dans la revue *Biometrika*, ce qui est une lecture possible de Markov – voir à ce sujet Ondar, (1981). Mais il est vraisemblable qu'il ait appris l'existence des travaux de Markov par Pólya de même que

Hadamard et Hostinský pendant le Congrès de Bologne. Darmois enseignera souvent les chaînes de Markov à l'ISUP ; c'est lui notamment qui semble avoir introduit Doeblin à ce sujet en 1935 et ne serait-ce que pour cela son nom méritait d'être rappelé ici.

Quant à la notion de « chaîne » elle-même, nous l'avons indiqué déjà, elle se trouve déjà présente dans les schémas de Daniel Bernoulli, de Laplace et chez d'innombrables auteurs du XIX^{e} siècle, Bienaymé bien sûr mais aussi Bruns (1906), de Forrest – voir Stigler (1978) –, Galton, Rayleigh, Pearson, Bachelier, ... , Poincaré et Markov. Et certains d'entre eux comme D. Bernoulli, Laplace, Poincaré, Markov, Ehrenfest mais aussi Agner Erlang (1878-1929) ont obtenu d'authentiques théorèmes ergodiques – sur les travaux remarquables d'Erlang dont nous n'aurons pas l'occasion de parler ici, voir Erlang (1909, 1917, 1928) et (Brockmeyer *et al.* (1948), particulièrement la contribution de A. Jensen. Ce qui ne contredit en aucune façon l'hypothèse selon laquelle tout est parti (ou reparti) de Brno, il s'agit d'une situation classique de percolation, si connue par ailleurs. Hostinský n'a pas donné son nom aux chaînes qu'il a tant aimées, et dont il est l'un des pères putatifs, mais il leur a donné l'impulsion décisive et en a été partout et toujours le propagandiste et le militant le plus enthousiaste, relayé par Fréchet et Moscou.

On pourrait également analyser le rôle singulier de Hostinský en utilisant la théorie ontogénique des théories de William James (1907, lecture VI), quoique ce type d'analyse soit excessivement rudimentaire. Selon James, une théorie passe par trois stades avant d'arriver à maturité (et être ainsi reçue, développée, enseignée et oubliée). Elle est d'abord jugée absurde, stupide et fausse (Boltzmann ou Bachelier en savent quelque chose). Dans un deuxième temps on estime qu'elle est vraie, sans doute, mais évidente et sans portée. Markov s'en serait il rendu compte? Lévy en tout cas le pensait en 1924 lorsqu'il a écrit son cours (1925). Si la théorie n'en est pas morte de dépit, elle peut atteindre le troisième stade, celui où elle est considérée comme si importante qu'on la trouve présente partout ou presque et que ses adversaires les plus résolus en revendiquent la paternité. En 1928 on reconnaît que la théorie ergodique des probabilités en chaîne est entrée dans la phase 3, à ce fait indéniable que les revendications de priorité se mettent à proliférer et qu'à défaut de revendiquer pour soi, pour mieux contrer d'autres revendications, on en appelle aux illustres ancêtres morts au champ d'honneur : Jentzsch pour les équations intégrales à noyaux positifs, Perron et Frobenius pour les matrices positives contre Hadamard et Poincaré, Urban pour la méthode des moyennes contre Hadamard, Markov contre Urban et Hostinský, Weil contre von Neumann, Pólya pour et contre tous, Borel oublié mais qui s'en moque, Bachelier qui n'a pas été prévenu, Lévy qui a tout fait tout seul mais ne le sait pas encore, Bernstein qui est déjà ailleurs, et d'autres qu'on eût sûrement mis en avant si on les avait lus (Erlang, Lundberg ...). Au point que plus personne n'y reconnaît rien si ce n'est que la théorie a maintenant tous ses quartiers de noblesse ou presque, même si on en ignore l'origine. C'est d'ailleurs un signe qui ne trompe pas et qui explique qu'on ait finalement opté pour Markov. On pourrait ainsi considérer que Hostinský, en forçant l'intérêt d'Hadamard (et de Fréchet), a accéléré de façon sensible l'accession de la théorie qui nous intéresse ici, à son statut de théorie. Pour la théorie des chaînes, la liberté est venue de Brno. Elle n'a plus eu ensuite qu'à vivre sa vie, (note 15). Il serait évidemment assez présomptueux de donner aux considérations approximatives qui précèdent suffisamment d'autorité pour emporter la conviction. Nous nous contenterons d'une seule preuve à ce point de notre exposé : la réaction de Paul Lévy aux travaux de Hadamard et Hostinský sur le battage des cartes généralisé telle qu'elle apparaît dans sa correspondance avec Fréchet (voir archives Fréchet de l'Académie des sciences, carton 2 et surtout Barbut *et al.* (à paraître) qui donne tous les détails). Nous avons rappelé déjà que Lévy traite dans son livre de 1925 du battage des cartes de Poincaré à sa façon et sans attribuer à sa contribution une originalité particulière. Il fallait, comme tout le monde, parler du battage des cartes depuis le traité de Poincaré de 1912. Lorsque trois ans plus tard Fréchet lui demande d'expliciter la formule géométrique donnée sans démonstration dans son livre, Lévy, après avoir tenté de redémontrer ladite formule par un calcul quelque peu embrouillé, répond à Fréchet dans une lettre datée du 3 novembre 1928 :

> « Je n'ai pas développé le calcul qui m'a paru aisé à reconstituer. Je croyais d'ailleurs me rappeler qu'il était dans Poincaré ; mais, d'après ce qu'Hadamard m'a dit depuis, j'ai dû me tromper. »
>
> « Ce calcul a été repris et développé depuis par Hostinský et Hadamard (C. R. 1928 1^{er} semestre) qui outre l'extension évidente au cas où les $\alpha_{i,j}$ varient d'un coup à l'autre, ont étudié le cas où p augmente indéfiniment. On a alors une formule du type
>
> $$f_{n+1}(t) = \int_0^1 f_n(t)\alpha_n(t)dt,\ \alpha_n \geqslant \mu \text{ et } \int \alpha_n dt = 1$$
>
> et on obtient de même la valeur constante de $f(t)$ suivant une loi exponentielle. M. Hadamard a développé ces circonstances et leurs applications physiques à Bologne, mais le synchronisme rigoureux de sa communication et de la mienne m'a empêché de l'entendre ».
>
> « Je ne retrouve pas la référence du Mémoire de Hostinský ; mais ses notes des C. R. vous montreront de quoi il s'agit. J'ajoute que cela ne m'a rien appris ; je savais tout cela quand j'ai fait mon livre et n'ai eu que le tort de ne pas le développer. Mais mon but n'était que de faire comprendre sur un cas particulier la tendance au nivellement déjà signalée, quoique peut-être d'une manière moins précise que Poincaré. »

En 1925, donc, un cas particulier suffit, lequel est d'ailleurs trivial, en 1928 Lévy considère qu'il connaissait déjà la théorie générale de Hostinský-Hadamard et qu'il n'a eu que le tort de ne pas la publier alors – on est en droit de douter des souvenirs rétrospectifs de Lévy dans ce cas précis comme dans la plupart des commentaires de cet illustre savant sur ses œuvres, sa bonne foi étant d'ailleurs assurée. En effet, la formule exponentielle, n'est facile que dans le cas réversible du battage des cartes, sinon, elle est généralement fausse comme Hadamard l'a fort bien montré dans sa conférence ergodique de Bologne, et elle est de toute façon loin d'être évidente lorsqu'elle se trouve être vraie, surtout dans le cas inhomogène que Lévy semble ici évoquer, voir à ce sujet Seneta (1973, 1981, 1996), quant au cas continu, la formule intégrale proposée dans cette lettre est visiblement erronée et montre simplement que Lévy ne sait plus alors ce dont il s'agit –. À une objection de Fréchet touchant la démonstration de sa formule exponentielle, Lévy apporte des compléments embarrassés et conclut dans une lettre datée du 9 novembre de la même année :

> « Je ne suis pas sûr d'avoir reconstitué ma démonstration de 1924-25. Je me dis qu'elle était peut-être encore plus simple. Je vous avoue avoir été surpris du petit effort qu'il m'a fallu pour retrouver le résultat. Je suis sûr d'être passé par $m_{n+1} \leqslant m_n(1-2\mu)$.
>
> Je n'ai ni avant ni après mon livre rien publié d'autre sur ce sujet.
>
> J'étais resté sur l'impression que je n'avais fait que répéter Poincaré, avec quelques modifications de détails, jusqu'à il y a 6 mois. À ce moment Hadamard m'a dit « Je viens seulement de découvrir ce que vous dites du battage des cartes ; vous dites que vous citez Poincaré, ce qui fait que j'ai passé la suite de ce paragraphe ; or Poincaré n'a rien fait de si simple.
>
> C'est par Hostinský que j'ai appris que j'avais fait du nouveau pour le battage des cartes.
>
> On attache en général trop d'importance à la priorité de tel ou tel détail. »

Cette dernière remarque est, on le sait, caractéristique de la phase 3. Lévy paraît en effet avoir attaché au détail dont il s'agit une importance suffisante pour y revenir à de nombreuses reprises par exemple dans son livre (1937) alors que personne ne lui en conteste la paternité, ni Fréchet, ni Hadamard, ni Hostinský qui pourtant ne l'ont lu dans Lévy qu'après l'avoir démontré pour leur compte. En revanche Lévy n'a pas participé aux développements remarquables de la théorie générale des chaînes dans les années trente, partage des tâches entre Fréchet et Lévy ou désintérêt ou difficultés à trouver son chemin dans le dédale des cas particuliers inattendus qu'il fallait alors envisager, et des pièges qu'il fallait éviter, qui le saura ? C'est Fréchet qui développera à Paris la théorie des chaînes et non Lévy dont les contributions originales à la théorie markovienne sont plus tardives. Elles datent du début des années cinquante et sont de grande importance – voir Lévy (1952, 1970) et Chung (1967).

On pourrait également examiner les lettres de Lévy à Fréchet du point de vue de la théorie cinétique des théories : à l'échelle de chacun des auteurs du temps se constitue une histoire individuelle de la théorie des chaînes, et l'histoire globale de cette même théorie, s'il en existe une, se développe, à de rares coïncidences près, indépendamment des détails et des détours de ces multiples histoires, dont l'intérêt n'est cependant pas le moindre. Et l'on sait depuis toujours qu'il en est ainsi de toute histoire. Fort heureusement, l'ensemble de la correspondance de Lévy à Fréchet, d'une extrême richesse, fait actuellement l'objet d'une remarquable édition critique par les soins de Marc Barbut, Bernard Locker et Laurent Mazliak, elle devrait paraître prochainement.

10. Conclusion

Le Congrès de Bologne pourrait donc marquer un début possible de l'établissement et de l'internationalisation de la théorie ergodique des probabilités en chaîne. Les principaux acteurs s'y trouvent pour la première fois rassemblés, on l'a dit, et y nouent des liens qu'ils entretiendront pendant les dix ans qui suivent par des contacts épistolaires réguliers et des échanges de publications. Il n'est guère douteux, en tout cas, que l'intérêt des Écoles de Paris et de Moscou pour la théorie markovienne date de Bologne et que Fréchet, Khinchin et Kolmogorov ont été initiés (de gré ou de force) par Hostinský qui a constamment correspondu avec eux. O. Litzman (1985) donne à ce sujet un extrait d'une lettre de Khinchin à Hostinský, datée du 21 novembre 1933 :

> «je profite de l'occasion pour vous remercier de l'envoi de votre joli travail qui m'intéresse grandement. Votre nom est prononcé presque à chaque séance du Séminaire de probabilités de Moscou.»

On s'étonne parfois que Kolmogorov ne cite dans ses célèbrissimes «*Fondements*» de 1933 aux côtés de von Mises (1931) et de Fréchet (1915), que le seul nom de Hostinský, mais c'est bien sûr le contraire qui eût été étonnant. Le premier grand mémoire de la théorie des processus de Markov, l'un des chefs d'œuvre de la théorie analytique des processus, commencé par Kolmogorov en 1929 et publié en 1931, est inspiré en grande partie de la théorie ergodique de Hostinský, le passage au temps continu étant probablement un autre emprunt bolognais, mais cette fois ci à Bachelier dont les actuaires et financiers présents à Bologne ont gardé le nom et les formules transmis in extremis à l'École de Khinchin et Kolmogorov (voir Koeppler, 1932). C'est également à Bologne que Hostinský rencontre Onicescu, fondateur de l'École roumaine de probabilités qui l'invitera à parler au Congrès des mathématiciens roumains de Turnu-Severin en mai 1932. Onicescu qui a suivi les cours de Castelnuovo en Italie développera avec l'aide de son élève Mihoc la théorie des chaînes à liaisons complètes, création authentiquement roumaine mais d'inspiration morave comme on l'imagine, à laquelle Fortet et Doeblin (1937b) vont contribuer de façon remarquable. Hostinský correspond dorénavant avec Khinchin, Kolmogorov, Krylov, Romanovsky et Slutsky en URSS, Popoff et Obrechkoff à Sofia, Ehrenfest à Leyde, et bien sûr Léon et Marcel Brillouin, Lévy, Fréchet, Hadamard et Borel à Paris, etc.. Les Publications de l'Université Masaryk sont diffusés aux quatre coins de l'Europe et avec elles la théorie des probabilités en chaîne qui va être accueillie aussitôt à l'Institut Henri Poincaré à peine inauguré, grâce à Maurice Fréchet, mais c'est une autre histoire.

Pour en revenir à la section IV du Congrès de Bologne et en finir avec cette promenade bolognaise, signalons qu'on y délibéra, sous la présidence de G. Darmois (sans doute mandaté par Borel), sur la formation d'un «Comité constitutif international pour le progrès du calcul des probabilités et de toutes ses applications» . Ce comité devait notamment étudier la création d'un Bulletin où seraient publiées dans un premier temps les contributions de la section IV de Bologne. Un «Comité provisoire» fut désigné dont les membres étaient, F. M. Urban, O. Onicescu, E. T. Gumbel, C. A. Dell'Agnola, B. de Finetti, S. D. Wicksell, E. C. Molina, G. Darmois, E. Slutsky, F. D. Cantelli, A. Khintchine, L. G. Du Pasquier, J. Neyman, A. Lomnicki, A. Gruzewski, C. Gini, C. Jordan, G. Pietra, K. G. Hagström, Y. Miura, V. Korinek. Nous ignorons si ce Comité s'est réuni après Bologne; la première manifestation internationale consacrée au calcul des probabilités et à ses applications est le Colloque de Genève d'octobre 1937, descendant direct de cette première mobilisation internationale pour le calcul des probabilités et ses applications. Le Colloque de Genève, présidé par Maurice Fréchet, est, on le sait, sans équivalent dans la première moitié du XX^e^ siècle mais son histoire nécessiterait un article complet double de celui-là.

On remarque que Hostinský ne figure pas dans la liste des membres du Comité provisoire pour la défense et l'illustration du calcul des probabilités. Les deux représentant tchèques sont Urban de Brünn et Korinek de l'École polytechnique (tchèque) de Prague. Hostinský est avant tout un physicien théoricien et non un probabiliste appliqué. L'actuariat est le domaine de Urban à qui Hostinský a dû céder sa place. On méditera un instant sur l'absence de l'École statistique anglaise à Bologne en général et au «Comité» en particulier, absence qui sera encore plus évidente au Congrès de Zurich quatre ans plus tard. Fisher est pourtant à Bologne, mais il considère sans doute que le calcul des probabilités n'est qu'un outil parmi d'autres et que de toute façon il n'a besoin de personne pour en développer ce qui est développable. L'École anglaise sortira quelque peu de son impériale réserve en 1929 lors du Congrès de l'IIS de Varsovie où elle est représentée par Neyman et Pearson pour la première fois réunis en public, (voir Reid, 1982, p. 86). Le Congrès de l'IIS avait lieu juste avant le premier Congrès des mathématiciens des Pays Slaves. Voilà d'autres débuts possibles! Ces retrouvailles académiques répétées, après quinze ans d'isolement relatif, associées au développement des bourses de recherche internationales, sont incontestablement à l'origine d'un renouvellement des disciplines traditionnelles et des hiérarchies établies (Siegmund-Schulze, 2001). Les Écoles polonaises et russes, la nouvelle École mathématique américaine ont bénéficié de cette nouvelle donne mathématique, et la statistique mathématique de langue anglaise est entrée en phase 3 en 1933, par la même occasion (Stigler, 1996). On pourrait naturellement en nommer les phases 1 et 2, mais on se trouve là aux limites de la théorie de James, et l'invoquer ici est de peu d'intérêt. Il est préférable de faire appel à la théorie phylogénique en usage; la statistique anglaise est en effet un exemple assez remarquable de sélection géographique (à partir d'espèces continentales), théorie viable et stable dans son milieu naturel mais difficilement exportable. Les congrès internationaux, les visites de boursiers (bessarabiens de préférence) et les tentatives d'acclimatation aux États-Unis, l'ont assez vite fait évoluer, par une série de croisements et de sélections convenables, vers un stade relativement international, la statistique mathématique de langue anglaise, résistante et prolifique, qui s'est d'ailleurs réimplantée le moment venu en Grande-Bretagne. L'âge d'or des Congrès « internationaux » de mathématiciens n'a pas survécu à la montée des périls, on le sait, mais il a marqué le premier demi-siècle mathématique. On peut difficilement écrire l'histoire du calcul des probabilités et de la statistique des années trente, sans rappeler la rencontre improbable à Bologne de Bernstein, Hostinský, Khinchin, Romanovsky, Slutsky, de Finetti, Lévy, Fréchet, Fisher, Neyman et tous les autres, rencontre exceptionnelle puisque deux ans plus tard les frontières de l'Est se refermeraient presque hermétiquement (à quelques très rares exceptions près, par exemple le Congrés international des mathématiciens d'Oslo en juillet 1936 où les soviétiques ne constituent pas une délégation officielle mais sont présents à titre privé et silencieux, on note parmi eux la présence d'Alexandrov, Khinchin, Kolmogorov, Bernstein et Krylov mais ni Slutsky ni Romanovsky ne sont là, et bientôt les grandes purges commenceront).

Notons pour terminer que la section IV adopta à l'unanimité la motion suivante sur la proposition de L.-G. Du Pasquier :

> « La section IV du huitième Congrès international des mathématiciens réuni à Bologne émet le vœu
>
> 1) que soient publiées les œuvres complètes de Bienaymé.
>
> 2) qu'une édition nouvelle soit faite de celles des œuvres de Cournot qui concernent la théorie des probabilités et ses applications. »

Aucun de ces vœux ni de ces projets bolognais ne vit le jour, semble-t-il, et on attend toujours la publication des œuvres complètes de Bienaymé. Borel n'avait pas la fibre historique. Ainsi, il dira (1907, p. 754) :

> « l'importance historique ne doit pas être confondue avec l'influence actuelle : nous avons des musées d'armures du moyen âge, mais notre ministre de la guerre n'y choisit pas ses modèles pour équiper nos soldats. »

Et tant pis pour Cournot et Bienaymé, qu'ils restent au musée!. Fréchet et Darmois un moment intéressés ont assez vite abandonné. La statistique mathématique du XX^{e} siècle s'est inventé d'autres parrains, Galton, Pearson et Fisher qui d'ailleurs en valent bien d'autres, et l'on oubliera Laplace, Bienaymé et Cournot et le Congrès de Bologne.

Notes

Note 1. Cournot ne dit pas autre chose, une intelligence supérieure pourrait calculer exactement les « chances de survie » d'un assuré mais elle ne pourrait pas décider de la date de son décès qui n'est fixée que par un concours imprévisible de causes indépendantes (par exemple une tuile tombée d'un toit), (Cournot, 1843/1984, p.60).

L'apport personnel de Poincaré se limite en somme à préciser que le décès dont il s'agit pourrait ne pas provenir d'un concours de causes indépendantes (Poincaré comme Borel – et comme Cournot – ne croit pas beaucoup à l'indépendance des causes), mais être dû plutôt à une cause imperceptible et létale (un virus nouveau ?)

ou au contraire à un concours extraordinairement complexe de causes enchevêtrées (mais Cournot déjà avait envisagé ce cas).

Il est très difficile d'innover sur ces sujets qui ont été tournés et retournés en tout sens depuis deux ou trois millénaires par les meilleurs esprits, mais il est plus difficile encore de modifier les habitudes de pensée de son temps et c'est en cela surtout que l'article de Poincaré est remarquable puisqu'il concourt de façon importante au changement des mentalités savantes du début du vingtième siècle.

La question de savoir si la position nouvelle adoptée par Poincaré est ou non compatible avec le déterminisme (absolu) a intéressé divers auteurs dans les années trente et quarante. La probabilisation est-elle pour Poincaré un pis-aller ou une nécessité rationnelle? Les deux positions sont défendables, et il paraît difficile de trancher à cet égard. Indiquons les réflexions de Vendryès (1942) analysées très finement dans (Fortet, 1942) qui pour sa part défend (contre Vendryès) une position subjectiviste proche de celle de Borel. Ces débats ne sont sans doute plus d'actualité, mais ils sont loin d'être clos. On pourrait résumer très sommairement les positions des acteurs de notre histoire, en déclarant plutôt « objectivistes » (le Hasard a ses raisons que la raison connaît parfois) Cournot, Bienaymé, Bertrand, Poincaré, Hadamard, Fréchet, Bernstein, l'École de Moscou... et plutôt « subjectivistes » (l'homme a ses raisons qui en valent bien d'autres) Condorcet, Laplace, Borel, Lévy, de Finetti, Savage,... On pourrait également subdiviser les mêmes savants en plutôt « déterministes » (il n'y a pas de hasard essentiel dans la Nature ou si peu!), Laplace, Gibbs, Borel, Poincaré, Rutherford, Planck, Einstein, Lévy etc, et assez « indéterministes » (le Hasard existe, je l'ai rencontré), Cournot, Born, de Finetti, Bohr, Schrödinger, Heisenberg, Eddington, Vendryès, Monod etc.... Nous ne développerons pas davantage ce point, sinon pour redire qu'enfermer la pensée de toute une vie savante en des catégories si tranchées est certainement discutable, à moins que les penseurs concernés ne le revendiquent explicitement, ce qui n'est pas particulièrement le cas de Poincaré ou de Borel pour qui le déterminisme absolu comme le hasard absolu sont de pures fictions abstraites dont la valeur pratique, philosophique et scientifique est toute relative – voir par exemple Aitken (1949). On pourrait ajouter avec Bachelard (1934, Introduction) que la métaphysique des savants est toujours à deux visages, conséquence psychologique inévitable de la double nature de la science. Seul le premier pas compte.

Les débats déterminisme-indéterminisme, nés de la publication du « principe d'incertitude de Heisenberg » en 1927, assoupis depuis longtemps, ont connu dans les années trente un succès considérable. Sans entrer dans le détail souvent savoureux des argumentations, nous renverrons au volume VII des Actes du Congrès de Philosophie de Paris (Bayer, 1937c); on remarque qu'aucun mathématicien intéressé par la Théorie des probabilités ne participe à ce débat qui se déroule entre physiciens, biologistes et philosophes. Curieusement Borel n'est jamais mentionné (sauf dans la conférence d'Étienne Souriau mais à contre sens), le principe d'incertitude pratique de Borel ne posait pas de problème philosophique en revanche le principe d'incertitude théorique de Heisenberg semblait en poser un malgré les remarques ironiques de l'Honorable Sir Herbert Samuel qui concluait que 1927 n'était pas une révolution mais un « *simple remous dans le fleuve de la pensée* ».

Quant aux débats objectif-subjectif, ils se sont éveillés sous la Monarchie de Juillet en réaction contre les excentricités laplaciennes, on se reportera au traité de Cournot (1843). Borel ne les a jamais pris au sérieux, par contre les statisticiens nouveaux de l'après- guerre se sont beaucoup battus sur ce thème avant qu'ils ne concluent un armistice sur la base des aphorismes de Samuel ou de Borel : la valeur pratique et philosophique du calcul des probabilités est incontestable, pour le reste on suivra le cours du fleuve en évitant autant que possible les remous et les tourbillons.

Note 2. Andrei Andreevich Markov (1856-1922) a sensiblement le même âge que Poincaré (1854-1912). C'est, avec A.M. Lyapunov (1857-1918), le plus célèbre disciple de Chebyshev en calcul des probabilités et son œuvre doit se comprendre dans la filiation de l'École de Saint-Pétersbourg : énoncer et démontrer en toute rigueur des théorèmes limites, des « lois des grands nombres » les plus générales possibles en vue de la critique des données d'observation (voir dans Ondar, 1981 le discours de Markov pour le bicentenaire de la parution de l'*Ars conjectandi*). Cette tradition est française pour l'essentiel mais Chebyshev le premier a su l'intégrer à l'analyse du dix-neuvième siècle, celle des séries dont il faut impérativement démontrer qu'elles convergent, si on veut les utiliser comme telles.

L'analyse des motivations et du contenu mathématique du premier mémoire de Markov sur les « quantités dépendantes » (1906), écrit en 1907, a été faite récemment de façon tout à fait convaincante par E. Seneta (1995), on s'y reportera; rappelons simplement que dans le paragraphe 2 de son article, Markov résout un problème un peu plus général que celui du battage de deux cartes. Markov étudie une chaîne (de Markov) à deux états 0 et 1, le cas de Poincaré de 1907 correspondant à la matrice de transition

$$\begin{pmatrix} p & q \\ q & p \end{pmatrix}.$$

Markov ne signale pas les cas d'exceptions au principe ergodique, pas plus que Poincaré en 1911. Voir aussi Sheynin (1989).

Note 3. Poincaré voit le battage des cartes comme une promenade aléatoire sur le groupe des permutations. Dans le cas de deux cartes, le problème est facile, il n'y a que deux permutations 12 et 21. Le gain au premier coup s'écrit $X = 1_{12} - 1_{21}$, et comme, pour gagner à la énième partie, les cartes doivent revenir à leur position initiale, il faut qu'au cours des n battements il y ait eu un nombre pair d'inversions, le gain s'exprime par le produit de n répliques indépendantes de X et l'on en déduit le résultat. La méthode de Poincaré est alors beaucoup plus rapide que toutes celles consistant à évaluer les probabilités de transition successives, à itérer la matrice

$$\begin{pmatrix} p & q \\ q & p \end{pmatrix}.$$

et à montrer qu'elles convergent géométriquement vers 1/2.

En revanche le raisonnement analogue pour trois cartes et au-delà, n'est pas si simple, quel peut être l'analogue de ces X à deux valeurs $+1$ et -1, qui se multiplient au fil de la promenade? L'intention que semble avoir Poincaré dès ce moment là est d'utiliser les travaux sur les représentations multiplicatives des groupes finis, les « nombres complexes » de Molien et Cartan, qu'il connaît assez bien puisqu'il en est l'initiateur (1884) et dont il vient de montrer la richesse dans un article de synthèse (1903) – pour un historique, voir Cartan (1908) et (1939) p. 36-38 –, sa façon même de rédiger l'indiquerait suffisamment. C'est en tout cas cette idée là que Poincaré développe au dernier chapitre : « questions diverses » de la deuxième édition de son *Calcul des probabilités* écrit à la fin de l'année 1911 (sortie le 24 octobre 1911, cette édition est datée de 1912; un nouveau tirage en a été fait en 1923).

Pour Poincaré une loi de probabilité P sur un groupe fini G (par exemple un sous-groupe de permutations de c cartes) est « représentée symboliquement » par un « nombre complexe » $\Sigma \mathrm{p_i e_i}$ où les e_i sont des « unités complexes » qui se multiplient suivant les règles de composition du groupe dont il s'agit ($e_i e_j = e_k$ si $g_i g_j = g_k$ dans G; pour une présentation de ces notions dans les termes actuels, voir par exemple (Serre, 1967) première partie). On peut imaginer d'ailleurs un joueur qui gagne l'unité e_i lorsque le battement g_i a été effectué, le nombre complexe associé à P est alors l'espérance du joueur et l'on trouve l'anticipation de telles représentations « multiplicatives » chez de Moivre dès le début du dix-huitième siècle.

Dans l'exemple du battage de deux cartes, le nombre complexe associé à la loi de probabilité P d'un battement est simplement $p - q$, celui de deux battements sera visiblement $(p-q)^2 = p^2 + q^2 - 2pq$ et ainsi de suite, au bout d'un grand nombre n de battements le nombre complexe sera $(p-q)^n$ et donc les deux probabilités (l'une affectée à l'unité complexe $+1$ et l'autre à -1) seront sensiblement égales, dès lors que p n'est ni 0 ni 1.

Écrit de la sorte, le raisonnement se généralise au cas du battage d'un nombre quelconque de cartes. Les habitudes du joueur déterminent une probabilité P sur un groupe G de permutations des cartes, on associe à P un nombre complexe noté également $\mathrm{P} = \Sigma \mathrm{p_i e_i}$, les indices i variant de 1 à r, l'ordre du groupe. Après deux battements, la distribution des cartes sera déterminée par une nouvelle loi de probabilité sur G dont le nombre complexe est clairement $P.P$ (qui représente l'espérance du joueur au deuxième battement) et ainsi de suite, il s'agit de montrer que si n est grand les coefficients des « unités complexes » associés à P_n (qui représentent les probabilités des r permutations après n battements) sont tous sensiblement égaux.

P définit une « substitution linéaire » sur l'ensemble des (hyper) nombres complexes (C^r), qui transforme $\mathrm{X} = \Sigma \mathrm{x_i e_i}$ en $P.X$, (sa matrice est formée de r lignes où figurent tous les p_i de telle sorte que chacun d'eux apparaissent exactement une fois dans chacune des r colonnes). Il s'agit de montrer que ses itérés P^n convergent vers l'opérateur moyenne arithmétique $\mathrm{P_0.X} = \overline{\mathrm{x}}.\Sigma \mathrm{e_i}$, défini par le nombre complexe associé à la probabilité uniforme, $\mathrm{P_0.X} = \frac{1}{\mathrm{r}}\Sigma \mathrm{e_i}$.

Pour cela Poincaré propose d'utiliser « l'équation caractéristique » de P introduite dans la théorie des nombres complexes par Élie Cartan (1897, 1898) – par analogie avec les travaux antérieurs de Frobenius et Cauchy – : $P.X = \omega.X$, dans laquelle ω est un nombre (complexe au sens ordinaire) inconnu et X un « nombre complexe » inconnu.

Poincaré montre fort justement que toutes les racines ω de cette équation sont de module plus petit que un et que 1 est toujours racine, éventuellement multiple.

Malencontreusement il ajoute qu'il ne peut pas y avoir de racine de module 1 autre que 1 (Poincaré, 1912, p. 307, bas de la page). Ce dernier point est une erreur manifeste puisque déjà dans le cas de deux cartes, si $p = 0$, les racines de l'équation caractéristique sont 1 et -1 (dans le cas de deux cartes, les solutions de l'équation caractéristique sont 1 et $p - q$). Cette inadvertance de Poincaré ne semble avoir été relevée pour la première fois que par J. Hadamard en 1927 (voir plus loin), ce qui permettrait de montrer que la théorie des chaînes de Poincaré a vraisemblablement été aussi peu lue que celle des chaînes de Markov et qu'il ne s'agit donc pas dans cette affaire d'une question de notoriété ou de nationalité mais simplement d'intérêt scientifique du moment.

Poincaré remarque que 1 est racine multiple si le joueur ne bat qu'à l'intérieur d'un sous-groupe du groupe des permutations mais il omet de rappeler le deuxième type de singularité, la « périodicité », qui se produit lorsque P est portée par une classe modulo un sous-groupe distingué, par exemple la classe des permutations impaires (comme dans le cas de deux cartes lorsque $p = 0$), et cette « singularité périodique » est précisément une de celles que Poincaré a envisagées en 1907 comme « trop simple » pour que soit « satisfait le principe ergodique » (c'est-à-dire la convergence vers un état stationnaire indépendant de l'état initial).

Quoiqu'il en soit, lorsque 1 est racine simple, les seuls nombres complexes satisfaisant $P.X = X$ sont précisément les homothétiques de P_0. Par conséquent si l'on admet qu'il n'y a pas d'autres racines de module un, et si l'on écrit la substitution P sous la forme de Jordan ; en itérant P, tous les ω^n sauf celui égal constamment à 1 tendent vers zéro et la convergence vers l'équiprobabilité s'en déduit, quelle que soit la composition initiale du paquet et les habitudes du joueur dès lors qu'elles sont assez mélangeantes (ou assez complexes) et démontre par la même occasion sur cet exemple si simple la force mathématique de Poincaré (qui « renvoie » en première ligne aux articles de Frobenius (1896), à ceux de Cartan (1898) et finalement au sien propre qui, dit-il, en fait la synthèse (1903), mais il ne cite pas en revanche les travaux de Perron (1907) et Frobenius (1908, 1909) sur les matrices à éléments positifs qui contiennent déjà une partie des résultats utilisés ici par Poincaré, ce qui permettrait d'avancer que la rédaction du battage des cartes est de 1907).

Cette démonstration par les « nombres complexes », inutilement sophistiquée pour un problème aussi élémentaire, est remarquablement puissante si on adopte le point de vue des opérateurs qui sera celui d'Hadamard et des théoriciens de ces questions dans les années trente parmi lesquels on doit compter Robert Fortet. Il est vraisemblable que c'est de cet exemple que Poincaré a tiré la locution « fonction caractéristique » qu'il adopte dans la nouvelle rédaction de son cours de probabilités pour désigner la transformée de Fourier d'une loi de probabilités. Il y a en effet une analogie complète entre le nombre complexe associé à une loi de probabilité sur un groupe fini non commutatif et la transformée de Fourier d'une loi sur la droite réelle additive, qu'il était naturel de nommer de la même façon. Le « caractéristique » des probabilistes viendrait par conséquent de Cauchy, Frobenius, Killing, Cartan et Poincaré, et aurait la même origine que l'équation caractéristique des « substitutions linéaires » !

Sur les développements récents concernant le problème du battage des cartes, voir Aldous et Diaconis (1986), Diaconis (1998). Pour ce qui concerne les marches aléatoires sur les groupes voir Guivarc'h (2000).

Note 4. La démonstration de Borel (1912) s'écrit ainsi. Notons $p_{n,i}$ la probabilité qu'au énième battement le jeu de cartes se trouve dans l'état i (il y a $r = c!$ états distincts pour un jeu de c cartes si les opérations élémentaires de battage effectuées par le joueur sont suffisamment abondantes pour engendrer toutes les permutations, sinon r est le cardinal d'un sous-groupe convenable). Notons α_{ik} la probabilité qu'en un battement le jeu passe de l'état i à l'état k, les battements étant réversibles :

$$\sum_i a_{ik} = \sum_k a_{ik} = 1.$$

Comme $p_{n+1,i} = \sum_k p_{n,k}a_{ki}$, il est visible qu'en notant P_n et p_n le maximum et le minimum des $p_{n,i}$, on a : $p_n \leqslant p_{n+1} \leqslant P_{n+1} \leqslant P_n$; les deux suites convergent donc respectivement vers p et P. Soit alors ν un nombre arbitrairement petit. Pour un n assez grand, $P_n \leqslant P + \nu$ et pour ce n là il existe deux états j et h tels que l'on ait simultanément $p_{n+1,j} = P_{n+1}$ et $p_{n,h} = p_n$, d'où :

$$P \leqslant p_{n+1,j} \leqslant (1 - a_{h,j})(P + h) + a_{h,j}p,$$

c'est-à-dire

$$a_{h,j}(P - p) \leqslant (1 - a_{h,j})h.$$

Si maintenant on suppose, comme Poincaré (et Markov), tous les α_{ik} non nuls, il en résulte que $P = p$: toutes les donnes sont équiprobables asymptotiquement.

Il est difficile de faire plus court pour une chaîne de Markov réversible à nombre fini d'états et Poincaré qui présenta la note de Borel le 2 janvier 1912 à l'Académie dut en convenir. Dans la même note, Borel propose une généralisation simple de sa méthode au cas plus général où une itérée de la matrice (α_{ik}) a tous ses éléments non nuls, et où la probabilité des opérations de battage varie avec le temps ; il indique enfin en prenant l'exemple de trois cartes qu'il existe des cas d'exception – pour l'énoncé d'une condition nécessaire et suffisante pour que le principe ergodique s'applique dans le cas du battage des cartes, voir Hadamard (1927b), Fréchet (1937), chapitre II, § II, « cas le plus régulier » et la note).

L'argument du rétrécissement de l'intervalle contenant les $p_{n,i}$ a été utilisé par de nombreux savants indépendamment les uns des autres, à commencer par Markov dès 1907, voir Hostinský (1931) pour les références. Hadamard, dans sa conférence de Bologne (1928b), l'attribue à Urban, (1923) qui, présent à Bologne, dut en revendiquer la paternité. Bologne on l'a dit déjà et on le dira encore, fut l'occasion des retrouvailles mathématiques internationales des « deux sciences » et de quelques autres.

Note 5. Conservons pour simplifier les notations de la note précédente et supposons tous les $\alpha_{i,j}$ non nuls. La seconde démonstration d'Hadamard consiste à écrire :

$$\begin{aligned} p_{n+1,k} - p_{n+1,i} &= \sum_j p_{1,j}\left(a_{j,k}^{(n)} - a_{j,i}^{(n)}\right) \\ &= \sum_j \left(p_{1,j} - p_1\right)\left(a_{j,k}^{(n)} - a_{j,i}^{(n)}\right) \leqslant (1 - rp_1)(P_n - p_n) \end{aligned}$$

D'où il résulte que $P_{n+1} - p_{n+1} \leqslant (1 - rp_1)^n (P_1 - p_1)$, c'est-à-dire la convergence géométrique vers zéro de la suite des intervalles contenant les probabilités $p_{n,i}$.

Cette démonstration s'étend immédiatement au cas où les $\alpha_{i,j}$ ne sont pas tous non nuls mais où, pour un rang n convenable (et par suite pour tous les rangs suivants), les $\alpha^{(n)}{}_{i,j}$ le sont.

Si quelque soit le nombre n de battages, la matrice $\alpha_{i,j}^{(n)}$ contient des éléments nuls (c'est-à-dire ici si pour tout n il y a des états de probabilité nulle), on se trouve dans le cas périodique décrit par Hadamard. Le problème est ainsi complètement résolu vingt ans après avoir été posé par Poincaré (et Hadamard). La chaîne du battage des cartes est ergodique (le principe ergodique s'applique comme on disait dans les années vingt, les probabilités d'un état tendent à s'uniformiser quelque soit l'état initial) ou bien alors elle est périodique comme dans le cas considéré par Poincaré en 1907 de deux cartes à battage alterné sûrement – voir aussi Fréchet (1938) et Doeblin (1938a).

Note 6. Pour une biographie de Serge Bernstein (1880-1968), on consultera Seneta (1982), Louanchi (1997) et les souvenirs de Neyman rapportés dans Reid (1982).

Bernstein était régulièrement invité à Paris où il a fait ses études universitaires et a soutenu, en juin 1904, une thèse remarquable résolvant le XIX^{e} problème de Hilbert (1904) – dans une seconde thèse soutenue à Saint-Pétersbourg en 1908, Bernstein résout également le XX^{e} problème de Hilbert). Ses travaux les plus importants sont publiés en français, aussi a-t-il été parfois considéré par les savants soviétiques comme trop français pour être vraiment des leurs (et par les savants français comme trop russe pour être de leur monde). L'œuvre mathématique de Bernstein, considérable, est notamment consacrée au problème de Dirichlet, au calcul des variations et à l'approximation des fonctions, domaine dans lequel ses contributions sont assez importantes pour fonder une école à part entière dans la tradition pétersbourgeoise de Chebyshev, l'École de théorie constructive des fonctions de Bernstein – voir à ce sujet les notes de A. P. Youchkévitch dans Louanchi (1997) et Butzer et Jongmans (1999). Bernstein paraît n'avoir guère été attiré par la théorie des ensembles et la théorie des fonctions de Borel-Baire-Lebesgue, recommandées volontiers par l'École de Moscou ; il a une prédilection particulière pour « les grands problèmes de l'analyse », ceux de Chebyshev, Weierstrass, Hilbert, Poincaré, Picard ou Hadamard. Sa thèse est d'ailleurs dédiée à Hilbert et Picard. Ceci pourrait expliquer que son axiomatique du calcul des probabilités, l'une des premières formulée explicitement, soit non-ensembliste (1917).

Bernstein enseigne à l'Université de Kharkov de 1908 à 1933. On sait combien la période révolutionnaire est difficile en Ukraine. Pour faire vivre sa famille, Bernstein doit travailler un moment comme statisticien et il enseigne très tôt le calcul des probabilités et la statistique. Son cours de probabilités, certainement le meilleur de ces années-là, a été publié en 1927 et a eu une grande influence en URSS, la quatrième édition publiée en 1946 fut censurée pour idéalisme mendélien. Bernstein, conduit au calcul des probabilités par les hasards de l'histoire et les nécessités de la vie, a compris très tôt le rôle que cette théorie pouvait jouer dans l'étude des phénomènes naturels. Déjà dans sa thèse de 1904, consacrée à la solution d'un problème difficile de la théorie des fonctions analytiques, Bernstein écrit très lucidement :

> « Il serait pourtant bien téméraire d'affirmer que nous nous trouvons en possession des symboles les mieux appropriés pour interpréter simplement les phénomènes de la nature. Il est au contraire beaucoup plus probable que bien des théories mathématiques aujourd'hui en estime ne seront admirées plus tard que comme des chefs d'œuvre historiques, et d'autres théories aussi belles et aussi parfaites, mais d'une application plus large, viendront les remplacer ».

Il semble bien que dès les années 1910, Bernstein ait eu la conviction que la théorie des probabilités pourrait être une de ces théories là, c'est en tout cas ce qu'il affirme dans une remarquable conférence (1927a) lue au congrès pan-russe des mathématiciens à Moscou le 28 avril 1927 :

> « la nouvelle étape du développement de la pensée scientifique se caractérise par la nécessité d'introduire les concepts de la théorie des probabilités dans la formulation des lois de la nature ».

Bernstein donne comme exemples la loi des vitesses de Maxwell, la loi de régression de Galton, les lois de Mendel (qui prouvent que la théorie de l'hérédité de Galton n'a pas l'universalité que lui attribue Pearson). Ces lois et d'autres permettent des prévisions pratiquement certaines par l'application du postulat des petites probabilités dont l'exemple des « singes » de Borel donne une parfaite illustration. La théorie des expériences dépendantes de Markov (et développée en premier lieu par Bernstein lui-même), fournit de surcroît un cadre plus général dans lequel les théorèmes classiques continuent d'être valides et Bernstein conclut que la théorie des probabilités représente une nouvelle synthèse de notre savoir en un « *système mathématique harmonieux* ». Ces idées sont reprises et amplifiées dans une des conférences plénières (1932) du Congrès international des mathématiciens de Zurich en 1932 qui joue un rôle particulièrement important dans l'histoire du calcul des probabilités des années trente. C'est dans cette conférence que Bernstein pose les principes qui selon lui fondent les applications des concepts probabilistes à la physique : le déterminisme absolu est une pure fiction que les théories mécanistes les plus déterminés n'approchent que de très loin. La réalité se laisse décrire plus volontiers par des « *schémas stochastiques* » que l'on peut concevoir idéalement de la sorte :

> « sous des conditions bien déterminées a, l'apparition d'un événement A n'est ni nécessaire, ni impossible et cependant le lien objectif entre les conditions a et l'événement aléatoire A est caractérisé d'une façon complète et univoque par une grandeur scalaire p, nommée probabilité de A ».

Ce point de vue n'a d'ailleurs rien de particulièrement nouveau, c'est celui adopté systématiquement par les probabilistes de l'École physique de Bernoulli-Laplace, Bienaymé par exemple, à ceci près que Bienaymé admet (implicitement) la prééminence des schémas déterministes, alors que Bernstein les considère comme dépassés et le plus souvent inadéquats. Fréchet et toute l'École de Moscou se rallieront à ce point de vue idéalement « *objectif* », qui diffère absolument des vues boréliennes sur l'indéterminations des conditions « a » et la subjectivité irréductible de la « probabilité de A ».

La plupart des schémas stochastiques de la physique sont complexes; l'indépendance n'y est plus, comme dans les jeux de hasard, une hypothèse naturelle. Bernstein explore divers aspects de la théorie générale des « *liaisons entre les grandeurs aléatoires* », équations différentielles stochastiques, équations de Chapman-Kolmogorov, chaînes de Markov finies et continues, chaînes réciproques, ... La théorie des probabilités dispose ainsi d'une « *immense variété de moyens* » pour rendre compte des phénomènes naturels. On se reportera à la thèse (en préparation) de Mustapha Louanchi pour l'étude détaillée de l'œuvre probabiliste de Bernstein. Pour ce qui nous concerne rappelons son article fondamental (1926) qui énonce un théorème central limite pour des variables « *presque indépendantes* », fondé sur un « *lemme fondamental* » (p. 21), qui inspira notamment la théorie des variables dépendantes de Lévy (1935b) et la théorie des chaînes de Doeblin (1938b).

Bernstein a été élu en 1929 membre actif de l'Académie des sciences de l'URSS (ce qui lui épargna après 1930 bien des désagréments). Attaché à l'Institut Steklov, il quitte Kharkov pour Léningrad en 1933 et rejoint Moscou en 1943.

Bernstein ne fut jamais conférencier Rockefeller de calcul des probabilités à l'Institut Henri Poincaré. Aucun savant russe d'ailleurs ne le fut; les frontières de l'URSS s'étaient refermées vers 1930 et pour très longtemps; on sait notamment par les archives Fréchet de l'Académie des sciences que Kolmogorov avait accepté à l'automne 1933 d'être boursier Rockefeller à l'IHP mais qu'il repoussa son projet d'un an pour finalement l'abandonner (volontairement ou non – voir Siegmund-Schulze (2001) –, il ne revint à Paris qu'en 1958. Invité au Colloque de Genève de 1937, ainsi que Glivenko, Kolmogorov, Romanovsky et Slutsky, Bernstein ne put assister aux séances, mais son mémoire (1938) sur les équations différentielles stochastiques, édité par Doeblin, joue un rôle important dans le développement de la théorie. Bernstein était un ami de Fréchet avec qui il a longtemps correspondu. Il eut le privilège rare et naguère envié d'être élu en 1955 associé étranger de l'Académie des sciences de Paris dont il était correspondant depuis 1928 sur un rapport très élogieux quoique partiel de Lebesgue (qui oublie le calcul des probabilités), publié dans (Louanchi 1997).

Richard von Mises (1883-1953) est l'auteur de la célèbre axiomatique des collectifs (1919), la seconde, après celle de Bernstein, à avoir donné au calcul des probabilités une assise mathématique moderne (où l'on s'oblige en principe à énoncer, dans l'ordre logique et le plus rigoureusement du monde, axiomes, définitions et théorèmes). La théorie des collectifs revue par divers savants est un thème récurrent des débats probabilistes de l'entre-deux-guerres ; c'est, on le sait, une axiomatique des « suites de nombres au hasard ». L'axiomatique de Bernstein, comme celle de Kolmogorov (1933) et toutes les axiomatiques implicites classiques sont pour leur part des axiomatiques « d'événements probabilisés » et ont fini par triompher (au moins provisoirement) après la guerre sous la forme que leur ont donnée Kolmogorov et Doob.

Pour Mises le « *lien objectif* » entre « *a* » et la « *probabilité de A* » dont se recommandent Bernstein et les autres est une fable plus proche des mythes solaires que de la science. Empiriste conséquent, il entend que le calcul des probabilités décrive et calcule la seule réalité empirique manifeste, cette succession fortuite des choses naturellement contingentes, qu'il s'agit de préciser à l'intérieur d'une axiomatique convenable (même si la simulation théorique parfaite d'une suite au hasard est moralement impossible), la probabilité se définit alors mathématiquement dans le cadre de cette axiomatique comme la limite des fréquence dans un « *collectif primordial* » , les théorèmes d'addition et de multiplication s'en déduisent et dès lors les « *deux lois des grands nombres* ». Et l'on peut considérer que sa tentative, la première connue, répond en partie à cet objectif qui sera repris par de nombreux auteurs, Copeland, Reichenbach, Tornier, Popper, Wald... et finalement Kolmogorov et Martin-Löf qui développeront après 1960 une approche algorithmique fini du même problème – voir par exemple Schnorr (1971), Kendall (1990) et Condorcet (1994). On se reportera aux fascicules du Colloque de Genève de 1937 – par exemple Mises, Feller, Wald (1938), Finetti (1939) – et surtout aux conférences Rockefeller de l'Institut Henri Poincaré de 1931 (Mises, 1932a) pour des précisions à ce sujet (voir aussi Ville (1939), Mises (1941) et Doob (1941). On trouve dans les archives Fréchet de l'Académie des sciences une intéressante lettre de Kolmogorov à Fréchet datée du 3 août 1939 sur les fondements du calcul des probabilités tels qu'ils ressortent selon lui des comptes-rendus du Colloque de Genève. Il existe trois axiomatiques possibles, l'axiomatique A des collectifs finis très grands avec constance approximative des fréquences, c'est la seule qui corresponde à l'expérience, mais elle n'est pas encore mathématisée (ce sera le but de la théorie de la complexité de Kolmogorov dans les années soixante), l'axiomatique B des collectifs infinis de Mises que Wald a rendu non contradictoire et qui est une idéalisation de A, enfin l'axiomatique C, la sienne, « *sa valeur pratique peut être déduite de la théorie approximative A d'une manière directe sans secours à B. C'est la voie qui semble la plus simple* », écrit-il, il suffit d'utiliser le principe des petites probabilités (de Borel-Cournot-Bernoulli...), c'est justement ce que Mises voulait éviter, le principe dont il s'agit étant aussi mythique que le lien objectif entre a et $P(A)$. Il est intéressant de noter que Kolmogorov reprend presque mot à mot sa classification des axiomatiques de 1939 dans son premier article sur ce qui deviendra sa théorie de la complexité (1963), ajoutant cette fois ci que l'axiomatique A qui n'était pas mathématisable en 1939 lui semble susceptible maintenant d'un exposition formelle rigoureuse. Ce qui témoigne chez Kolmogorov d'une grande suite dans les idées et d'une assez belle obstination mathématique – voir Kendall (1990, p. 40-45).

On trouve d'intéressants éléments sur la vie et l'œuvre de Richard von Mises dans Siegmund-Schulze (1993), Plato (1994), Brüning *et al.* (1998) qui donnent des bibliographies détaillées. Ingénieur, philosophe, mathématicien, le personnage est fascinant, à la fois juif, catholique, positiviste empiriste logique, nationaliste, antinazi, spécialiste de calcul des probabilités, de statistique, d'hydrodynamique, d'aéronautique (il est l'inventeur d'un profil d'aile original – Toussaint (1928), fondateur à l'Université de Berlin d'une importante école de mathématiques appliquées, philosophe des sciences lié aux Cercles de Vienne et de Berlin, grand connaisseur de l'œuvre poétique de Rilke, homme de haute culture parlant toutes les langues européennes, conférencier brillant, etc... Une biographie de Mises est en cours de préparation par Reinhard Siegmund-Schultze. Rappelons simplement que Mises a dirigé l'Institut de mathématiques appliquées de l'Université de Berlin de 1920 à 1933. Sans y être formellement contraint, il était ancien combattant, mais fortement incité par les événements et les hommes du temps, (Brüning *et al.* 1998), Mises accepte en 1933 la direction du nouvel Institut de mathématiques de l'Université d'Istanbul où se trouvent rassemblés plusieurs émigrés berlinois, notamment en mathématiques, Hilda Geiringer (1893-1973) qui deviendra sa femme, Wilhelm Prager (1903-1980) et en philosophie Hans Reichenbach (1891-1953) ; tous rejoindront les États-Unis à partir de 1939. Richard von Mises est professeur à Harvard University de 1944 à sa mort. Il avait soutenu en 1908 une habilitation en hydrodynamique à l'Université allemande de Brünn (Brno) et avait été nommé professeur à l'Université allemande de Strasbourg en 1909.

Pour notre propos, nous ne considérerons que le traité de Mises de 1931 présentant sa théorie algébrique des chaînes à nombre fini d'états dont on trouve les principes et les résultats principaux dans ses conférences (1932a) de l'IHP de novembre 1931. Les motivations de Mises, comme celles de Borel (et de Bernstein *a posteriori*), viennent de la nouvelle physique statistique qui semble dénier à la théorie mécanique le droit d'intervenir dans ce qui touche à l'infiniment petit. La théorie ordinaire des probabilités ne peut non plus s'appliquer telle quelle à la physique, il est en effet « *inadmissible de considérer les états successifs d'un système physique comme des épreuves indépendantes* ». La théorie des événements en chaîne, assez connue depuis les exposés du Congrès de Bologne, peut seule convenir. Mises toutefois n'était pas présent à Bologne et les Actes du Congrès ont paru après la parution de son traité de 1931 où d'ailleurs il ne cite ni Hadamard ni Poincaré, mais il est avéré que Mises et Hostinský se sont rencontrés à Prague en 1929 et que la théorie des chaînes est au début des années trente dans tous les esprits. On imagine assez que Mises professeur à l'Université de Berlin, l'université de G. Frobenius (1849-1917), I. Schur (1875-1941) et leurs élèves, n'eut aucune difficulté réelle à traiter complètement le cas des chaînes finies indépendamment des travaux russes, tchèques et français en utilisant la théorie berlinoise des matrices positives de Perron et Frobenius, (voir aussi Plato, 1994). C'est très vraisemblablement Richard von Mises qui le premier a exposé dans l'amphithéâtre Darboux de l'IHP les résultats de Frobenius (1912) en leur donnant leur interprétation probabiliste concrète, (notamment celle des matrices indécomposables et en cela il anticipe Kolmogorov et Doeblin), et en se servant librement des notations matricielles que Fréchet n'emploiera cependant pas dans son traité de 1938 (ni d'ailleurs dans ses travaux) parce que, explique-t-il dans la préface de la deuxième édition de son livre (1952) :

> « d'abord et surtout cette notation était à cette époque à peu près inconnue des statisticiens. Même à l'heure actuelle, elle n'est pas exigée des candidats à l'agrégation des sciences mathématiques.
>
> Une autre raison, c'est que la théorie des matrices n'est pas une panacée ... »,

réponse tardive aux remarques assassines égrenées par André Weil au long de son intéressant compte rendu de la première édition du livre dont il s'agit (Weil, 1939). Rappelons qu'André Weil (1906-1998), l'un des mathématiciens les plus influents du vingtième siècle, paraît avoir eu l'intention vers la fin des années trente d'algébriser suffisamment la théorie des probabilités pour lui donner sa forme bourbachique définitive (Weil, 1940b), sa tentative fut interrompue par la guerre (au cours de laquelle Weil semble s'être voué à la géométrie algébrique et la théorie des nombres) et n'eut pour seul résultat tangible (outre celui d'avoir inutilement peiné Fréchet) d'exclure progressivement du choix bourbachique la « *mesure abstraite* » et du même coup toute la théorie moderne des probabilités au moment précis où cette dernière s'imposait comme une discipline mathématique à part entière, ce qui ne fut pas sans conséquences sur le développement des probabilités et statistique françaises de l'après-guerre (et sur le destin contingent de Bourbaki pourtant doté par ses créateurs de tous les attributs de l'intemporalité). Le paradoxe ou l'ironie de cette histoire cruelle, réside en ce qu'en l'occurrence il s'agisse d'un dialogue de sourds, Weil ne comprenant pas que ce que Fréchet ne comprenait pas, ce n'était pas la théorie algébrique des matrices (même s'il y faisait parfois preuve de maladresses vénielles) mais précisément que pour comprendre en profondeur la théorie des chaînes il convenait d'oublier parfois le calcul matriciel pour exploiter en toute liberté la méthode des chemins conséquents d'Hadamard-Kolmogorov- Doeblin, c'est à dire comme l'écrit Chung : regarder comment s'effectue le «*passage from one state to another rather than multiply stupid matrix*», et notamment s'intéresser aux premiers passages mentionnés plus haut (note précédente) :

$$p_{ij}^{(n)} = \sum_{k=1}^{n} f_{ij}^{(k)} p_{jj}^{(n-k)}$$

formule assez peu linéaire et cependant brillamment exploitée par Kolmogorov (1936b) et Doeblin (1938c), dont Fréchet comme Weil paraissent avoir méconnu l'intérêt – Weil a-t-il connu Doeblin à Paris ? Il est difficile de le savoir, Weil suivant Hadamard s'est intéressé au problème ergodique et donc aux chaînes de Markov dès la fin des années vingt ; on sait aussi par la correspondance Fréchet-Hostinský qu'André Weil a rencontré Hostinský au Congrès de Zurich en 1932 et qu'ils ont parlé de ces questions. Weil aurait pu entrer en relation avec Doeblin en 1937 ou 1938 lors d'un séminaire Hadamard, notamment celui du vendredi 11 mars 1938 au cours duquel Doeblin présenta la théorie de l'équation de Chapman qu'il développait alors, mais rien ne l'indique avec certitude et nous nous écartons trop du sujet de cette note.

Bernstein et Mises sont des savants si exceptionnels qu'il faudrait étendre la note (6) au-delà de toute limite raisonnable, nous n'en dirons par conséquent rien de plus ici (non sans regrets). Notons toutefois que Bernstein et Mises, différents à peu près à tous les égards, hormis l'originalité et l'élégance, se trouvent réunis (avec Hans Reichenbach, Maurice Fréchet et bien d'autres) dès 1938 et pendant toute l'Occupation dans le comité de direction des *Actualités scientifiques et industrielles*, série créée par Enrique Freymann, attaché culturel à l'Ambassade du Mexique, directeur de la librairie Hermann. Freymann avait épousé la fille d'Arthur Hermann, fondateur de la Librairie Scientifique Hermann, et lui qui est juif protégé par son passeport diplomatique, voit là sans doute un moyen de narguer la censure allemande – voir par exemple Servien (1941, 1942), Queneau (1963), Weil (1991), Schwartz (1997). Il ne semble d'ailleurs pas que Bernstein et Mises aient contribué en quoi que ce soit à la série de Freymann, commencée en 1929 par la publication de conférences ou de courts exposés sur l'actualité scientifique (voir Sainte-Laguë (1932) et peu à peu devenue une des principales collections d'ouvrages scientifiques en langue française, qui accueillit notamment le groupe Bourbaki et les auteurs les plus divers jusqu'à comprendre plus de 1 400 titres et continuer d'exister à ce jour (Bouleau, 1999). La librairie Hermann a été fondée en 1877 rue de la Sorbonne par Arthur Hermann, (ENS 1859), professeur de mathématiques; son activité d'édition a commencé au début des années 1880 par la vente à prix réduit du cours lithographié d'Hermite à la Sorbonne, puis la publication de cours de Sorbonne à des prix accessibles aux étudiants. Hermann a été le gérant pour la France des *Acta mathematica* de Mittag-Leffler dès leur création en 1882, dont les premiers numéros ont été en partie consacrés à la traduction en français d'importants mémoires allemands, notamment ceux de Cantor traduits par l'abbé Dargent et Paul Appell, (voir à ce sujet la correspondance d'Hermite, (1984), et l'on sait que les jeunes normaliens à l'exemple de Borel en firent leur lecture favorite et que le monde mathématique français en fut changé. Les éditions Hermann ont joué un rôle important dans la renaissance des écoles mathématiques françaises après 1870 et après 1940, en marge des éditions Gauthier-Villars, plus académiques et plus luxueuses. L'histoire des éditions Hermann, reprises en 1956 par Pierre Berès, reste à faire, comme d'ailleurs celle des éditions Gauthier-Villars.

Note 7. Bohuslav Hostinský est né le 5 décembre 1884 à Prague où son père Otakar Hostinský (1847-1910) est professeur d'esthétique et de musicologie à l'Université tchèque. C'est un ami et le premier biographe de B. Smetana (1824-1884). C'est aussi un collègue de T. Masaryk et un représentant éclairé de la nouvelle culture nationale tchèque. Bohuslav fait des études de mathématiques et de physique à l'Université tchèque de Prague où il travaille sous la direction des géomètres Karel Petr (1868-1950), Jan Sobotka (1862-1931) et du physicien F. Kolacek (1851-1913). Il soutient une thèse de géométrie en 1907 et une habilitation en 1912, année où il participe au Congrès international de mathématiciens de Cambridge. Il est maître de conférences de mathématiques pures à l'Université tchèque de Prague de 1912 à 1920, date à laquelle il est nommé, on l'a dit, professeur de physique théorique à l'Université Masaryk de Brno où il crée un Institut de physique théorique. Il est invité à parler au Séminaire Hadamard en 1929 et surtout il est deux fois conférencier à l'IHP, en 1930-1931 et en 1936. En janvier 1937, une grande réception est organisée au Ministère français des affaires étrangères en l'honneur de Niels Bohr (1885-1962), Torsten Carleman (1892-1949) et Bohuslav Hostinský, tous trois conférenciers invités à l'IHP, en présence des ambassadeurs et ministres concernés, des représentants de l'Université, de l'Institut et du Collège de France – voir Litzman (1985) qui cite le journal *Le Temps* du 19 janvier 1937. On imagine assez ce qu'ont pu se dire Bohr et Hostinský d'une part, Carleman et Hostinský d'autre part opposés qu'ils étaient sur tous les sujets possibles à commencer par la théorie ergodique et le déterminisme probabilisé. Hostinský est fêté, célébré, décoré, au nom de l'amitié éternelle franco-tchécoslovaque. Il est encore invité en octobre 1937 au Colloque de Genève, le premier colloque international entièrement consacré au calcul des probabilités et ses applications, mais c'est déjà la fin du conte de fée ergodique. Après Munich en septembre 1938, la Bohème-Moravie est occupée par l'armée allemande en mars 1939, l'Université tchèque de Brno est fermée et la vie de B. Hostinský comme celle de la majorité de ses compatriotes de langue tchèque se dégrade progressivement. On sait peu de chose sur lui, sa correspondance avec Fréchet, qui se poursuit pendant toute la guerre est purement mathématique et probablement peu fiable ; il continue à faire des comptes-rendus pour le *Zentralblatt*, en particulier ceux des travaux probabilistes français, il a conservé sa position à l'Université allemande de Brno comme la plupart de ses collègues, Cech et Boruvka notamment. On sait que les publications qu'il dirige sont supprimées et que beaucoup de ses collègues et de ses élèves sont déportés dont certains ne reviendront pas, notamment le plus brillant d'entre eux, le topologue B. Pospisil (1912-1944) – (Sur lui, voir Cech (1947)] et Boruvka *et al.* (1969), 204-212, Cohn (1993). Hostinský paraît alors avoir abandonné la théorie des événements en chaîne qui de toutes façons est devenue d'une difficulté mathématique hors de portée – voir Boruvka *et al.* (1969, 218-223) et Beránek (1984). Il revient à ses passions de jeunesse avec beaucoup d'ardeur ; il réédite son traité de géométrie infinitésimale et se livre à des travaux de physique mathématique, particulièrement d'acoustique théorique qu'il publie en allemand dans les mémoires germanisés de l'Académie bohémienne des sciences qui continuent de paraître sous protectorat allemand. Les universitaires polonais et ukrainiens n'ont pas connu de tels égards de la part des nazis qui en massacrèrent un grand nombre après avoir fermé tous les établissements d'enseignement supérieur. Il y aurait lieu d'étudier plus en détail cette période difficile à imaginer en l'absence d'archives disponibles. À la libération de la Tchécoslovaquie en 1945, Hostinský retrouve sa position à l'Université Masaryk reconstituée dans une ville au trois quart détruite par les bombardements, il est de nouveau doyen de la Faculté des sciences en 1945 et « prodoyen » en 1946. Il participe au Congrès de la Victoire de l'AFAS à Paris en octobre 1945 et à l'Assemblée générale de l'Union internationale de Mécanique théorique et appliquée à Paris en 1946. Il semble perdre de son influence après la prise du pouvoir par les communistes en 1948, sous réserve de documents nouveaux et réalistes sur ce sujet. Hostinský est toutefois invité à donner une conférence générale sur la théorie des chaînes de Markov lors du Congrès des mathématiciens tchécoslovaques et polonais, réuni à Prague en septembre 1949 (voir Hostinský, 1949), qui démontre qu'il continue de se tenir au courant des publications récentes, sans qu'il soit possible de déterminer jusqu'à quel point il les lit vraiment. C'est Hostinský qui aidera une fois encore Fréchet à composer la bibliographie complémentaire de la seconde édition de son livre sur les chaînes qui paraît en 1952, notamment en lui signalant les intéressants travaux du mathématicien ouzbek

Tashmukhamed Alievich Sarymsakov – sur lui, voir Seneta (1981). Hostinský a la passion des bibliographies exhaustives, qu'il établit avec le soin vigilant d'un collectionneur.

B. Hostinský est mort à Brno le 12 avril 1951, à 66 ans, il était officier de la Légion d'Honneur, membre de la SMF depuis 1921, de la SFP, de l'AFAS etc.. Les dernières années de sa vie ont été pénibles et il en était visiblement très affecté. Dans ses lettres à Fréchet de 1950 et 1951, Hostinský se plaint surtout de sa santé qui se dégrade sérieusement. Il semble souffrir d'une maladie des reins pour laquelle il se soigne à Marienbad pendant l'été 1950 où, écrit-il, il a rencontré plusieurs savants anglais et français. Ses lettres sont toujours aussi enthousiastes dès qu'il parle de science. Il s'intéresse à mille sujets, notamment à la turbulence et toujours à l'application du principe ergodique probabiliste à la physique. Fréchet qui est conscient de la dette que la France mathématique a contractée à son égard, l'invite en 1950 à faire une nouvelle série de conférences à l'Institut Henri Poincaré. Après divers contretemps, le programme en est fixé et l'invitation officielle envoyée à Brno pour le printemps 1951, mais Hostinský ne peut donner suite, l'autorisation de sortie du territoire lui ayant été refusée (lettre du 1/3/1951, Fréchet carton 8, Archives de l'Académie des sciences). Hostinský avait prévu d'exposer à Paris sa « théorie nouvelle du rayonnement noir » , basée sur l'hypothèse d'un éther discontinu, par analogie avec la corde de Lagrange assimilable à une suite finie de petites masses ponctuelles. Cette dernière théorie, fort ingénieuse, mais assez anticonformiste, aurait sans doute étonné l'auditoire (vraisemblablement clairsemé) de l'amphithéâtre Darboux.

Hostinský, qui avait tant cru au génie français et à la théorie des probabilités en chaîne, et qui avait été trahi par l'un et par l'autre, après être monté au sommet de la considération savante était redescendu si bas qu'on hésiterait dorénavant à prononcer son nom et qu'on finirait par l'oublier, destin à l'image de celui de l'Europe centrale de l'entre-deux-guerres et du génie français, avec ce côté légèrement dérisoire qui fait de cette histoire une comédie nostalgique dont il est loisible de rire ou de pleurer.

Des collègues tchèques de Hostinský nous ne savons que ce qu'en disent les éditions successives du dictionnaire Poggendorff, assez peu loquaces à ce sujet, ou les célébrations d'anniversaires publiées régulièrement dans le journal tchèque de mathématiques qui a succédé au Casopis en 1951, genre littéraire édifiant, très apprécié en URSS, dont il est toutefois difficile de pénétrer les allusions et les sous-entendus. Bohumil Bydzovsky est né en 1880, géomètre, élève de K. Petr, il a soutenu sa thèse à Prague en 1903 et a été professeur à l'Université tchèque de Prague de 1919 à 1957. Le physicien théoricien F. Záviska est mort en déportation d'après le journal tchèque de physique (1, 1952). On sait bien sûr que le physicien mathématicien Vaclav Hlavaty (1894-1969), professeur à Prague, a fait une carrière internationale de premier plan. Pour Emil Schönbaum, professeur de calcul des probabilités à Prague, on se reportera à l'Annexe.

Après le départ de Cech pour Prague et la mort de Hostinský, le géomètre Otakar Boruvka (1899-1979), boursier Rockefeller à Paris en 1929, présent à Bologne, paraît avoir joué un rôle important à l'Université Masaryk bientôt rebaptisée Université J. E. Purkinje, du nom du grand anatomiste tchèque, premier directeur de l'Institut allemand de physiologie de Breslau (1787-1869), qui a terminé sa carrière à l'Université (allemande) de Prague où ont enseigné notamment B. Bolzano (1781-1848), E. Czuber (1851-1925), A. Einstein et bien d'autres. Boruvka, qui a étudié la géométrie avec Élie Cartan à Paris et Wilhelm Blaschke à Hambourg, a été professeur de mathématiques à l'Université de Brno de 1934 à 1959 ; il était membre de la nouvelle Académie tchèque des sciences et titulaire de nombreux prix et titres officiels. Sur son œuvre on se reportera au volume commémorant le cinquantenaire de l'Université de Brno (Boruvka *et al.*, 1969) dont les dithyrambes inquiètent parfois.

En ce qui concerne les élèves et assistants de Hostinský, outre Pospisil dont nous avons parlé, nous connaissons Josef Kaucky né en 1895, qui a soutenu sa thèse à Prague en 1919 et fait toute sa carrière à Brno, d'abord comme assistant de Hostinský de 1931 à 1937 puis comme professeur de 1938 à 1945. Il est ensuite professeur à Bratislava et de nouveau à Brno en 1951 à l'École polytechnique. Kaucky qui a participé à l'épopée tchèque des événements en chaînes au début des années trente a eu un parcours parallèle de celui de Hostinský à dix années d'intervalle : géométrie et physique mathématique, le renouveau culturel de Brno et le reflux. Il s'est intéressé à la fin de sa vie à la combinatoire (voir Comtet, 1970, pour des références). Nous n'avons trouvé aucun élément d'information sur Miroslav Konecny qui a publié sur les chaînes de Markov au début des années trente à Brno, il semble qu'il ait fait une carrière dans l'enseignement secondaire de sa ville. Sur Jiry Beránek qui a étudié la théorie statistique de la turbulence avec Hostinský juste après la guerre et qui se trouvait à Paris en 1948, nous imaginons qu'il a dû travailler à l'Université de Brno puisqu'il est l'un des rédacteurs pour la physique du volume commémoratif de Brno en 1969. Nous ne savons que peu de choses de Jan Potocek qui en 1934-1935 étudia, avec Hostinský et indépendamment de Kolmogorov, les chaînes de Markov inverses (1935). Emprisonné un an pendant la guerre, il a été nommé maître de conférences à Brno en 1945 et a dû faire une longue carrière dans l'enseignement supérieur tchèque. Il avait deux frères; l'un, assistant à l'École polytechnique de Brno, est mort à Auschwitz, le second a épousé la fille de B. Hostinský, qui entretenait régulièrement Fréchet du nombre de ses petits enfants. Ce dernier en avait lui-même un fort grand nombre dont il s'occupait activement surtout depuis le décès de sa femme, renversée par un camion américain à la Libération (on trouve dans la correspondance de Fréchet des lettres de Feller, Gumbel, Ghaffari, ... répondant à des demandes de colis d'alimentation et de laine pour les petits enfants Fréchet). Hostinský est venu à Paris très régulièrement de 1929 à 1938, il est reçu chez Brillouin, Langevin, Perrin et surtout Fréchet avec qui il entretient des relations d'amitié fidèle. Maurice Fréchet faisait partie de la délégation française au Congrès de Prague en septembre 1934. Lors de la cérémonie de clôture du Congrès, après avoir rappelé les liens traditionnels et réciproques qui unissent la France aux pays d'Europe centrale, Fréchet cite en exemple sa collaboration avec Hostinský :

> « Je me bornerai à me féliciter à un point de vue personnel du profit que j'ai tiré des relations scientifiques que j'entretiens depuis plusieurs années avec l'un des vôtres, M. Hostinský. Sa richesse d'idées et son ardeur communicative m'ont attaché depuis plusieurs années à la belle théorie des probabilités en chaîne qui touche à tant de domaines de la mathématique et de la physique. » (*Comptes-rendus du deuxième Congrès des mathématiciens des pays slaves*, séance de clôture).

Pour d'autres précisions, on consultera la notice nécrologique que lui a consacrée son dernier assistant de l'Université de Brno, Jiry Beránek (1951), qui fournit une assez belle photographie et une bibliographie complète, plus de 150 articles, mémoires ou traités. Le centenaire de la naissance de Hostinský a donné lieu à deux nouveaux articles (Beránek, 1984) et (Litzman, 1985) qui donnent d'intéressantes informations complémentaires. Pour une étude plus fine, il faut naturellement se reporter à la correspondance Fréchet-Hostinský dans les cartons 5, 8, 11, 17, 24, 28 des archives Fréchet de l'Académie des sciences. Il serait évidemment du plus grand intérêt de dépouiller systématiquement la correspondance de Hostinský déposée à la Faculté des sciences de Brno qui contient les réponses de Fréchet et des lettres de P. Alexandrov, S. Bernstein, L. Brillouin, M. Brillouin, É. Borel, É. Cartan, W. Doeblin, P. Ehrenfest, G. Fubini, E. Goursat, J. Hadamard, A. Khinchin, A. Kolmogorov, N. Krylov, H. Lebesgue, T. Levi-Civita, P. Lévy, M. Milankovic, N. Obrechkov, O. Onicescu, É. Picard, R. Popov, V. Romanovsky, V. Sierpinski, E. Slutsky, H. Villat, et V. Volterra. Beránek (1984) et Litzman (1985) en donnent deux ou trois extraits prometteurs (en tchèque). Il est assuré qu'on ne pourra écrire sérieusement l'histoire de la théorie des probabilités des années trente (son âge d'or) ou simplement l'histoire de l'École française qu'après avoir réuni et recoupé toutes les correspondances du temps, celle de Fréchet bien sûr (ce qui est facile) mais aussi celles de Hostinský à Brno, Bernstein, Khinchin, Kolmogorov à Moscou, et bien d'autres encore.

Note 8. Dans sa note du 9 janvier, Hostinský commet une légère erreur, il affirme que dans tous les cas considérés ($p_{ij} > 0$, $\sum_j p_{ij=1}$) les probabilités de passer de i à j en n étapes convergent vers la loi uniforme lorsque n devient infini ; cette erreur (la première d'une assez longue liste) est corrigée dans une seconde note présentée le 20 février où Hostinský précise que pour que le résultat ait lieu il faut supposer en outre la condition de réversibilité $\sum_i p_{ik} = 1$, vérifiée dans le cas du battage des cartes.

Cette seconde note (1928b), pose le problème général de la convergence lorsque l'un ou l'autre des p_{ik} est nul et, signale-t-elle, ce cas « *ne sera pas sans intérêt pour l'étude des phénomènes de diffusion* » ; il va être abordé par de très nombreux auteurs à partir de ce moment. Il est incontestable que Hostinský se trouve à l'origine de cette floraison de travaux.

Dans le cas continu, Hostinský commet la même erreur que précédemment, il omet de faire figurer explicitement la condition de réversibilité. Hadamard le corrige discrètement dans sa note suivante (1928a), mais ne semble pas avoir réagi sur le champ ; il est vrai que l'énoncé erroné de Hostinský correspondait si parfaitement au principe ergodique qu'il était dommage de paraître l'abaisser en le corrigeant, la rigueur suit toujours d'assez loin les avancées décisives pour ne pas en freiner les élans. Hostinský s'en explique dans sa note (1928b) qui contient une démonstration plus explicite de son théorème ergodique convenablement énoncé, laquelle suit en substance la seconde méthode d'Hadamard pour le battage des cartes (1927b) – voir Hostinský (1928b,c). Elle ne s'applique que pour un ensemble borné d'états, de la forme $[a, b]$ et une densité de passage $f(x, y)$ continue, non nulle et vérifiant la condition de réversibilté :

$$\int_a^b f(x,y)dx = \int_a^b f(x,y)dy = 1.$$

Note 9. Comme le suggère la note précédente, il est vraisemblable que l'idée de considérer le cas continu, c'est-à-dire une densité de passage $f(x, y)$ vient de la théorie de la diffusion des gaz, particulièrement des travaux de Smoluchowski que Hostinský connait très bien et qui contiennent explicitement cette notion (comme d'ailleurs les travaux de Bachelier, par exemple (1906, 1912), que Hostinský ne connaît visiblement pas ou ceux de Rayleigh qu'il ne connaît peut-être pas encore, ou ceux d'Einstein, etc...) ; c'est d'ailleurs Hostinský qui introduira les principaux éponymes physiques de la théorie des processus de Markov : « équation de Smoluchowski », « équation de Chapman » (Hostinský, 1931a) – D. G. Kendall note à ce sujet que Sydney Chapman (1888-1970) qu'il eut l'occasion de rencontrer longtemps après ignorait absolument avoir été affublé d'une telle équation, tant cette dernière va de soi dans le contexte des diffusions (Kendall, 1990, p. 35). En revanche la théorie probabiliste du conditionnement dans un contexte général ne va pas du tout de soi et Hostinský ne s'y est jamais intéressé).

Soulignons de nouveau que ni Bachelier, ni Einstein, ni Smoluchowski n'ont eu en vue le théorème de Hostinský qui lui revient absolument comme Hadamard l'a aussitôt noté. On se reportera également à l'intéressante analyse des travaux de Hostinský contenue dans le volume anniversaire de l'Université de Brno (Boruvka *et al.*, 1969, 217-224), sans doute rédigée par J. Beránek (en particulier p. 219).

Note 10. Les démonstrations de Hostinský et Hadamard pour le cas continu sont assez elliptiques et comportent des fautes typographiques qui les rendent difficiles à suivre. Dans le cas réversible, continu et strictement positif elle est très simple. Hostinský la détaille sans erreur dans son fascicule 93 des *Publications* de Brno édité sans doute en février ou mars 1928. On remarquera que Markov et Urban y sont cités en note (1928c, p. 5 et 7), ce qui laisserait supposer que Hostinský a eu connaissace des travaux de Urban et Markov dès la publication de ses notes de janvier et février mais qu'il ne les a vraiment lus qu'après Bologne. Donnons la démonstration de Hostinský à titre indicatif et pour le plaisir.

Soit donc $f(x,y)$ une fonction continue strictement positive définie sur le carré $C = [a,b]^2$ et vérifiant la condition de réversibilité. Notons $l = b - a$ et Δ_n la borne supérieure sur le carré C de l'écart entre le nième itéré $P^{(n)}$ de f et la constante $1/l$:

$$\Delta_n = Sup \left| P^{(n)}(x,y) - 1/l \right| .$$

Soit ω le minimum de la fonction f sur le carré C. On a alors :

$$P^{(n)}(x,y) - \frac{1}{l} = \int_a^b [f(x,s) - \omega] \left[P^{(n-1)}(s,y) - \frac{1}{l} \right] ds$$

d'où

$$\left| P^{(n)}(x,y) - \frac{1}{l} \right| \leqslant \int_a^b [f(x,s) - \omega] \left| P^{(n)}(s,y) - \frac{1}{l} \right| ds \leqslant \Delta_{n-1}[1 - \omega(b-a)]$$

et comme, $0 \leqslant 1 - \omega(b-a) < 1$ le résultat s'en déduit : les densités de passage en n étapes de x à y, $P^{(n)}(x,y)$, convergent uniformément vers la densité constante sur $[a,b]$. Cette démonstration est recopiée d'un cours de Fréchet à Strasbourg en mai 1928, le premier cours d'université français sur ce sujet, fait d'après le mémoire original de Hostinský (1928c) que Fréchet améliore ici très légèrement. Fréchet, suivant Hostinský, montre ensuite que si ω est nul, même si f est réversible, la convergence vers la loi uniforme n'a généralement pas lieu. Fréchet démontre toutefois une réciproque simple du théorème de Hostinský : dans le cas de la réversibilité et si f est continue, pour qu'il y ait convergence uniforme des itérés de f vers la densité constante sur $[a,b]$, il est nécessaire et suffisant qu'à partir d'un certain rang N on ait $P^{(n)}(x,y) > 0$ sur C (le lecteur très éventuel le montrera sans difficulté en exercice).

Les difficultés mathématiques commencent dès que l'on ne suppose plus la réversibilité. Il faut alors étudier les « valeurs caractéristiques » comme le fait Hadamard dans sa communication de Bologne et tenter de caractériser les densités de passage de x à y qui sont susceptibles d'un théorème analogue. Le problème général, lorsque la densité n'est plus strictement positive ou que l'intervalle $[a,b]$ est remplacé par la droite réelle ou un espace relativement quelconque, est beaucoup plus complexe et ne sera traité que dix ans plus tard, la thèse de Fortet (1938) est d'ailleurs entièrement consacrée à ce problème.

Note 11. Voir Weil (*œuvres*), Mackey (1992) et Plato (1987, § 6), qui font état d'une intéressante correspondance Weil-Birkhoff sur ces sujets. Weil affirme (et il n'y a aucune raison de mettre sa parole en doute sur un tel sujet) qu'il connaissait dès 1928 tous les résultats de Koopman et la plupart de ceux de von Neumann, mais qu'il n'a pas publié ses travaux parce que, n'ayant réussi à établir l'ergodicité d'aucun système mécanique raisonnablement réaliste, il n'était pas parvenu à dépasser vraiment les résultats de Hadamard et Hostinský. Weil se refusait, semble-t-il, à publier des résultats généraux sans conséquences « non triviales », au risque de se faire doubler bientôt et devoir s'en expliquer. Gauss connut de ces déconvenues. Cela n'ôte rien évidemment aux mérites éminents de Koopman et von Neumann et ne figure ici que pour appuyer discrètement l'hypothèse d'une filiation naturelle entre les notes de janvier 1928 de Hostinský-Hadamard et le renouveau de la théorie ergodique.

Pour comprendre le rigorisme de la jeune génération parisienne de ces années-là, on peut évoquer la théorie de Mayr (1982) selon laquelle les sciences vivantes ont des phases alternées de rigueur extrême et de romantisme échevelé. Ces phases suivent généralement le rythme des générations. Après les débordements boréliens, il était nécessaire de revenir aux austérités de la règle et de ce point de vue André Weil a été un réformateur particulièrement vigilant qui s'appliquait à lui-même ses plus sévères disciplines, au point de marquer près de deux générations de savants français, ce qui pourrait constituer un cas d'exception des cycles de Mayr si l'on n'observait que les mathématiques françaises paraissent avoir des cycles plus lents que la moyenne ; après le pragmatisme de l'analyse laplacienne jusque vers 1830, la rigueur des fonctions elliptiques a duré près de 50 ans pour céder la place aux rêveries ensemblistes et géométriques, elles-mêmes anéanties par les sévérités bourbachiques, ce qui ne fait que deux cycles par siècle et non trois ou quatre comme en biologie, d'où Mayr a tiré sa théorie qui du reste ne décrit que la surface des choses et n'a qu'un intérêt des plus limités.

Note 12. Dieudonné (1981, p. 191) souligne fort justement que Hadamard au Congrès de Bologne prononce (devant Hilbert) une des conférences plénières sur le passé et l'avenir de l'Analyse fonctionnelle sans mentionner une seule fois la « théorie spectrale » allemande ni les travaux de Riesz (Hadamard, 1929). Dans un remarquable article des *Acta mathematica* de 1918, « *one of the most beautiful ever written* » selon Dieudonné (1981), Riesz a en effet transformé la théorie spectrale des formes bilinéaires de Hilbert (1912) en une théorie spectrale des opérateurs linéaires, mieux adaptée aux équations intégrales, à la mécanique quantique (et à la théorie ergodique de Hostinský) et déjà presque exposée de la façon moderne que l'on enseignera dans les universités à partir de la fin des années cinquante (voir par exemple Dieudonné, 1965). Mais Hadamard est fidèle à lui-même et ne fait que reprendre là un texte de 1910 où déjà il avait mis l'accent sur les travaux de Pincherle, Volterra, Fréchet et Fredholm et oublié Hilbert, Riesz et Fischer (1910). Riesz est pourtant relativement bien disposé à l'égard des mathématiques françaises, il publie régulièrement en français et c'est lui qui a compris le rôle fondamental de l'intégrale de Lebesgue dans ces questions. En 1928 Hadamard semble donc oublier de nouveau l'un des deux piliers de l'analyse fonctionnelle, la théorie spectrale – le second pilier étant, toujours selon Dieudonné, la dualité, précisément l'une des créations de Hadamard (1903b). Hadamard serait ainsi aux yeux de Dieudonné dépassé par la théorie allemande et d'ailleurs par la « théorie moderne des fonctions » en général qui conduit naturellement à l'analyse fonctionnelle « abstraite » des années trente de Banach, Wiener, von Neumann, ..., Bourbaki (voir Dugac, 1994, p. 98). Hadamard et Borel, l'un en analyse fonctionnelle, l'autre en calcul des probabilités, (*ex-aequo* une fois encore), auraient ainsi démontré à Bologne qu'ils ne suivaient plus les travaux en cours dans les directions qu'ils avaient eux-mêmes indiquées. Pourtant, on le voit à l'occasion de la théorie ergodique, Hadamard comprend immédiatement que pour démontrer la partie du théorème de Hostinský relative au cas singulier et aux noyaux non réversibles, il faut utiliser la « méthode de Poincaré » des équations caractéristiques fonctionnelles et faire de la théorie spectrale des opérateurs linéaires sans la nommer ainsi. Hadamard est donc en phase avec la théorie moderne, si ce n'est qu'il n'utilise pas la terminologie allemande – le mot spectre serait, selon Dieudonné (1981), un emprunt de Hilbert à l'optique physique datant de 1906; il est possible que Hilbert ait eu en vue la thèse sur les « spectres en séries » soutenue à Göttingen en décembre 1902 par le jeune physicien mathématicien suisse Walther Ritz (1878-1909) –, ni les travaux allemands qu'il connaît assez mal mais qu'il comprend assez bien dès lors qu'on l'en informe, par exemple les travaux de Jentzsch sur les équations intégrales à noyaux positifs – Robert Jentzsch, 1890-1918, est mort le 21 mars 1918 sur le front, il était élève de Frobenius et Schur à Berlin et sa thèse (1912) cite évidemment Perron-Frobenius mais aussi H. Hahn, Fredholm, Lalesco, Schmidt, Schur et bien sûr Hadamard. On comprend que les jeunes bourbakistes aient été déçus par Hadamard, qui avait guidé leurs premiers pas aux beaux jours de son Séminaire du Collège de France, lorsque, revenus du voyage de l'Allemagne, grisés et convertis, ils l'ont vu si naïvement ignorant des problèmes du temps. La réussite du Séminaire « Julia » s'explique ainsi, nous y reviendrons plus loin. On peut dire la même chose de Borel qui est infiniment loin des travaux probabilistes en cours et qui continue à parler imperturbablement le langage de Poincaré (et de Borel) alors que Khinchin, Kolmogorov et Doob parlent déjà la langue moderne. Pourtant, lorsque le besoin s'en fait sentir, Borel traite directement sans effort apparent les questions les plus modernes de la théorie avec les moyens modernes, ce qui lui permet de publier à près de 80 ans des travaux originaux (par exemple 1947b). On peut noter que Hilbert n'est pas si différent, à cet égard, de Hadamard ou Borel, qui semble avoir considéré comme de peu d'importance les travaux polonais ou russes ou même américano-allemands sur ces questions. Tardivement les jeunes lions des années trente ont salué en Hadamard un des grands maîtres des mathématiques de tous les temps (sauf du leur peut-être), on se reportera à ce sujet à Shaposhnikova *et al.*, mais il s'agit là bien sûr de cette forme de discours pieux qui permet aux fils, lorsque l'heure du jugement approche, de se faire les défenseurs des pères qu'ils avaient si innocemment assassinés en leur jeunesse folle, dans l'espoir fallacieux que leurs propres fils ne leur feraient pas subir le même sort et dans la certitude durement acquise d'être eux aussi coupables.

Note 13. L'œuvre mathématique de G. D. Birkhoff (1884-1944), professeur à l'Université de Harvard, est considérable (voir Morse, 1946 et Birkhoff, 1950) ; nous n'en dirons rien ici. Birkhoff fait partie de cette génération de mathématiciens américains qui n'a pas été formée en Allemagne et a joué un rôle de tout premier plan dans le développement de l'École américaine de mathématiques ; il se considérait lui-même comme le dernier élève et le successeur de Poincaré. Birkhoff se trouve à l'origine directe de la création de l'Institut Henri Poincaré – voir Siegmund-Schulze (1994, 1997, 1999) et Duren (1989). Il venait régulièrement à Paris où il a été l'un des premiers conférenciers Rockefeller.

Birkhoff a prononcé une des conférences générales du Congrès de Bologne, il avait choisi un thème, les mathématiques et l'art, qui aurait enchanté Otakar Hostinský. Sa conférence eut d'ailleurs lieu dans l'enceinte historique du Palazzo Vecchio de Florence où les congressistes étaient de sortie. Birkhoff a présidé une des sessions de la section III, Mécanique. C'est dans cette section que Hadamard a présenté sa communication ergodique le 6 septembre 1928, (1931), le président de la séance était Nicolas Kryloff, professeur à l'Université de Kiev, un autre acteur important de notre histoire dont nous ne dirons rien. Birkhoff était donc informé des idées de Hadamard qui d'ailleurs l'a invité à plusieurs reprises à parler à son séminaire du Collège de France ; la théorie ergodique de Hostinský est allée de Brno à Harvard en passant par Paris. Depuis longtemps Birkhoff et le département de mathématiques de Harvard s'intéressaient au problème ergodique. Ce n'est cependant qu'en mars 1931 que Bernard Koopman, ancien étudiant de Birkhoff et ami très proche de Marshall Stone publie une note posant le problème en termes de groupe à un paramètre de transformations unitaires dans un espace de Hilbert, que von Neumann résoud sur le champ. On connaît l'histoire qui s'en est suivie, Birkhoff, piqué au vif, résolvant à son tour le problème ponctuel de Hadamard et le publiant avant von Neumann. Voir à ce sujet Koopman, Birkhoff (1932) et Koopman, von Neumann (1932).

La biographie de Bernard Koopman (1900-1981) est intéressante quoique peu connue ; elle est donnée dans Morse (1982) – je dois cette référence à Steve Stigler que je remercie. Bernard Koopman passe une partie de son enfance en France où son père est artiste peintre, sa mère Louise Osgood est la cousine germaine du mathématicien de Harvard W. F. Osgood (1864-1943) – voir Koopman (1944) ; Osgood n'avait pas été si loin de découvrir l'intégrale de Lebesgue avant Lebesgue et pour cette raison avait rejeté cette dernière de l'enseignement de Harvard au point que Wiener dut l'apprendre auprès de Hardy à Cambridge voir par exemple Young, 1981 ; or le théorème ergodique n'était plus grand chose sans intégrale de Lebesgue comme Koopman dut s'en convaincre malgré l'enseignement de son cousin Osgood. Bernard Koopman est notamment élève du Lycée Montaigne à Paris dont il ne paraît pas avoir gardé le meilleur souvenir. Revenu aux États-Unis en 1915, il fait des études de mathématiques à Harvard où il entreprend une thèse sur les systèmes dynamiques sous la direction de Birkhoff, thèse qui sera soutenue en 1926. Auparavant il a obtenu avec Marshall Stone son condisciple de Harvard, une bourse « postdoctorale » à l'étranger. Ils se décident pour Paris où ils passent l'année universitaire 1924-1925. Koopman et Stone suivent le cours de probabilité de Borel à la Sorbonne et le cours de Lebesgue au Collège de France. Ils assistent régulièrement au Séminaire Hadamard alors au plus haut de son influence et de sa gloire. La (future) théorie ergodique y est constamment latente et le calcul fonctionnel concret de Hadamard et l'analyse générale abstraite de Fréchet etc. Après sa thèse, Koopman est nommé à l'Université Columbia de New-York où il fait toute sa carrière. Son rôle d'organisateur des enseignements de mathématiques à Columbia est important, c'est notamment lui qui se charge du cours de probabilité. Son approche est évidemment subjectiviste, et d'ailleurs plus keynésienne que borélienne ; Koopman a l'idée d'utiliser le théorème de représentation de Stone pour quantifier les « algèbres de probabilités intuitives » (1940a,b, 1941). À partir de 1941 Koopman participe aux travaux du « Columbia project » au service de la Défense Nationale (NDRC) et en 1943 il rejoint le groupe de Recherche Opérationnelle de la Marine dirigé à Washington par le physicien du MIT Philip Morse. Le groupe de Morse a besoin de mathématiciens ; Koopman se révèle particulièrement efficace – voir Morse (1977) et Koopman (1980) – et devient pendant les trente années qui suivent l'un des principaux responsables de la Recherche Opérationnelle au sein de l'OTAN et de la Marine américaine.

J. von Neumann (1903-1957) est un des géants mathématiques de son temps, et sa biographie est si connue qu'il est inutile de la rappeler ici, on se reportera aux études nombreuses de son œuvre ; comme tous les géants, von Neumann a dû à de certains moments, pour se hisser jusqu'aux plus hauts sommets, monter sur les épaules des nains, et Hostinský aurait pu être l'un de ces nains là, Koopman en tout cas en fut un, lui qui n'était pas si petit.

Note 14. Le tome V des Actes où figure l'étonnant exposé de Hadamard n'a été publié qu'en 1931, sans d'ailleurs qu'Hadamard ait pris le soin de préciser ses démonstrations ni la généralité de sa méthode qui ne sera vraiment comprise qu'après les travaux de Doeblin et Kolmogorov en 1936. Il y a d'ailleurs là un curieux point d'histoire interne. Hadamard expose en effet sur un cas particulier la méthode de loin la plus féconde de la théorie moderne des chaînes qui permet non seulement de traiter complètement et de façon élégante le cas d'un nombre fini d'états mais surtout d'aborder au fond le cas dénombrable comme le verront très lucidement Kolmogorov et Doeblin. Or la seule influence immédiate et directe de l'exposé dont il s'agit semble avoir été d'attirer l'attention des savants qui y ont assisté sur les particularités du « cas singulier », les états ne peuvent se suivre indifféremment ils doivent suivre un ordre et passer cycliquement de « sous-groupements » en sous groupements. Curieusement ce n'est pas l'esquisse de démonstration d'Hadamard qui va être immédiatement comprise et utilisée mais le résultat lui-même dont Romanovsky puis Mises montreront qu'il résulte de la théorie algébrique des matrices positives que Frobenius a établie pour les besoins de la théorie des nombres allemandes, cette théorie dont l'école de physique mathématique française et particulièrement Borel ne pensaient pas précisément qu'elle pût jamais servir à quoique ce soit. La méthode de Frobenius permet ainsi de traiter algébriquement les chaînes de Markov à nombre fini d'états comme l'avait assez bien vu Poincaré dès 1911 dans le cas du battage des cartes. Et jusqu'en 1936 seule cette méthode conjointement avec la méthode des moyennes sera exploitée systématiquement – voir Fréchet (1938b).

Pourtant il apparaît rétrospectivement que la méthode directe d'Hadamard consistant à suivre les états communiquant entre eux est plus naturelle et mieux adaptée au problème en question. Comment Fréchet ne l'a-t-il pas vu ni d'ailleurs Hadamard qui s'en est désintéressé ? Pourquoi a-t-il fallu attendre le cours de Kolmogorov à Moscou, qui s'étonnerait lui-même que tout cela n'ait pas été fait depuis longtemps au point de ne publier ses résultats qu'au moment où Fréchet lui indiquerait qu'il faisait étudier par Fortet et Doeblin les chaînes à états dénombrables ? Il est vrai que la méthode d'Hadamard ne s'applique sans changement qu'au cas des chaînes réversibles et qu'il faut la modifier convenablement pour l'adapter au cas général, mais il n'y a pas là d'obstacles insurmontables. Quant à Doeblin qui n'avait connaissance que de la théorie algébrique – lue dans Hostinský (1931) – il semble avoir été conduit d'emblée à la méthode directe dans l'ignorance des travaux d'Hadamard ; c'est du moins ce que soutient Fréchet dans son livre (1938b, p. 187). Il s'agit en fait d'un exemple d'une situation classique en mathématiques, un résultat de quelque importance est d'abord démontré de la façon la plus compliquée et la plus confuse possible comme si le résultat dont on veut triompher cherchait à résister le plus longtemps possible avant de céder enfin sans trop en avoir l'air. On découvre généralement peu de temps après qu'il existe des voies d'accès infiniment plus simples et plus directes (et que ces voies avaient été assez bien décrites par d'obscurs ou d'illustres pionniers) et ceux là qui arrivent au sommet au pas de charge s'étonnent de la maladresse de leurs prédécesseurs (dont ils contestent par la même occasion l'exploit d'être parvenu au but avant eux par des voies si détournées et si erratiques). Les voies directes sont toujours les plus courtes mais souvent les plus tardives.

Indépendamment de cette remarque banale, on serait tenté d'établir un rapprochement entre la date de parution des Actes de Bologne et celle des théorèmes de Birkhoff, von Neumann et de considérer que cette coïncidence est l'indication d'une liaison de cause à effet; mais rien ne permettant d'asseoir cette hypothèse et d'ailleurs tout au contraire militant contre, nous ne saurions nous y attarder, d'autant qu'on pourrait tout aussi bien noter la coïncidence de la sortie du livre (markovien) de Mises (1931) avec celle de ces mêmes théorèmes de Birkhoff-von Neumann et établir de la sorte une intéressante filiation entre Mises et l'École américaine (dont rien ne prouve qu'elle ait jamais existé). On sait que d'autres hypothèses, fort bien argumentées celles là, sont également possibles – voir à ce sujet Birkhoff, Koopman (1932), Koopman, von Neumann (1932), Carleman (1932), Stone (1932), Hopf (1937), Wiener, Wintner (1941), Birkhoff (1942), Kakutani (1950), Mackey (1992) etc., chacun de ces auteurs racontant pour son compte et selon ses goûts scientifiques l'histoire ergodique telle qu'il l'a vécue, illustration supplémentaire des vertus oecuméniques d'une théorie établie, dont nous ne saurions réduire le mystère en adoptant ici des vues trop étroitement liées à l'une des chapelles qui s'en réclament.

Note 15. On nous accordera peut-être que Hostinský s'est trouvé un instant en adéquation avec le cours de l'histoire de la théorie des chaînes de Markov en cette année 1928. Mais on nous objectera évidemment que la théorie ergodique des systèmes dynamiques n'est entrée en phase 3 qu'en 1931 – voir par exemple Mackey (1992) –, et que ce qui l'a poussé ainsi au sommet ce ne sont pas les modestes mémoires de Hostinský ou les remarques sibyllines et prophétiques de Hadamard mais la grande «théorie spectrale allemande» telle que l'ont comprise Birkhoff, Carleman, Hopf, Riesz, Weyl, Wiener et von Neumann qui d'ailleurs revendiqueront chacun pour leur compte une part dans cette théorie ergodique là (voir bibliographie) jusqu'à ce que Khinchin et Hopf fassent la synthèse des deux théories, celle de Hostinský et celle de Birkhoff. Certes, mais ce n'est pas contradictoire; pour s'établir en phase trois, une théorie se doit de multiplier titres et travaux afin d'effacer autant que faire se peut les particularismes culturels qui en freinent l'envol. La théorie spectrale ne suffisait d'ailleurs pas, encore fallait il qu'il y eût clairement identifiés des opérateurs de Markov-Hostinský-Hadamard-Weil-Koopman auxquels on l'appliquât, de sorte qu'il serait déraisonnable d'oublier Brno. Nous ne raconterons pas plus avant cette histoire là fort bien racontée ailleurs. Il y a tant d'histoires à raconter qu'il n'est pas possible encore de multiplier les versions d'une même histoire – il faut pourtant au moins dix versions concordantes pour étayer une hypothèse historique, d'après Bakhrushin (Kendall, 1990, p. 32).

Annexe

Les conférences de la sous-section IVA.

Remarque préliminaire

Il existe au moins trois listes de conférences de la section IVA, (Congrès 1928, 1929, 1932), ces listes diffèrent en certains points. La première a visiblement été rédigée avant le Congrès, les deux autres sont peut-être plus fiables. Nous commençons par la liste de 1928 par ordre alphabétique et nous donnons à la suite les noms qui se sont ajoutés en 1929 et 1932.

I. La liste de 1928

I.1 D. Arany (Budapest) : *Note sur la généralisation du problème de la durée du jeu pour trois joueurs.*

Dániel Arany, mathématicien et actuaire hongrois, est, suivant la liste des congressistes (1929) professeur à l'École supérieure industrielle de Budapest (fondée en 1879). Il a été un des fondateurs en 1904 du Club Actuaire Hongrois, la première société des actuaires hongrois. Il a participé notamment au Congrès international des Actuaires de Vienne en 1909. Sa contribution est citée dans l'un des grands articles actuariels de De Finetti, Il problemi dei «pieni», *Giornale dell'Istituto Ital. Act., 11* (1940), pp. 1-88. Ce dernier article exploite du point de vue actuariel, la théorie de la ruine des joueurs, le sujet d'Arany. Rappelons incidemment que le premier Congrès International des Actuaires s'est tenu à Bruxelles en 1895, puis régulièrement tous les trois ans, jusqu'en 1912 (Amsterdam). Le premier Congrès d'après-guerre n'a eu lieu qu'en 1927 à Londres, juste avant Bologne, les Actuaires ne voulant pas se réunir sans les Allemands ni avec les Allemands.

Arany a publié de 1924 à 1933 divers articles sur le problème de la ruine des joueurs. Le problème de la durée du jeu de pile ou face pour deux joueurs de fortunes données est probablement le plus ancien et le plus difficile de la théorie classique des probabilités. Il remonte à Pascal au moins (Hald, 1990, 1998). Le cas de plus de deux joueurs et d'un jeu quelconque a été abordé pour la première fois par Bachelier (1906, 1912) par sa méthode « hyperasymptotique » (approximation par des diffusions). Bachelier obtient quelques résultats pour la durée moyenne du jeu dans le cas de trois joueurs (1906, p. 311-313). Arany, qui s'est directement inspiré de Bachelier (1912), se propose de traiter le cas de trois joueurs par les méthodes combinatoires classiques. Sa conférence montre l'état de la question en 1928 et en même temps les débuts de l'école combinatoire hongroise qui traitera ce genre de problèmes après la seconde guerre mondiale de façon brillante. Le problème de la ruine des joueurs est aussi, on le sait, un des très grands problèmes de la théorie markovienne, discrète ou continue, dont les liens avec les problèmes aux limites de la théorie des équations aux dérivées partielles sont à l'origine d'une des grandes voies de l'Analyse de la seconde moitié du xx^{e} siècle. Il existe un autre Dániel Arany, le Henry Vuibert hongrois, qui a fondé en 1894 le journal de mathématiques pour les écoles secondaires, *Középiskolai Matematikai Lapok.* Ce périodique, très lu, a joué un rôle important dans le développement de l'École hongroise de mathématiques au XX^{e} siècle (voir à ce sujet, par exemple, R. Hersh, V. John-Steiner, Visit to Hungarian Mathematics, *Math. Intelligencer*, 15 (1993), pp. 13-26). Nous ignorons quels liens de parenté unissent ces deux personnages.

I.2 F. P. Cantelli (Napoli) : *Sui limiti della probabilità che una variabile casuale assuma un valore di un assegnato intervallo.*

Francesco Paolo Cantelli (1875-1966) est un des grands probabilistes de la première moitié du XX^{e} siècle. Après des études à Palerme, sa ville natale, il est actuaire au Ministère du Trésor italien. C'est l'un des principaux actuaires mathématiciens italiens, membre de l'Istituto Italiano degli Attuari fondé en 1929. Il dirige le très important *Giornale dell'Istituto Italiano degli Attuari*, fondé à la même époque, l'un des tout premiers périodiques d'actuariat mathématique et de théorie des probabilités des années trente qui accueillera des articles de tous les grands noms de la théorie. Il est nommé à la chaire de mathématiques financières de l'Université de Catane en 1923 et de Naples en 1925. Il est professeur à l'Université de Rome de 1931 à 1951. On trouvera des éléments biographiques à son sujet dans Melilli (1997) et dans ses œuvres choisies (Cantelli, 1958). C'est notamment Cantelli qui a introduit les premières locutions marquant qu'il y avait lieu de distinguer convergence « au sens du calcul des probabilités » (la convergence en probabilité de Fréchet, celle implicite de Bernoulli et Laplace) et la convergence « uniforme en probabilité » (Cantelli, 1917), c'est-à-dire la convergence presque sûre actuelle, introduite par Borel dans son article sur les probabilités dénombrables (1909a). La locution « convergence presque sûre » est employée par Paul Lévy dès 1935 concurremment avec l'expression « convergence sauf dans des cas dont la probabilité est nulle ». Fréchet a lui-même beaucoup hésité sur la dénomination du presque partout probabiliste (« presque partout » inventé par Lebesgue dès 1904). En 1930 et dans ses premiers cours de l'IHP il adopte la locution « presque toujours ». Dans son livre (1936b), il opte pour l'expression « presque certainement ». Khinchin appelle pour sa part convergence « forte » au sens du calcul des probabilités la convergence p. s., l'adjectif sera conservé dans le contexte de la loi des grands nombres. Doob très longtemps utilisera l'expression « convergence with probability 1 », etc.). La situation devient ensuite extrêmement confuse, il faudrait scruter à la loupe les travaux de Vivanti, Dell'Agnola, Cantelli, de Finetti du côté italien, ceux des écoles russes depuis Markov, Chuprov, Bernstein, et surtout Slutsky (1925, 1928a), qui montre par exemple que toute suite de Cauchy en probabilité converge en probabilité (résultat déjà démontré par Riesz pour la convergence en mesure vingt ans auparavant, mais tant que Fréchet n'aurait pas systématisé l'analogie entre la convergence en mesure des fonctions et la convergence en probabilité des variables éventuelles, tant que Kolmogorov n'aurait pas déclaré officiellement que les deux théories relevaient de la même axiomatique et avant qu'il fût admis par un nombre suffisant de mathématiciens qu'il en était bien ainsi, il s'agissait de résultats absolument étrangers l'un à l'autre), sans parler de Khinchin et Kolmogorov, et bien sûr de l'École polonaise incontournable aussi bien en analyse fonctionnelle qu'en calcul des probabilités qui développera dans les années trente une théorie mixte probabiliste et fonctionnelle où les résultats probabilistes sont exprimés strictement dans la langue fonctionnelle, la « théorie des fonctions indépendantes » de Steinhaus, Kac, Marcinkiewicz et Zygmund. Nous renvoyons à Doob (1994) pour un exposé très clair de la position mathématique confuse et ambiguë où se trouvait le calcul des probabilités dans les années trente (et vingt, et dix), avant que la statistique mathématique comme le calcul des probabilités ne s'inscrivent de façon uniforme dans la langue austère mais précise de la théorie de la mesure.

Quoiqu'il en soit, Cantelli est un des premiers acteurs de cette épopée axiomatico-terminologique. Il a développé, avec une grande pugnacité, sa propre axiomatique des « variables casuelles » (modifiée le cas échéant) et démontré dans son cadre et de façon très ingénieuse des théorèmes presque sûrs, notamment en remarquant qu'une partie du lemme de Borel de 1909 s'appliquait aussi bien au cas d'événements dépendants. Il suffit pour cela d'appliquer une inégalité élémentaire due à Boole (1854). Cantelli a rappelé ce fait très simple mais fondamental dans sa conférence de Bologne et Carlo Emilio Bonferroni (1892-1960), qui se trouvait dans l'assistance, a eu l'idée de généraliser l'inégalité de Boole en une suite d'inégalités, les inégalités de Bonferroni, extrêmement commodes qui sont d'usage courant maintenant encore ; sur ce point et pour des références, on verra Heyde, Seneta (2001, p. 411-414).

Le titre de l'exposé de Cantelli a changé entre le début et la fin du congrès, dans les Actes, il se nomme *Sui confini della probabilità*. Il s'agit de généraliser l'inégalité de Bienaymé-Chebyshev que du reste Cantelli paraît avoir revendiquée en partie ; Fréchet fort heureusement veille (1936b).

Indiquons pour terminer que Cantelli, à l'invitation de Fréchet, a été l'un des conférenciers probabilistes de l'IHP et du Colloque de Genève de 1937.

I.3 M. Castellani (Roma) : *Le basi matematiche di alcuni teoremi statistici.*

Maria Castellani est une statisticienne, actuaire, mathématicienne italienne. Elle a fait ses études à l'Université de Rome où elle a soutenu sa thèse. Elle travaille en 1928 à la Caisse Nationale d'Assurance Sociale de Rome. Elle sera bientôt professeur de statistique à l'Université de Rome et dirigera le Bureau des actuaires de la Société des Nations à Genève. Elle a publié de 1927 à 1941 divers articles d'actuariat mathématique dont la liste est donnée dans la bibliographie statistique de Kendall et Doig, notamment le premier « Die Zufallsvariablen und die Grundlagen der Versicherungsmathematik » publié dans la grande revue allemande d'actuariat, fondée en 1901, *Zeitschrift für gesamte Versicherungswissenschaft*, 27 (1927), p. 49-55, qui correspond peut-être au titre donné en 1928. En réalité Maria Castellani paraît avoir changé d'avis. Son exposé publié a pour titre *Sulla representazione in serie delle leggi di frequenza* (Congrès, 1932).

Maria Castellani est principalement connue pour avoir fondé en 1929 et présidé jusqu'à la guerre la Fédération italienne des femmes actives, la FIDAPA, qui existe toujours. En 1936, elle préside l'Association des artistes et intellectuels fascistes et soutient activement la campagne d'Éthiopie. Elle a publié un ouvrage célèbre, traduit en français en 1939, *Donne italiane di ieri e di oggi*, Firenze : Bemporad, 1937, dans lequel elle décrit la mutation de l'identité féminine sous le fascisme. Il existe une importante littérature à ce sujet, on verra par exemple Victoria de Grazia, *How Fascism Ruled Women : Italy 1922-1945*, Berkeley : University of California Press, 1992, et pour un contexte plus général, l'ouvrage collectif dirigé par Françoise Thébaud, *A History of Women. Toward a Cultural Identity in the Twentieth Century*, Cambridge Mass. : The Belknap Press of Harvard University Press, 1998.

Parmi les congressistes de Bologne on trouve une autre femme active, la biostatisticienne Maria-Pia Geppert (1907-1998), qui adhérera au parti nazi et soutiendra une habilitation à Giessen en 1942. En 1928, il est indiqué qu'elle habite Breslau. À Bologne, elle accompagne son frère Harald Geppert (1902-1945), qui parle dans la sous-section IIIA et qui passera l'année 1928-1929 à Rome comme boursier Rockefeller, chez Levi-Civita (présent à Bologne), avant d'être nommé professeur à l'Université de Giessen – voir Siegmund Schulze (1986, 1994, 2001). Il ne manque pas non plus d'hommes actifs à Bologne. Il existe, à ce sujet, un très grand nombre de travaux, notamment sur le rôle de Gini sous le fascisme ; on se reportera en particulier à Desrosières (2000), à J. G. Prévost,
http ://www.cirst.uqam.ca/PDF/note_rech/2000-01.PDF et G. Favero, Corrado Gini and Italian Statistics under Fascism, Buenos Aires, 2002,
www.eh.net/XIIICongress/Papers/ Favero.pdf qui donne une importante bibliographie, où l'on voit que les statisticiens ont été à la fois, ou tour à tour, les idéologues, les profiteurs, les dupes, et les victimes du fascisme européen, dont la présence plus ou moins discrète à Bologne devait peser parfois sur les débats et pèserait cinq ans plus tard bien davantage encore.

I. 4 E. Cavalli (Torino) *: Sui fondamenti della probabilità degli errori.*

Ettore Cavalli (1861-1932), général d'Artillerie, professeur de Balistique à l'Académie de Turin et auteur d'un important traité de balistique extérieure (1928), représente la grande école des balisticiens italiens, qui a développé notamment une intéressante théorie de la probabilité du tir, équivalente à la théorie géométrique gaussienne des erreurs d'observations et des variables biométriques. Rappelons à cette occasion la mémoire d'un des prédécesseurs de Cavalli à Turin, Francesco Siacci (1839-1907), bien connu pour sa méthode d'intégration par arcs de l'équation de la balistique, dont les travaux sur « les axes de groupements » (voir par exemple *Revue d'Artillerie*, 22 (1883), p. 521-544), vont beaucoup plus loin que les travaux contemporains bien connus de Galton, mais dans un tout autre contexte (voir Stigler, 1986).

I.5 G. Darmois (Paris) *: Sur l'analyse et la comparaison des séries statistiques qui se développent dans le temps (The time correlation problem).*

Georges Darmois (1888-1960) est l'un des très rares mathématiciens français à avoir compris dès les années vingt le rôle qu'allait jouer la nouvelle statistique mathématique dans les sciences et la société de son temps. En 1928, il est professeur de mathématiques à l'Université de Nancy et professeur de statistique au nouvel Institut de Statistique de l'Université de Paris (ISUP) dont il sera le directeur des études de 1944 à sa mort. C'est véritablement Darmois, seul en France à bien peu près, qui a enseigné, diffusé, promu à tous les niveaux la statistique mathématique au lendemain de la guerre. Pour plus de détails sur lui, on verra Heyde, Seneta (2001, p. 382-385). Sa conférence bolognaise (1929) est fort intéressante, on s'y reportera. Darmois y soutient notamment que « ces séries que nous appelons des chaînes, suivant le mot de Markoff, sont d'une grande importance. Du point de vue expérimental, elles ont été rencontrées par Egon et Karl Pearson » et Darmois cite *Biometrika* vol 10, 11, 14, 18 et 19 (ce qui ne dut pas plaire à tout le monde). Darmois, comme Fréchet, a été l'un des présidents de la sous section IVA. Il sera président de l'IIS de 1953 à sa mort (Nixon, 1960).

I.6 B. de Finetti (Roma) : *Le funzioni caratteristiche delle frequenze in una successioni di eventi.*

Bruno de Finetti (1906-1985) est surtout connu pour avoir été avec Ramsey et Savage, le défenseur éloquent des théories subjectives de la probabilité. La probabilité d'un événement n'existe pas dans la nature des choses, elle est déterminée par les conditions des paris qu'un individu (rationnel) est disposé à faire sur son occurrence. On verra sur ce point Regazzini (1987), Johnson, Kotz (1987, p. 94-95) et Morino (1996).

Mais en 1928 à Bologne, de Finetti n'a que 22 ans. Il a soutenu l'année précédente une thèse d'Analyse sous la direction de Giulio Vivanti à Milan et vient d'entrer au nouvel Institut Central de Statistique, l'ISTAT, créé en 1926 et dirigé par Corrado Gini, présent à Bologne, qui a dû donner son nom aux organisateurs du Congrès. Bruno de Finetti expose les débuts de sa remarquable théorie des fonctions à accroissements indépendants, encore un thème markovien implicite, qui sera repris magistralement par Kolmogorov, Cramér, Lévy, Khinchin et Feller dans les années trente, et suscitera le traité (Lévy, 1937), l'un des chefs d'œuvre de la théorie des probabilités de tous les temps.

I.7 C. A. Dell'Agnola (Venezia) : *Intorno alle successioni di variabili casuali discontinue tendenti ad una variabile casuale limite.*

Carlo Alberto Dell'Agnola (1871-1956), après avoir étudié et enseigné l'analyse mathématique à Padoue, est professeur de Mathématiques financières à la Faculté d'Économie de Venise. C'est l'un de ceux qui, avec Cantelli, ont tenté d'élucider les notions de base du calcul des probabilité et notamment les divers types de convergence qu'on y rencontre, voir Cantelli ci-dessus. Il a correspondu sur ce thème avec Fréchet au moment où ce dernier écrivait son traité (1936b) qui tente d'établir les priorités aussi scrupuleusement que possible.

I.8 L. G. du Pasquier (Neuchâtel) : *Sur les nouveaux fondements philosophiques du Calcul des probabilités.*

Louis-Gustave Du Pasquier (1876-1957) a fait ses études à l'École polytechnique de Zurich, où il a été le condisciple d'Albert Einstein. Il a soutenu une thèse de théorie des nombres sous la direction du grand mathématicien allemand, professeur à Zurich, Adolf Hurwitz (1859-1919). Du Pasquier est d'ailleurs resté un spécialiste de théorie des nombres et à Bologne il fait également une conférence sur les quaternions dans la sous-section IA. L.-G. du Pasquier est actuaire et professeur de Mathématiques supérieures à l'Université de Neuchâtel. Il a notamment proposé de modéliser les problèmes d'assurance invalidité par des schémas « markoviens » à deux états, (Du Pasquier, 1913; voir aussi Fix, Neyman, 1951 et Chiang, 1980). On trouve de telles idées chez d'autres actuaires du temps, notamment chez les actuaires scandinaves. En France, et indépendamment, Henri Galbrun (1879-1940), actuaire à Paribas, a longuement exploité de telles idées dans ses fascicules du *Traité* de Borel, 1933, 1934).

En 1926, L.-G. Du Pasquier a publié un important ouvrage sur l'évolution philosophique et mathématique du calcul des probabilités (1926). Sa conférence de Bologne en est un résumé. Du Pasquier est un disciple de Cournot, le hasard et la probabilité ont une valeur objective et la probabilité mathématique est un concept mathématique comme un autre, encore faut-il en préciser la définition dans un cadre mathématique adéquat. Du Pasquier adopte un cadre « ensembliste » qu'il paraît avoir emprunté à Cournot lui-même et à Urban (1923). Du Pasquier s'arrête en chemin. Sa théorie demeure abstraite et ne s'applique (comme toutes les théories ensemblistes d'alors) qu'à des exemples triviaux qui se passent fort bien d'un tel habillage. Toutefois le livre de Du Pasquier est très intéressant au point de vue historique.

I.9 R. A. Fisher (Rothamsted) : *On a property connecting the χ^2 measure of discrepancy, with the method of maximum likelihood.*

Ronald A. Fisher (1890-1962) ne se présente pas. C'est « le » statisticien mathématicien du XX^e siècle. En 1928, Fisher dirige le Département statistique de la Station expérimentale de Rothamsted où il est entré en 1919 et d'où il partira en 1933, remplacé par F. Yates. Pour sa biographie, on verra en particulier Box (1978), Droesbeke, Tassi (1990) et les deux ouvrages biographiques (Johnson, Kotz 1997 p. 99-108, et Heyde, Seneta 2001, p. 389-397). Pour une discussion générale des travaux de Fisher relatifs au test du Chi2 on verra Stigler (1999, chapitre 19). Pour une analyse détaillée du mémoire présenté à Bologne, on verra Hald (1998, p. 648-664). Signalons à ce propos l'importance de ce dernier ouvrage qui présente notamment de façon complète et précise les travaux de l'École française, Laplace, Poisson, Bienaymé. C'est, à ma connaissance, le premier et l'unique traité qui retrace l'histoire extraordinairement riche et complexe du théorème fondamental de la statistique laplacienne, ce qu'on appelle depuis Pólya (1920) le théorème central limite. Anders Hald vient d'augmenter son livre d'un chapitre supplémentaire (2002) qui fait le point sur l'histoire compliquée des développements en séries des « frequency functions » de 1873 à 1944, où se mêlent ou s'ignorent toutes les écoles statistiques des XIX^e et XX^e siècles. Naturellement les analyses que proposent Hald des travaux de Fisher sont scrupuleuses et on peut à cet égard lui faire toute confiance. Fisher a naturellement été conférencier de l'IHP. Il a participé au Colloque de Genève et a correspondu avec Fréchet (Bennett, 1990).

I.10 L. Galvani (Roma) *: Estensione del concetto di media ed applicazioni allo studio della variabilità di una serie statistica.*

Luigi Galvani (1878-1954) est un descendant de son homonyme bolognais Luigi Galvani (1737-1798) qui a décrit l'électricité animale. Il a fait ses études à Bologne. Il est d'abord professeur de mathématiques dans l'enseignement secondaire et commence à s'intéresser à la statistique. Il collabore avec Corrado Gini à l'analyse du recensement italien de 1921, voir à ce sujet C. Gini, L. Galvani, Di una Applicazione del Metodo Rappresentive All'ultimo Censimento Italiano Della Popolazione (10 Decembri, 1921), *Ann. di Statistica* (Ser. 6) 1 (1929); C. Gini, Une Application de la Méthode Répresentative aux Matériaux du Dernier Recensement de la Population Italienne, *Bull. Int. Statistical Institute* 198 (1928), et Judith M. Tanur, Samples and Surveys, in *Perspectives on Contemporary Statistics* (David C. Hoaglin & David S. Moore eds., Wash. DC, 1992), et Droesbeke, Tassi (1990). Il entre en 1926 à l'Institut Central de Statistique. En 1931 il est nommé professeur de statistique à Venise puis à Naples et à Rome. C'est un des meilleurs représentants de l'École statistique italienne, démographique, sociologique, économique, celle de Corrado Gini (1884-1965), qui laisse sans doute les mathématiques à l'extérieur du sanctuaire, mais qui en utilise avec beaucoup d'ingéniosité et de lucidité les outils les plus simples. On verra l'ouvrage collectif édité par A. Naddeo (1987) pour une étude détaillée de cette tradition, mais aussi A. Sen (*On Economic Inequality*, London, Oxford : Clarendon Press, 1973) et Barbut (1998).

Rappelons que Gini a fondé en 1920 le journal statistique *Metron*, qui joue un rôle très important dans la statistique mathématique de l'entre-deux-guerres. Darmois, Fréchet, Slutsky et tous les orateurs de Bologne y ont publié des articles importants.

I.11 A. Gruzewski (Varsavia) *: Sur une certaine mesure de dispersion.*

A. Gruzewski enseigne à l'École polytechnique et à l'École supérieure de Commerce de Varsovie. Il est intervenu également dans la sous section IB, sur un problème du grand topologue soviétique P. Uryson. C'est dans la section IB qu'ont parlé Serge Bernstein, Paul Lévy, et plusieurs mathématiciens russes et polonais, parmi lesquels Helena Moriar Gruzewska qui a correspondu avec Fréchet. A. Gruzewski appartient donc à l'école polonaise. En 1928, il est indiqué qu'il est docteur. Nous ne savons rien de lui.

I.12 A. Guldberg (Oslo) *: Sur la fonction gamma.*

Alf Guldberg (1866-1936), mathématicien-actuaire norvégien, a fait ses études à l'Université de Kristiania (Oslo à partir de 1924)), puis à Göttingen, Berlin, Leipzig et Paris. Il se spécialise en théorie des équations différentielles, notamment la théorie de Picard-Vessiot. En 1908, il est nommé professeur à l'Université d'Oslo, où il enseigne à partir de 1917 les mathématiques actuarielles.

Il s'intéresse alors à la statistique mathématique classique, principalement à la représentation des courbes de fréquences. Il étudie notamment les courbes de Pearson et notamment le type III, les densités gamma dont il fait le sujet de sa conférence bolognaise. Guldberg a collaboré de 1919 à 1934 au grand périodique scandinave *Skandinavisk Aktuaritidskrift*, fondé en 1918 par la fusion des journaux d'actuaires danois et suédois et l'adhésion des Norvégiens, puis celle des Finlandais en 1923. Pour une histoire des sociétés d'actuaires dans le monde de 1900 à 1930, on verra notamment J. S. Elston, Actuarial, Statistical and Related Organizations in the United States and Abroad, *Proceedings Casualty Actuarial. Society*, 19 (1932-1933), pp. 85-126.

Le *Skandinavisk Aktuaritidskrift*, qui existe toujours sous le titre *Scandinavian actuarial journal*, est l'un des périodiques statistiques et probabilistes les plus intéressants des années vingt et trente. Il est édité en 1928 par R. Palmqvist (Suède, éditeur en chef), J. F. Steffensen (Danemark), Ivar Hesselberg (Norvège), Gustaf Stolz (Suède), Harald Cramér (Suède), E. A. Hintikka (Finlande). Les actuaires scandinaves se sont intéressés très tôt, dès le début du XX^{e} siècle, aux possibilités d'applications des concepts probabilistes à l'actuariat, notamment la notion de quantité aléatoire variable avec le temps, susceptible de modéliser l'évolution des bilans d'une société mais aussi d'un compte client, c'est la « théorie mathématique du risque », née avec Lundberg (voir Cramér,1930).

Guldberg a été conférencier à l'IHP au printemps 1932 sur l'invitation de Fréchet, voir A. Guldberg, Les fonctions de fréquence discontinues et les séries statistiques, *Ann. Inst. H. Poincaré*, III (1933), pp. 229-278, et Sur les lois de probabilités et la corrélation, ibid., V (1935), pp. 159-176. Maurice Fréchet a profité du congrès de Bologne et de quelques autres pour se lier avec tous ceux qui lui paraissaient prêts à participer aux efforts boréliens d'applications de la théorie mathématique des probabilités à toutes les sciences. Il les invitera à participer aux conférences de l'IHP, publiées dans les premiers volumes des *Annales de l'Institut Henri Poincaré*, fondées en 1929, lors de l'ouverture de l'IHP. Là encore Bologne est une clé. Ce n'est évidemment pas la seule, par exemple Johann Frederick Steffensen (1873-1961), professeur de Mathématiques actuarielles à l'Université de Copenhague, n'est pas à Bologne. C'est pourtant un des correspondants de Fréchet, conférencier à l'IHP en 1931 et au colloque de Genève de 1937. Sur son œuvre, on verra A. Hald (2002), qui a été son élève.

I.13 B. Hostinský (Brno) : *Sur les probabilités des effets qui dépendent d'une suite indéfinie de transformations successives prises au hasard.*

Nous n'en dirons rien de plus.

I.14 C. Jordan (Budapest) : *Sur l'interpolation.*

Charles (Károly) Jordan, (1871-1959), est le fondateur de l'École hongroise de statistique et de calcul des probabilités. Il a étudié à Budapest, Paris, Zurich, Manchester et Genève où il soutient une thèse de Chimie physique en 1899. Retourné à Budapest, il dirige l'Institut de Sismologie et commence à s'intéresser au calcul des probabilités et à la statistique, domaines auxquels ils se consacrera totalement après la première guerre mondiale. En 1923 il devient privat dozent à l'Université des Sciences techniques et économiques de Budapest, il sera professeur en 1933. Son traité de Statistique mathématique (1927b) est le premier ouvrage de cette nature publié en langue française, et à Paris. On verra Hald (2002, p. 72-75) pour une analyse des aspects les plus nouveaux de ce livre. Pour une analyse générale de l'œuvre de Jordan on verra Takács (1961) qui détaille, p. 3-4, sa communication de Bologne. Aussi Hald (1998).

Charles Jordan était féru d'histoire des mathématiques. Il possédait une collection remarquable d'éditions originales, dont la première édition de 1494 de la *Summa de Arithmetica, Geometria ....* de Luca Pacioli. Sa bibliothèque de plus de 5 000 ouvrages a été entièrement détruite par un obus de char soviétique, pendant la Révolution hongroise d'octobre 1956.

I.15 R. Kuzmin (Leningrad) : *Sur un problème de Gauss.*

Rodion Ozievich Kuzmin (1891-1949), est un très grand spécialiste de théorie analytique des nombres. Il a fait ses études à Petrograd. Après avoir enseigné à l'Université de Perm (où une partie de l'Université de Pétrograd était repliée pendant la guerre civile), il est depuis 1922 professeur à l'École polytechnique de Leningrad. Sa communication résout un très célèbre problème de théorie métrique des fractions continues, qui a suscité un grand nombre de travaux dans les années trente, notamment ceux de Lévy, Khinchin et surtout Doeblin. Voir par exemple P. Billingsley, *Ergodic Theory and Information*, New York : Wiley, 1965, pp. 40-50, pour l'exposé du problème de Gauss et des références. Ce type de résultats était depuis Borel (1909a, 1912a) intégré au calcul des probabilités, ce qui explique sa présence en sous-section IVA. Il se rattache maintenant à la « Théorie ergodique », une théorie mathématique, abstraite, que l'on pourrait sans doute rattacher à Bologne si cela avait une quelconque importance.

I.16 P. Luzzato-Fegiz (Bologna) : *Osservazioni sulle curve protogenetiche.*

Pierpaolo Luzzato-Fegiz (1900-1989), statisticien économiste démographe italien. Après avoir étudié le droit à Bologne, il a enseigné la statistique aux universités de Bologne, Trieste et Rome. C'est un de ceux qui ont introduit les sondages à la Gallup en Italie. Son œuvre écrite est très importante. Il ne paraît pas avoir parlé dans la section IVA.

I.17 L. March (Paris) : *Note sur la corrélation.*

Lucien March (1859-1933) est un polytechnicien de la promotion 1878. Il est devenu en 1907 chef de la Statistique Générale de la France (SGF) jusqu'à sa retraite en 1919. Il a constamment milité pour le développement et l'enseignement de la statistique en France. C'est l'un des fondateurs de l'ISUP, dont il a été le premier directeur des études et où il a enseigné jusqu'à sa mort un cours de Méthodes statistiques qui a donné lieu à la publication d'un intéressant ouvrage (1930).

Sur lui et son action à la SGF, on verra particulièrement Desrosières (1993). Lucien March, l'un des premiers en France, s'est intéressé aux travaux de Karl Pearson dont il a traduit la *Grammaire de la Science* en 1912. Cet intérêt s'est particulièrement porté sur la question de la corrélation. On en trouve l'expression dans son traité (1930) et dans cette conférence de Bologne. Sa bibliothèque se trouve toujours à l'ISUP, elle comporte un certain nombre des livres dont il a rendu compte pour le Journal de la *Société de Statistique de Paris*, notamment le traité de Bachelier (1912), l'un des traités probabilistes les plus étonnants qui soient, mais que personne en France (excepté March) ne paraît avoir remarqué.

I.18 E. C. Molina : *Application to the binomial summation of a Laplacian method for the evaluation of definite integrals.*

Edward C. Molina (1877-1954) est ingénieur à l'American Telephone and Telegraph Company (AT&T) où il a fait toute sa carrière. C'est avec T. C. Fry, W. A. Shewhart, L. A. MacColl, A. Fisher (qui est présent à Bologne dans la sous-section IVB), H. Nyquist, H. F. Dodge, H. G. Romig et quelques autres l'un de ceux qui ont développé aux États-Unis dans les années vingt les applications industrielles de la statistique et du calcul des probabilités. Il s'agit d'appliquer le plus prosaïquement du monde la théorie classique des probabilités, celle de Laplace et Poisson, et la statistique anglo-saxonne, notamment celle de Fisher dont le premier livre *Statistical methods for research workers* va être lu et mis en œuvre dès sa publication en 1925. On verra sur cette question le livre de Fry (1928) et la biographie de Shewhart écrite par D. Bayart dans Heyde, Seneta (2001, p. 398-401). Les ingénieurs américains ne sont pas les seuls ni les premiers à avoir développé les applications industrielles du calcul des probabilités, les artilleurs italiens ou français, les ingénieurs scandinaves ou les brasseurs britanniques, par exemple, les avaient précédés assez largement. Toutefois, intervenant au bon moment et sur une échelle convenable, ils vont donner à ce type de travaux appliqués un développement considérable, qui va, en retour, modifier la théorie elle-même (décision séquentielle, contrôle de fabrications, etc.). Sur l'histoire des statistiques américaines on verra Stigler (1978, 1996, 1999).

Molina est particulièrement connu pour ses travaux sur les problèmes d'attente téléphonique qui l'ont conduit à établir des tables binomiales et poissonniennes très étendues. Il semble bien que ce soit ce problème pratique qui l'ait amené à s'intéresser aux travaux entrepris par Laplace plus d'un siècle auparavant. Molina va dès lors être saisi d'une passion dévorante pour Laplace. Ses études laplaciennes sont certainement les plus fines et les plus intéressantes de son temps (et de toujours), *e. g.* [1930]. Sa conférence à Bologne impressionna beaucoup Fréchet qui correspondit avec Molina jusqu'à la mort de ce dernier, principalement sur des questions de priorités historiques (françaises) qui l'intéressaient beaucoup. C'est Molina qui persuada Fréchet que le théorème central limite se trouve bien dans la *Théorie analytique*, avec une démonstration certes elliptique mais assez juste sur le fond. Fréchet en persuaderait à son tour Paul Lévy qui en doutait fort. On verra à ce sujet l'édition de la correspondance Lévy-Fréchet à paraître : Barbut *et al.* (2003).

I.19 J. Neyman (Varsovie) : *Contribution à la théorie des probabilités des hypothèses.*

Jerzy Neyman (1894-1981) n'a pas non plus besoin d'être présenté. On verra les articles qui lui sont consacrés dans Droesbeke, Tassi (1990), Johnson Kotz (1997) et Heyde, Seneta (2001) et surtout la biographie de Constance Reid (1982) qui donne de très nombreuses informations sur sa vie et son œuvre. En 1928, Neyman est docent à l'Université de Varsovie et enseigne au Collège central d'Agriculture. Il a passé l'année 1926/1927 à Paris et à Londres comme boursier Rockefeller. À Londres il a commencé une collaboration avec Egon Pearson qui va durer dix ans. Leur premier article sur la théorie des tests d'hypothèses a été publié en juillet 1928 dans la revue de Karl Pearson, Biometrika. Neyman présente à Bologne les premiers résultats de ce travail commun en précisant ses sources historiques et ses bases. Pour plus de détails sur cette communication, on verra par exemple *Matapli*, 60 (1999), p. 51-60.

I.20 G. Polya (Zürich) : *Ueber eine Eigenschaft des Gaussches Fehlergesetzes.*

George Pólya (1887-1985) a été élève à Budapest du très grand mathématicien Lipót Fejér (1880-1959), l'un des pères de l'Analyse de Fourier moderne. Pólya est devenu lui-même assez vite un des très bons analystes du XX^{e} siècle. Son œuvre est considérable. Il existe plusieurs livres et articles le concernant, on verra par exemple H. Taylor, L. Taylor, *George Pólya : Master of Discovery*, Palo Alto, 1993.

En 1928, Pólya est professeur à l'École polytechnique de Zurich qu'il a rejointe en 1914 à l'invitation d'Adolf Hurwitz. Ses premiers travaux probabilistes remontent au début de ses années zurichoises. Ils sont d'un grand intérêt. On lui doit le premier énoncé rigoureux liant la convergence des lois à la suite de leurs fonctions caractéristiques (1920), avant même les énoncés de Lévy (1922). Ses travaux sur les modèles d'urnes et sur les promenades aléatoires (autant de thèmes markoviens) sont bien connus. On verra la bibliographie à ce sujet. Pólya a été conférencier de théorie des probabilités de l'IHP en mars 1929. La première partie de ses conférences (1929) est consacrée à une propriété caractéristique de la loi de Gauss, c'est-à-dire au développement de son exposé de Bologne.

Signalons son album de photographies dans lequel figurent nombre des participants au Congrès de Bologne, G. L. Alexanderson, The *Polya picture album*, Basel, 1987. Dans le même ordre d'idées, on verra D. J. Albers, G. L. Alexanderson, C. Reid, *International Mathematical Congress. An Illustrated History, 1893-1986*, New York-Berlin : Springer, 1987.

I.21 V. Romanovsky (Tachkent) : *Sur le calcul des moments des moyennes des fonctions des variables aléatoires pour les épreuves indépendantes.*
Sur la généralisation des courbes de Pearson.
Sur la comparaison des moyennes des variables aléatoires dépendantes pour les épreuves indépendantes.

Vsevolod Ivanovich Romanovsky (1879-1954) est né à Alma-Ata. Il a fait ses études à l'Université de Saint Pétersbourg. Après avoir enseigné à l'Université de Varsovie et celle du Don, il est nommé en 1918 professeur à l'Université d'Asie Centrale à Tachkent. Ses travaux sont essentiellement consacrés à la statistique mathématique et au calcul des probabilités. On verra Sheynin (1996, 1998) pour des précisions sur sa vie et son œuvre et Hald (2002) pour une analyse de certains de ses travaux statistiques, notamment ses exposés de Bologne. Romanovsky a correspondu avec un nombre important de statisticiens mathématiciens européens avant 1932. Signalons une intéressante lettre de Romanovsky à R. A. Fisher (qu'il a rencontré à Bologne : Bennett, 1990, p. 200-201). Romanovsky soutient que « *your maximum likelihood is, if not logically, analytically very closely connected with the inverse probability* ».
À partir de 1929, on l'a dit, Romanovsky se consacre à l'étude des chaînes de Markov, dont il devient un grand spécialiste. Il correspond régulièrement sur ce thème avec Fréchet qui a reçu tous ses travaux. Romanovsky a formé notamment le probabiliste ouzbek T. A. Sarymsakov, dont les travaux markoviens sont bien connus.

I.22 E. Schoenbaum (Prague) : *Une contribution à la théorie de l'ajustement mécanique.*

Emil Schoenbaum est un condisciple de Hostinský. Il a fait ses études mathématiques à Prague où il a soutenu sa thèse en 1906, puis à Vienne et à Göttingen. En 1919, il est nommé Docent à l'Université tchèque de Prague, et, en 1923, professeur de Mathématiques actuarielles dans cette même université. Il fonde, en 1929, au retour de Bologne, une revue d'actuariat mathématique (sur le modèle scandinave et italien), *Aktuárské Vedy*, à laquelle Fréchet contribuera en 1934. Lors de l'occupation allemande de Prague en 1939, il réussit à fuir pour Paris et l'Équateur où il reste jusqu'en 1945, date à laquelle il retrouve ses fonctions professorales à l'Université de Prague. Schoenbaum est l'auteur d'un très grand nombre de travaux d'actuariat mathématique (Poggendorff en donne la liste). Hostinský le tenait en grande estime et le recommande à Fréchet dès ses premières lettres de 1919.

I.23 F. Sibirani (Trieste) : *Ricerca della maxima probabilità nel problema delle prove nel caso di m eventi indipendenti di probabilità costante.*

Filippo Sibirani (1880-1957) a fait des études de mathématiques à l'Université de Bologne. Après avoir enseigné à Milan, Parme, Bologne et Pavie, il est nommé en 1922 professeur de Mathématiques financières à l'Université de Trieste où il reste jusqu'en 1929. Il enseigne ensuite à l'Université des sciences économiques et commerciales de Bologne. Ses travaux portent sur divers thèmes de mathématiques pures et appliquées. On verra Naddeo (1987, p. 159-229) pour une analyse de ses travaux sur l'interpolation, publiés dans le *Giornale dell'Ist. Ital. Att.*

I.24 E. Slutsky : *Ueber die kompakten zufälligen Funktionen.*

Evgenii Evgenievich Slutsky (1880-1948) est l'un des statisticiens mathématiciens les plus originaux et les plus importants de la première moitié du xx^e siècle. Son œuvre est très riche aussi bien en économétrie qu'en statistique mathématique et en calcul des probabilités. On verra à son sujet Sheynin (1996, 1998, 2002), Heyde, Seneta (2001 p. 343-345) et la thèse de Bernard Locker (2001, p. 319 et suivantes).

En 1928, Slutsky est à Moscou depuis deux ans, où il travaille à l'Institut de conjoncture et à l'Office Central de Statistique. Il enseigne à l'École polytechnique de Moscou. Peu de temps avant Bologne, il a publié une note aux *Comptes rendus* (1928a), dans laquelle il défend la priorité de Borel dans l'énoncé et la démonstration (rapide) du « théorème de Borel », c'est-à-dire, dans le cadre probabiliste, de la loi forte des grands nombres pour le jeu de pile ou face. Cantelli, qui s'en estimait le véritable auteur, défendit son point de vue avec sa vivacité coutumière, lors de sa conférence à la sous-section IVA de Bologne. On imagine l'émoi causé par l'événement, qui frisait l'incident diplomatique. Cette histoire est très bien racontée dans Seneta (1992) et Heyde, Seneta (2001, p. 344).

Comme il se doit en de telles circonstances, les choses sont évidemment assez embrouillées, et tout le monde a raison et tout le monde a tort. C'est incontestablement Borel qui a vu et qui a énoncé le théorème de Borel sur les nombres normaux, le premier résultat identifiable de théorie métrique des nombres : dans le développement décimal de presque tout nombre compris entre 0 et 1, la fréquence d'apparition des dix chiffres est (asymptotiquement) la même. Il s'agit d'un résultat purement arithmétique et d'ailleurs exact. Mais Borel énonce en même temps son résultat sous forme probabiliste (et c'est d'ailleurs sous cette forme que visiblement il l'a vu en premier lieu) : si on tire à pile ou face les décimales successives d'un nombre compris entre 0 et 1, la probabilité d'obtenir asymptotiquement des fréquences égales est un ou la certitude. Borel ne considère pas que les résultats arithmétiques et probabilistes soient identiques, mais ils sont évidemment liés et, pour Borel, le résultat arithmétique sera une des « applications » de la théorie des probabilités à celle des nombres, tout cela vu de très haut et de très loin. De plus, la démonstration de Borel comporte deux lacunes que Lebesgue lui a signalées aussitôt dès 1908 dans une lettre qui a été publiée par Pierre Dugac dans sa belle édition érudite de la correspondance de Lebesgue et Borel, une correspondance extraordinaire, la plus étonnante de l'histoire des mathématiques, qui doit être rééditée prochainement, sous forme réduite, par la Librairie Vuibert. Borel, en effet, affirme sans démonstration que la somme des probabilités d'une certaine suite d'événements converge, première lacune, et il en déduit qu'avec probabilité unité, un nombre fini de ces événements sont réalisés, alors qu'il n'a démontré ce fait (le lemme de Borel) que pour des événements indépendants, deuxième lacune. Borel répondit à

Lebesgue que, dans ce cas, cela n'avait pas d'importance (sic). Quant à la convergence de ladite série, Lebesgue lui-même lui accordait qu'elle était certaine quoique vraisemblablement ennuyeuse à écrire. Lebesgue lui indiquait rapidement une autre démonstration, purement géométrique celle-là, de la version arithmétique du théorème, sans doute la première du genre avant même que l'article de Borel ne parût en 1909. Borel ne consentit jamais à corriger son texte, même dans les dernières éditions (des années cinquante) de ses innombrables livres qui reproduisent à l'identique l'article magnifique mais trop exclusivement borélien (1909a). Aucun analyste du temps ne douta d'ailleurs, un seul instant, de la véracité et de la nouveauté radicale du théorème arithmétique de Borel qui fut presque aussitôt nommé « théorème de Borel » et démontré rigoureusement, dans le cadre mathématique de la mesure de Borel, par Faber, Hausdorff, Hardy, Rademacher, etc. La version probabiliste du théorème de Borel paraît avoir été reconsidérée pour la première fois par Cantelli (1916, 1917) avec une démonstration beaucoup plus convaincante, consistant, on l'a dit, à utiliser sa partie à lui du lemme de Borel (celle des événements dépendants) et à démontrer de façon très intelligente la convergence de la série de Borel. Personne ne saurait contester ce point, et l'apport de Cantelli est évident et remarquable. Cependant Cantelli se place dans un cadre « probabiliste » abstrait, la probabilité se calcule par des règles uniformes, les règles classiques revues par Borel, mais elle n'est pas rattachée à l'Analyse mathématique moderne, de sorte qu'elle n'existe pas pour un mathématicien ordinaire. La démonstration très rigoureuse de Cantelli est en équilibre instable. Pour lui donner une assise raisonnable et lui rendre sa force, il aurait fallu par exemple construire mathématiquement la probabilité sur l'espace produit infini d'exemplaires du couple 0, 1, c'est-à-dire utiliser le théorème de Daniell-Kolmogorov que ce dernier mettrait à la base de son livre (1933), et qui permet, en effet, de démontrer en toute rigueur une loi forte des grands nombres beaucoup plus générale que celle de Borel et Cantelli. Auparavant, Steinhaus (1923) avait explicité mathématiquement les liens aperçus par Borel, entre les « probabilités dénombrables » de Borel et la « théorie de la mesure » de Borel, liens que Borel lui-même estimait inutile de préciser. La probabilité n'a nul besoin d'axiomatisation, elle doit se calculer au cas par cas, sans chercher à se hausser le col en compagnie des « hautes mathématiques », où elle n'a rien à gagner et tout à perdre. En revanche, ces dernières peuvent tirer le meilleur profit du calcul des probabilités, le théorème de Borel en est la meilleure preuve.

Sans doute informé à Bologne de cette difficulté, Cantelli présentera en 1932 une axiomatique assez proche de celle de Steinhaus, qui permet de lier le théorème arithmétique de Borel, démontré par Hausdorff et la loi forte des grands nombres de Borel, revue par Cantelli qui anticipe en certains points l'axiomatique de Kolmogorov (Cantelli, 1935). C'est du moins le point de vue défendu par G. Ottaviani dans sa conférence du Colloque international du CNRS *Le calcul des probabilités et ses applications*, qui s'est tenu à Lyon du 26 juin au 3 juillet 1948. Fréchet, qui présidait le Colloque, toujours vigilant, tint à saluer les travaux du grand « probabiliste » Cantelli mais aussi la « révolution apportée par Émile Borel » qui tire son origine de la notion même de *mesure*

« laquelle est bien due à Émile Borel et non à un autre 'probabiliste', tout en ajoutant fort honnêtement que « M. Ottaviani a bien voulu m'informer qu'il n'était pas entièrement d'accord avec les considérations précédentes, que d'ailleurs je maintiens. »

Borel se tint tout à fait en dehors de la polémique. Fréchet, on l'a vu, et Lévy après lui, ont toujours mis en avant la priorité de Borel et l'importance déterminante de son article sur les probabilités dénombrables. Fréchet s'est d'ailleurs efforcé de rétablir pas à pas (assez péniblement) la démonstration originale de Borel dans son premier traité (1936b). Il existe des versions beaucoup plus rapides et efficaces de la même démonstration dans la plupart des grands traités actuels, à commencer par celui d'Uspensky (1937). Mais la démonstration de Cantelli (les quatrièmes moments) conserve tout son charme et Cantelli tout son génie.

La conférence bolognaise de Slutsky, exposée en français dans les Actes (1932), est très remarquable, elle présente en effet une théorie des fonctions aléatoires qui annonce la théorie des processus de la fin des années trente et suivantes. Il serait trop long de rappeler l'histoire du concept de fonction aléatoire que l'on peut faire remonter au début du XX[e] siècle et qui ne prend sa forme mathématique stable que dans la seconde moitié du siècle. On verra à ce sujet Sheynin (2002) et Locker (2001) pour une analyse de la théorie de Slutsky.

I.25 F. M. Urban : *Das Mischungsproblem des Daniel Bernoulli.*

La conférence de F. M. Urban traite des mélanges de boules de Daniel Bernoulli. un thème typiquement markovien reconsidéré indépendamment par Markov et par les physiciens de l'École de Leyde dix ans auparavant. Le point le plus intéressant en est le rappel que fait l'auteur de son traité de 1923 sur l'utilisation de la « méthode des moyennes » pour traiter rapidement d'un tel problème. Hostinský aurait ainsi pu trouver dès 1923 chez son compatriote Urban la source de ses travaux, mais ce n'était guère concevable. En ce temps là Hostinský n'était pas prêt et en supposant qu'il l'eût été il n'était pas imaginable de fonder l'École de Brno sur les travaux d'un représentant de l'Empire. Urban très diplomatiquement cite dans sa conférence de Bologne les travaux de Hostinský qui, selon lui, considère des urnes à nombre infini de boules plus proches des réalités d'un mélange de fluide (en fait l'originalité profonde de Hostinský n'est pas vraiment là puisque de nombreux auteurs avant lui ont déjà utilisé, pour traiter de ces questions, « l'algorithme infinitésimal », à commencer par Daniel Bernoulli et jusqu'à Bachelier dont c'est l'idée directrice, l'apport original de Hostinský est de montrer que dans le cas continu également on peut démontrer directement un théorème ergodique simple et général et que dès lors une « théorie ergodique » est possible à l'intérieur des mathématiques continues).

Qui est « F. M. Urban » et que vient-il faire dans cette galère? Les Actes du Congrès nous informent qu'il est inscrit à titre privé comme « docteur », résidant à « Brünn ». Sa biographie est étonnante et mérite d'être rappelée ici. Elle a été reconstituée par Ertle *et al.* (1977) à partir du témoignage des deux filles d'Urban, Ingeborg et Adele-Maria (Cette référence m'a été communiquée par Steve Stigler, que je remercie infiniment). Né à Brünn le 28 décembre 1878, dans une famille aisée de culture allemande, son père est banquier, Friedrich Urban fait ses études secondaires au Gymnasium de Brünn; il étudie ensuite la philosophie à Vienne où il soutient en 1902 une thèse d'esthétique (a-t-il suivi les cours de Czuber?), puis à Leipzig, il y aurait présenté une seconde thèse de probabilité. Il travaille avec le psychologue W. Wirth – et peut-être l'astronome H. Bruns, 1848-1919, l'un des maîtres de la théorie des «Collectifs» de Fechner (Bruns, 1906; Stigler, 1986). Il part pour les États-Unis peu de temps après et s'établit à Philadelphie où il enseigne jusqu'en 1914 la psychologie expérimentale dans le tout nouveau Laboratoire de psychologie de l'Université de Pennsylvanie. Il publie alors d'intéressants travaux de statistique appliquée à la psychophysique (1907, 1908, 1909, 1910) – voir à ce sujet Stigler (1986) et Ertle *et al.* (1977). Son cours de probabilité doit dater de ces années-là; il a été publié en allemand en 1923 alors que Urban réside à Brno. Urban s'est en effet marié à Brünn au début de l'été 1914. Il est en voyage de noces en Suisse au moment de la déclaration de guerre et ne peut regagner les États-Unis. Il passe trois ans à Göteborg (où Smetana fut directeur musical de 1856 à 1861). En 1917, revenu à Brünn, il est mobilisé dans l'Armée autrichienne (son journal de guerre a été localisé mais n'a jamais été publié). Après l'Armistice, dans l'impossibilité d'obtenir un visa pour les États-Unis, il semble qu'il ait cherché à travailler à l'Université Masaryk mais que sa mauvaise connaissance de la langue tchèque l'en ait empêché (Ertle *et al.*). Version édulcorée d'une histoire classique. Le responsable du département de psychologie de l'Université Masaryk est Mihajlo Rostohar (1878-1966) un slovène germanophone qui a étudié la psychologie expérimentale allemande avec Meinong et Wundt mais a eu la chance d'être maître de conférences (docent) de Masaryk à Prague avant la guerre. Pour être nommé à l'Université Masaryk où les places sont rares, il fallait être à Prague avant 1914, et non à Philadelphie, et de préférence avoir de bonnes relations avec Masaryk et quelques affinités slaves. Ce qui ne diminue en rien les vertus de Rostohar (qui devait parler tchèque comme un basque espagnol) mais explique assez que les chances d'Urban d'accéder à l'Université de Brno, sa ville, étaient quasiment nulle. Pourtant ses mérites sont évidents et il paraît avoir possédé au moins autant que Hostinský cet enthousiasme rayonnant pour la science, particulièrement celle des probabilités. Urban était en trop et il le comprit vite. Ses compétences statistiques manifestes lui permettent heureusement de devenir actuaire (comme Cantelli, de Finetti, Cramér, etc.). Bien qu'isolé à Brno et pris par ses activités professionnelles et sa vie familiale, Urban continue de publier assez régulièrement dans les journaux américains de psychologie (1921,1927). Il a également le projet d'écrire un grand ouvrage sur les applications du calcul des probabilités, mais il est assez vite dépassé par l'ampleur de la tâche qui fuit devant lui plus vite qu'il ne peut la saisir. En attendant, il traduit en allemand le traité de Coolidge et celui de Keynes. Une lecture rapide de ses écrits montre que Urban a une connaissance directe des grands textes de la théorie des probabilités, Gauss notamment, Laplace aussi qu'il cite à bon escient. Urban considère notamment que l'habitude prise par ses collègues d'appeler hypothèse gaussienne l'assimilation d'une répartition empirique à la loi de

« Gauss » est une absurdité historique que Gauss aurait lui- même dénoncée, il propose de lui substituer l'expression « hypothèse phi-gamma », par imitation des notations classiques $\phi(\gamma)$ de la densité gaussienne (Urban, 1911).

La présence d'Urban au Congrès de Bologne s'explique vraisemblablement par le titre de la section IV, Sciences actuarielles, qui devait intéresser la maison d'assurance où il travaillait. Heureux titre qui permit à Urban de revendiquer, à tort et à raison, la méthode des moyennes dont Hadamard le crédite généreusement dans son texte écrit de Bologne (1931, p. 134) et après lui Lévy, Fréchet et d'autres jusqu'à ce que Hostinský (1931a) n'indique que Markov avant lui l'avait utilisée (et Borel aussi et d'autres encore qui n'ont pas eu la possibilité de se manifester). Urban et Hostinský, symboles de deux univers culturels moraves, fascinés tous deux par les mélanges d'urnes, les événements en chaîne et l'acoustique psychologique, habitant la même ville, se sont finalement rencontrés à Bologne en 1928. Peut-être étaient ils entrés en relations scientifiques quelque temps auparavant puisque Hostinský cite Urban dans la première rédaction complète de ses résultats (1928c) dont la date de publication doit se situer au début du printemps 1928. Nous ignorons de quelle façon Hostinský a eu connaissance du livre de Urban. Il y a plusieurs scénarios imaginables basés sur deux dates approximatives, en février 1928 Hostinský ne connaît pas le livre d'Urban, en mars il le cite pour la méthode des moyennes (1928c, p. 7 note en bas de page : « *Cette propriété [des moyennes] a été signalée par M. F. A. Urban dans son livre (1923, p. 168)* ». On remarque que Hostinský utilise les initiales F. A. qui ne correspondent pas aux prénoms d'Urban qui se faisait appeler Friedrich Maria, mais qui se prénommait en réalité Friedrich Johann Victor. Faute typographique ou simple inadvertance de Hostinský qui semble ne pas connaître l'auteur qu'il cite). Hostinský aurait alors pu convaincre Urban de venir présenter ses travaux à Bologne où ils auraient été informés (mettons par Pólya ou Bernstein) que Markov utilisait déjà la méthode des moyennes dans ses travaux, etc. On peut imaginer d'autres scénarios, par exemple suivre la piste actuarielle à partir du traité de Du Pasquier (1926) qui cite Urban (1923) à plusieurs reprises, notamment pour les fondements axiomatiques (ensemblistes) de la théorie mathématique des probabilités et ses rapports avec l'expérience, qui a joué un rôle important au Congrès de Bologne et qui aurait pu suggérer le nom d'Urban aux organisateurs de la Section IV. (Mais Urban ne paraît pas avoir apprécié les emprunts de Du Pasquier à sa propre théorie, il s'en plaint à Fréchet dans une longue lettre écrite, comme tous ses manuscrits, sur du papier pelure facilement reconnaissable). On peut noter incidemment que presque tous les auteurs d'axiomatiques ou de fondements du calcul classique des probabilités sont présents à Bologne, à l'exception de von Mises et de ses partisans qui se manifesteront davantage dans les années trente et notamment au Colloque de Genève (avec les interventions de Wald et Feller et les travaux de Copeland, Tornier, Popper, et bien sûr ceux de Mises lui-même). On rencontre à Bologne (par ordre chronologique d'axiomatique) Broggi, Bernstein, Slutsky, Urban, Du Pasquier, mais aussi Antoni Lomnicki (1881-1941), Hugo Steinhaus (1887-1972) et quelques autres. La pierre d'achoppement de toutes ces axiomatiques de type ensembliste est la possibilité d'une démonstration complète de la loi forte des grands nombres. À cet égard l'axiomatique de Kolmogorov dépassera ce premier obstacle (et probablement celle de Cantelli aussi) mais butera bientôt sur la théorie générale des processus, en particulier la théorie markovienne. Ce qui freinera quelque peu son essor remarquable jusque vers le milieu des années cinquante, mais nous sortons de notre sujet.

Quoiqu'il en soit, Urban paraît avoir cessé de publier des travaux scientifiques pendant les vingt années qui ont suivi le Congrès de Bologne, les chaînes de Markov-Hostinský-Urban sont devenues affaire de spécialistes et Urban n'a pas le temps ni l'opportunité d'en suivre les développements. Il réussit à survivre à la guerre, en restant à Brünn ; certes il est « allemand » mais sa femme est juive (il est antinazi à la différence de son frère qui a pu reprendre la banque familiale et qui devra s'exiler en Amérique du Sud en 1945). En revanche la Libération est difficile pour lui, sa maison a été détruite par les bombardements alliés, il est emprisonné deux fois (une première fois par les Russes, une seconde par les Tchèques). Grâce à l'intervention du président Benes, alerté par ses anciens collègues et amis américains et anglais (et pourquoi pas Hostinský sauvant Urban au nom de leur passion commune), F. M. Urban échappe à « l'expulsion organisée » de la minorité allemande approuvée à Potsdam (au cours de laquelle 2 256 000 Allemands furent évacués de Tchécoslovaquie de janvier à novembre 1946), mais il doit quitter définitivement Brno en 1948 avec sa femme (ses deux filles ont pu gagner les États-Unis peu avant le conflit grâce à l'intervention efficace d'un psychologue de Philadelphie, ancien élève d'Urban, S. W. Fernberger). Il part pour le Brésil avec sa fille aînée qui a épousé un diplomate britannique. Il donne une série de conférences sur l'analyse factorielle à l'Université de Sao Paulo, (Urban est en contact régulier depuis longtemps avec Godfrey Thomson, L. L. Thurstone, R. M. Yerkes ...) et publie de nouveau [1950a,b]. En 1955, il s'établit en France chez sa plus jeune fille, Adèle Marie Guéritaud, avec qui nous avons eu le plaisir de correspondre peu de temps avant sa mort en 1999. F. M. Urban est mort chez elle à Maisons-Laffitte, le 4 mai 1964.

I.26 S. D. Wicksell (Lund) : *Mathematical Aspects of Population Problems.*

Sven Dag Wicksell (1890-1939) est un actuaire mathématicien suédois. Il est professeur à l'Institut de statistique de l'Université de Lund. C'est un de ceux qui collaborent régulièrement à la revue scandinave d'actuariat. Ses travaux de statistique mathématique sont importants ; on verra Hald (2002) pour une analyse de certains d'entre eux. Wicksell reste connu actuellement pour le « Wicksell's corpuscle problem » relatif à l'estimation de la loi des tailles des tumeurs cancéreuses. On verra, par exemple, P. Groeneboom, G. Jongbloed, Isotonic estimation and rates of convergence in Wichsell's problem, *Ann. Stat.*, 23 (1995), p. 161-183, et P. R. Mouton, *Principles and Practices of Unbiased Stereology*, Baltimore : The John Hopkins University Press, 2002. L'article original de Wicksell sur ce sujet est paru dans la revue de Pearson, *Biometrika*, 17 (1925), pp. 84-99. Wicksell s'est également intéressé à la statistique stellaire. On sait qu'à Lund travaillait le grand astronome statisticien Carl

Vilhelm Ludvig Charlier (1862-1934) qui a notamment collaboré au *Traité* de Borel, on verra à ce sujet Hald (2002).

I.27 E. Zylinski – (Leopoli) : *Numbers of Fibonacci in biological statistics.*

E. Zylinski est professeur à l'Université de Lwów. Il appartient à la célèbre École mathématique de Lwów, celle de Banach, Steinhaus, Ruziewicz Niklibor, Schauder, Kaczmarz, Orlicz, Auerbach, Mazur, ... On verra à ce sujet Ulam (1976). Il ne semble pas que Zylinski ait publié d'autres travaux statistiques et nous ne savons rien de lui.

II. Liste complémentaire des orateurs de la sous-section IVA (Congrès 1929, 1932).

II.1 U. Broggi : *Su di un problema di perequazione.*

Ugo Broggi (1880-1965) est inscrit dans le programme prévisionnel de 1928 comme conférencier de la sous section ID (fonctions analytiques) sans doute parce que sa communication touchait aux polynomes d'Hermite. Il a peut-être demandé à être déplacé en section IV, son domaine naturel. Ugo Broggi est un auteur intéressant. Il a d'abord étudié en Italie les sciences actuarielles et les sciences économiques. Il soutient, en 1907, à l'Université de Göttingen, sous la direction de David Hilbert, une thèse de mathématiques intitulée *Die Axiome der Warscheinlichkeitsrechnung.* Il semble bien que ce soit l'une des premières tentatives d'axiomatisation du calcul des probabilités dans un cadre explicitement ensembliste, un sujet qui intéressait Hilbert à l'époque où il souhaitait (comme Poincaré mais d'une autre façon) donner une assise mathématique convenable à la théorie de Boltzmann.

Après avoir soutenu une autre thèse en philosophie, il part en 1910 en Argentine où il s'établit. Il est professeur de mathématiques et de statistique dans divers établissements d'enseignement supérieur à Buenos Aires et à l'Université de La Plata. Son œuvre en économie mathématique est importante, on verra l'article très informé sur la période argentine de Broggi, Manuel Fernández López, Ugo Broggi, a Neglected Precursor in Modern Mathematical Economics, http :/www.aaep.org.ar/espa/anales/resumen 00/lopez.htm où l'on peut télécharger le texte complet.

À la fin de l'année 1927, Ugo Broggi rentre en Italie. Il paraît avoir été fasciné par la personnalité de Mussolini et l'euphorie intellectuelle et artistique des premières années du fascisme italien. Dans les Actes du Congrès de Bologne, Broggi est présenté comme étant professeur à l'Université de Milan où il reste, semble-t-il jusqu'en 1945. Sa période fasciste est peu connue et peu étudiée.

II.2 H. Koeppler : *Die Different ialgleichungen des normalen Verteilungsgesetzes des betrachteten Eigenschaften bei einer hinreichend grosser Anzahl von Vertreteren einer Gattung.*

Hans Koeppler, comme Broggi, figure dans la sous section ID sur le programme de 1928. Nous ignorons pourquoi il a été transféré en section IV. La section

I était la plus chargée du congrès avec 4 sous-sections et de très nombreux intervenants ; le transfert de Broggi et Koeppler la soulageait quelque peu. Nous ne savons absolument rien de Hans Koeppler, si ce n'est ce que nous en disent les Actes de 1929 qui le présentent comme professeur à Berlin, sans autres précisions. Koeppler a publié de 1929 à 1938, divers articles dans des revues de statistique et d'actuariat mathématique, en particulier dans le *Zeit. Vers. Wiss.* de 1929 où il est précisé qu'il est Mathématicien à Berlin, dans Metron (1935, 1936), dans le *Giornale dell'Ist. Ital. Act.* (1933) et dans la revue de Schoenbaum, *Aktuárské Vedy.* Il semble qu'il se soit exilé en Grande Bretagne en 1933, en même temps que la comédienne Gerda Koeppler.

L'exposé de Koeppler à Bologne reproduit dans les Actes (1932) est remarquable en ce qu'il exploite l'une des idées fondamentales de Bachelier (que l'on trouve déjà chez Laplace mais de façon beaucoup moins nette), à savoir le lien qui existe entre les lois normales et les équations aux dérivées partielles du type parabolique. On pourrait imaginer que Khinchin ait saisi aussitôt l'intérêt et la nouveauté de ce genre d'idée en analyse et en théorie des probabilités et qu'il ait pris connaissance à cette occasion du grand traité de Bachelier (1912) cité par Koeppler. Quoiqu'il en soit, dès 1929, Kolmogorov, Bernstein et lui-même reprendront la même idée (en la rapportant explicitement à Bachelier) et en feront l'un des thèmes dominants de la théorie des probabilités du XX^{e} siècle, thème évidemment markovien, vu du point de vue analytique. De sorte que Bachelier, absent de Bologne, a joué un rôle essentiel dans la renaissance bolognaise de ses « probabilités connexes ».

II.3 P. Massé : *Application des fonctions de lignes à l'étude des phénomènes monétaires.*

Cette conférence était initialement prévue en sous-section IVB où elle était davantage à sa place. Nous ignorons pourquoi elle se trouve placé en sous-section IVA dans les Actes (1929, 1932). C'est une chance d'une certaine façon, puisque cela nous donne l'occasion de dire un mot de son auteur, dont on oublie parfois qu'il a été un grand statisticien mathématicien.

Pierre Massé (1898-1987) est polytechnicien et ingénieur des Ponts et Chaussées. Il est d'abord détaché dans un cabinet ministériel et enseigne à l'École polytechnique l'économie parétienne, ce qui explique sa présence à Bologne aux côtés de René Roy. En 1928 il entre dans l'Industrie hydroélectrique et devient assez vite un spécialiste des barrages. Il soutient en 1935 une thèse de mathématiques en hydrodynamique et se révèle un mathématicien créatif. C'est l'un des tout premiers à comprendre le rôle des schémas markoviens en gestion des ressources hydrauliques, et l'on peut sans doute considérer qu'il s'agit là d'un héritage bolognais. Il publie en 1944 un premier ouvrage sur ce thème et en 1946 deux volumes extrêmement remarquables, publiés chez Hermann, *Les réserves et la régulation de l'avenir dans la vie économique*, dans lesquels il anticipe très largement les techniques de contrôle stochastique qui, on le sait, sont un des thèmes markoviens appliqués les plus féconds de la seconde moitié du XX^{e} siècle. Entré à EDF, lors de sa création, il en devient Directeur général puis Président. C'est enfin le premier Commissaire général au Plan de la Cinquième République de 1959 à 1966. Pierre Massé a enseigné à l'ISUP rénové dès la Libération. C'est un de ceux qui, avec Darmois (voir plus haut), Guilbaud et quelques autres ont formé les ingénieurs et les économistes français à la statistique mathématique dans les années cinquante.

III. Orateur de la sous-section IVB ayant participé aux débats de la sous-section IVA : E. Gumbel.

Lorsqu'on parcourt les comptes rendus des séances de la sous section IVA, on note que ce sont toujours les mêmes qui interviennent pour poser une question, contester un résultat, proposer de nouvelles idées. Fréchet et Cantelli bien sûr mais aussi Neyman et puis un des orateurs de la sous-section IVB, Emil Julius Gumbel. C'est la raison pour laquelle nous lui réservons ici une petite place.

Emil Gumbel (1891-1966) est un personnage. Il étudie les mathématiques et l'économie à l'Université de Munich où il soutient une thèse d'économie politique en juillet 1914 sous la direction du statisticien Georg von Mayr (1841-1925) (sur ce dernier on verra S. Hertz dans Heyde, Seneta, 2001, p. 219-222). Après la guerre, il devient un militant actif anti-nationaliste et pacifiste et poursuit des études de démographie et de statistique dans la lignée de l'école de statistique mathématique allemande de Lexis et Bortkiewicz. En 1923, il est nommé privatdozent de statistique à l'Université de Heidelberg, et, en 1930, il est nommé professeur extraordinaire dans cette même université d'où il est exclu deux ans plus tard, avant même l'arrivée au pouvoir de Hitler, pour son anti-nationalisme allemand. Il s'exile en France et grâce à Fréchet et Hadamard qui l'estiment beaucoup depuis Bologne, il devient statisticien français. Gumbel bénéficie de divers subsides, Rockefeller notamment, et enseigne la statistique à l'Institut de formation des actuaires ouvert à Lyon en 1934. Il s'intéresse alors à la statistique des crues et des extrêmes dont il devient rapidement le spécialiste. En 1940 il réussit à obtenir un visa pour les États-Unis où il s'installe et entame une troisième carrière de statisticien américain. Son livre *Statistics of Extremes* (1958) a joué un rôle de tout premier plan.

Sur Gumbel, on dispose fort heureusement de la thèse de Sébastien Hertz, soutenue à Lyon en 1997, sous la direction de Pierre Crépel, *Emil Julius Gumbel (1891-1966) et la statistique des extrêmes.* Il s'agit d'un travail d'un très grand intérêt, notamment pour ce qui concerne la carrière française de Gumbel de 1932 à 1940. On s'y reportera. On verra aussi les biographies de Gumbel, Bortkiewicz, Lexis et Fréchet par Sébastien Hertz dans Heyde, Seneta (2001).

Remerciements

L'auteur remercie très chaleureusement Jean-Jacques Droesbeke et l'éditeur du Journal qui ont accepté de publier ce texte particulièrement confus et disparate. Leur confiance et leurs encouragements lui ont été infiniment précieux. Il remercie également Glenn Shafer qui a lu l'ensemble du texte

et a suggéré plusieurs améliorations importantes. On ne saurait trop inviter le lecteur à se reporter au remarquable texte [Shafer, Volk, 2003] qui complète et éclaire le présent article en de nombreux points essentiels.

RÉFÉRENCES

AITKEN A. C. (1949), Theories of Probability (with discussion), *Transactions of the Faculty of Actuaries*, **19**, 1-30.

ALDOUS D., DIACONIS P. (1986), Shuffling cards and stopping times, *Amer. Math. Monthly*, 333-348.

ARMATTE M. (2001), Maurice Fréchet statisticien, enquêteur et agitateur public, *Revue d'Histoire des Mathématiques*, **7**, 1, 7-65.

BACHELARD G. (1934), *Le nouvel esprit scientifique.* Paris, Presses Universitaires de France. Réimpression ibid. (Quadrige 47), 1984.

BACHELIER L. (1900), *Théorie de la spéculation*, thèse Sci. Math. Paris, *Ann. E.N.S.*, **17**, 21-86. Réimpression Paris, Jacques Gabay, 1995.

(1906), Théorie des probabilités continues, *J. Maths Pures Appl.*, 6$^{\text{ème}}$ série, **2**, 259-327.

(1912), *Calcul des probabilités*, tome 1. Paris, Gauthier-Villars. Réimpression Paris, Jacques Gabay, 1992.

(1937), *Les lois des grands nombres du calcul des probabilités.* Paris, Gauthier-Villars.

(1938), *La spéculation et le calcul des probabilités.* Paris, Gauthier-Villars.

(1939), *Les nouvelles méthodes de calcul des probabilités.* Paris, Gauthier-Villars.

BARBUT M. (1998), Une introduction à l'analyse mathématique des inégalités, *Math. Inf. et Sc. Hum.*, **142**, 27-41.

BARBUT M., LOCKER B., MAZLIAK L. (2003), *La correspondance Lévy-Fréchet, édition, notes et commentaires*, à paraître.

BAYER R. ed. (1937a), *Travaux du IXième Congrès International de Philosophie, Congrès Descartes*, Volume **I**, *Études Cartésiennes.* Paris, Hermann (Actualités Sci. Ind. 530).

(1937b) Id., Volume III, *Influence du Cartésianisme*, ibid. (Actualités Sci. Ind. 532)

(1937c) Id., Volume VII, *Causalité et Déterminisme*, ibid. (Actualités Sci. Ind. 536)

BELINA P., CORNEJ P., POKORNY J. (1993), *Histoire des Pays tchèques* (en tchèque). Prague, 1993. Traduction française : Paris, Seuil (Points H191).

BENNETT J. H. (1990), *Statistical Inference and Analysis. Selected correspondence of R. A. Fisher.* Oxford, Clarendon Press.

BERÁNEK J. (1951), Bohuslav Hostinský, (en tchèque), *Č* esk. č asopis pro Fys., **1**, 90-95.

(1984) Bohuslav Hostinský (1884-1951), (en tchèque), *Cas. pest. Mat.*, **109**, 442-448.

BERNSTEIN S. (*œuvres*) *œuvres complète* (en russe), 4 vol. Moscou, Nauka, 1952-1964.

(1904), *Sur la nature analytique des solutions des équations aux dérivées partielles du second ordre*, thèse sci. math. Paris, Leipzig : Teubner, 1904 et *Math. Ann.*, **59**, 20-76.

(1917), Essai de fondement axiomatique de la théorie des probabilités, (en russe), *Comptes rendus de la Soc. Math. Kharkov*, 15 (1917), 209-274, *œuvres* IV, 10-60, traduction française par M. Louanchi, à paraître.

(1922), Sur le théorème limite du calcul des probabilités, *Math. Ann.*, **85**, 237-241.

(1926a), *Leçons sur les propriétés extrémales et la meilleure approximation des fonctions analytiques d'une variable réelle*, professées à la Sorbonne, (*Collection de Monographies sur la Théorie des fonctions*, publiées sous la direction d'Émile Borel). Paris, Gauthier-Villars.

(1926b), Sur l'extension du théorème limite du calcul des probabilités aux sommes de quantités dépendantes, *Math. Ann.*, **97**, 1-59.

(1927a), État actuel de la théorie des probabilités et de ses applications, *Travaux du 1er Congrès pan-russe des mathématiciens, Moscou 27 avril-4 mai 1927*, 50-63.

(1927b), *Théorie des probabilités* (en russe), Moscou Leningrad, Gostehizdat, 4ième éd., 1946.

(1927c), Sur les sommes de quantités dépendantes, *Izvestiya Akad. Nauk SSSR*, (6), 20, 1459-1478, [œuvres] IV, 177-196.

(1928), Sur les sommes de quantités dépendantes, *Doklad. Akad. Nauk SSSR*, 55-60.

(1931), Revue de [Kolmogorov 1931], *Zentralblatt f. Math.*, **1**, p. 149.

(1932), Sur les liaisons entre les variables aléatoires, *Actes Congrès Int. Math. Zurich*, I, 288-309.

(1933a), Sur l'équation différentielle de Fokker-Planck. Paris, *C. R. Acad. Sci.*, **196**, 1062- 1065.

(1933b), Principes de la théorie des équations différentielles stochastiques, *Travaux de l'Inst. Phys. Math. Steklov*, **5**, 95-124.

(1934a), Sur les chaînes linéaires de Markov quasi-continues, *Doklad. Akad. Nauk SSSR*, 1, 4-9, 361-364.

(1934b), Sur la diffusion avec absorption, *Doklad. Akad. Nauk SSSR*, **1**, 230-234.

(1938), Équations différentielles stochastiques, Colloque consacré à la théorie des probabilités et présidé par M. Maurice Fréchet, Genève 11 au 16 octobre 1937, cinquième partie, (*Actualités Sci. Ind. 738*). Paris, Hermann, 5-31.

(1939), Correction d'une démonstration, *Doklad. Akad. Nauk SSSR*, **25**, 707-709.

(1940), Nouvelles applications des grandeurs aléatoires presqu'indépendantes, *Izvestiya Akad. Nauk SSSR*, **4**, 137-150.

(1941), Sur les sommes de grandeurs aléatoires liées de classes (A,N) et (B,N), *Doklad. Akad. Nauk SSSR*, 32, 303-307.

BERTRAND J. (1888), *Calcul des probabilités*. Paris, Gauthier-Villars. Deuxième éd. ibid. 1907, réimpression. New York, Chelsea, 1972. Réimpression Paris, Jacques Gabay, 1997.

BIENAYMÉ O., BRU M.-F. (1997), La statistique critiquée par le calcul des probabilités, *Revue d'histoire des mathématiques*, tome 3, fascicule 2, 137-239.

BIRKHOFF G. D.(*œuvres*) *Collected Mathematical Papers*, 3 vols. New York, AMS, 1950.

(1929), Quelques éléments mathématiques de l'art, *Comptes rendus du Congrès international des mathématiciens de Bologne, septembre 1928*, **1**, 143-161.

(1931), Proof of the ergodic theorem. U.S.A., *Proc. Nat. Acad. Sci.*, **17**, 656-660.

(1942), What is the ergodic theorem?, *Amer. Math. Monthly*, **49**, 222-226.

BLUM A. (1998), *Statistique, Démographie et Politique. Deux études sur l'histoire de la statistique démographique en URSS (1920-1939).* Paris, INED (Dossiers et Recherches 66).

(2000), La purge de 1924 à la Direction centrale de la statistique, *Annales HSS*, **2**, 249-282.

BÔCHER M. (1909), *An Introduction to the Study of Integral Equation*, Cambridge Tracts in Mathematics and Mathematical Physics, **10**. Cambridge, Cambridge University Press.

BOREL É. (1905), Remarques sur certaines questions de probabilités, *Bull. de la Soc. Math. Fr.*, **33**, p. 123-128. *Œuvres*, **4**, 985-990.

(1906a), La valeur pratique du calcul des probabilités, *Revue du Mois*, **1**, 424-437. *Œuvres*, **2**, 991-1004.

(1906b), Sur les principes de la théorie cinétique des gaz, *Annales Sci. de l'École Normale supérieure*, 3, 23, 9-32. Reproduit dans [Borel 1914b], 73-93. *Œuvres* **3**, 1669-1692.

(1909a), Les probabilités dénombrables et leurs applications arithmétiques, *Rend. Circ. Mat. Palermo*, 27, 247-271. *Œuvres*, **2**, 1055-1079.

(1909b), *Éléments de la Théorie des Probabilités.* Paris : Hermann, 1909, deuxième éd. 1910, troisième éd. revue et augmentée, ibid., 1924. Édition revue et augmentée, Paris, Albin Michel (Bibliothèque d'éducation par la science), 1950. Traduction anglaise par J.E. Freund. Englewood Cliffs, Prentice Hall, 1965.

(1912a), Sur un problème de probabilités relatives aux fractions continues, *Math. Ann.*, 72, 4, (1912), 578-584. Reproduit dans [Borel 1898/1914], note V, § 4. *Œuvres* 2, 1085-1091.

(1912b), Sur le battage des cartes. Paris, *C. R. Acad. Sci.*, **154**, 23-25. *Œuvres*, **2**, 1093-1095.

(1914a), *Le Hasard.* Paris, Alcan, 1914. Dernière édition, ibid., 1948.

(1914b), *Introduction géométrique à quelques théories physiques.* Paris, Gauthier-Villars.

(1915), Théorie cinétique des gaz, d'après l'article allemand de P. et T. Ehrenfest, *Encyclopédie des Sciences Mathématiques* (édition française), IV.1. Paris, Gauthier-Villars. Réimpression Paris, Jacques Gabay, 1991.

(1920), Radioactivité, probabilité et déterminisme, *Revue du Mois*, **21**, 33-40.

(1924a), À propos d'un traité de probabilités, *Revue philosophique*, **98**, 321-336

(1924b), Henri Poincaré, *Bull. Soc. Math. France*, (1924), Séances du cinquantenaire, 49- 54. *Œuvres* 4, 2453-2458.

(1925), *Mécanique statistique classique*, leçons professées à la Faculté des Sciences de Paris, rédigées par Francis Perrin, (fascicule 3, tome 2 du *Traité du Calcul des probabilités et de ses applications* publié par Émile Borel). Paris, Gauthier-Villars.

(1927), Les lois physiques et les probabilités, *Revue Scientifique*, 65, 225-228; *Œuvres* 3, 1827-1837.

(1929), Le calcul des probabilités et les sciences exactes, *Comptes rendus du Congrès international des mathématiciens de Bologne, 3-10 septembre 1928*, **1**, et *J. Math. Pures Appl.*, 8, 115-123.

(1947b), Sur les développements unitaires normaux. Paris, C.R. Acad. Sci, p. 51.

BORUVKA O., HEJL F., MACUREK J., SAJNER J., ed. (1969), *Universitas Brunensis, 1919- 1969.* Brno, Univ.Purkyniana.

BOX J. F. (1978), *R. A. Fisher. The life of a scientist.* New York, Wiley.

BRILLOUIN L. (1912), Diffusion des granules animés d'un mouvement brownien, *Ann. Chim. Phys.*, **27**, 412-423.

(1927a), La statistique des quanta de lumières (photons). Paris, *C. R. Acad. Sci.*, **184**, 589- 591.

(1927b), Comparaison des différentes statistiques appliquées aux problèmes des quanta, *Annales de physique*, **7**, 315-331.

BRUNS H. (1906), *Wahrscheinlichkeitsrechnung und Kollektivmasslehre.* Leipzig, Teubner.

BUTZER P., JONGMANS F. (1999), P. L. Chebyshev (1821-1894) ; A guide to his Life and Work, *Journal of Approximation Theory*, **96**, 111-138.

CANTELLI P. (*Œuvres*)] *Alcune Memorie Matematiche : Onoranze a Francesco Paolo Cantelli.* Milano, Giuffrè, 1958.

(1916), La tendenza ad un limite nel senso del Calcolo delle probabilità, *Rend. Circ. Mat. Palermo*, **41**, 191-201.

(1917), Sulle probabilità comme limite della frequenza, *Rend. Acc. Lincei*, **26**, 39-45.

(1932), Sui confini della probabilità, *Actes Congrès Int. Math. Bologne, 3-10 septembre 1928*, **6**, 47-59.

(1935), Considérations sur la convergence dans le Calcul des probabilités, *Ann. Inst. H. Poincaré*, **5**, 3-50.

(1938), Sur la définition des variables éventuelles, *Colloque consacré à la théorie des probabilités et présidé par M. Maurice Fréchet, Genève 11 au 16 octobre 1937*, deuxième partie, *Les Fondements du calcul des probabilités.* Paris, Hermann (Actualités Sci. Ind. 735), p. 5.

CARLEMAN T. (1932), Sur la théorie des équations intégrales et ses applications, *Actes Congrès Int. Math. Zurich, 5-12 septembre 1932*, vol. **I**, 138-151.

CARTAN É., [*Œuvres*] *œuvres d'Élie Cartan*, 3 parties, 6 volumes. Paris, Gauthier-Villars, 1952-1955.

(1897), Sur les systèmes de nombres complexes. Paris, *C. R. Acad. Sci.*, **124**, 1217-1220, *œuvres* II, 1, 1-4.

(1898), Sur les groupes bilinéaires et les systèmes de nombres complexes. Toulouse, *Ann. Fac. Sci.*, **12B**, 1-99. *œuvres* II, 1.

(1908), Nombres complexes, d'après l'article allemand de E. Study, *Encyclopédie des Sciences Mathématiques (édition française)*, I, 5, 329-468. Paris, Gauthier-Villars. *œuvres* II, **1**, 107-246.

(1939), Notice sur les travaux scientifiques, reproduit dans *Selecta.* Paris, Gauthier-Villars. *Œuvres* I, **1**, 1-101.

CARTWRIGHT M. L. (1965), Jacques Hadamard (1865-1963), *Biographical Memoirs of Fellows of the Royal Society*, **11**, 74-99.

CASTELNUOVO G. (1919), *Calcolo della probabilità.* Milano, Dante Alighieri. Seconda edizione riveduta, 2 vols. Bologna, Zanichelli, 1925-1928.

(1937), *La probabilité dans les différentes branches de la science.* Paris, Hermann, (Actualités Scientifiques et Industrielles 463).

CHAPMAN S., COWLING T. G. (1939), *The mathematical Theory of non-uniform Gases*, Cambridge : Cambridge University Press. 2ème éd. ibid. 1953. 3e éd. ibid 1970.

CHERNOFF H., LEHMANN L. (1954), The use of Maximum Likelihood Estimates in Chi2 tests for Goodness of Fit, *Ann. Math. Stat.*, **23**, 579-586.

CHIANG C. L. (1980), *An Introduction to Stochastic Processes ans Their Applications.* Huntington, Krieger.

CHUNG K. L. (1967), *Markov Chains with stationnary transition probabilities.* Berlin, Springer.

COMTET L. (1970), *Analyse combinatoire*, 2 tomes. Paris, Presses Universitaires de France.

CONDORCET N. Caritat de (1994), *Arithmétique politique. Textes rares ou inédits (1767- 1789)*, P. Crépel dir. Paris, INED.

CONGRÉS DE BOLOGNE

(1928), *Argomenti delle Comunicazioni.* Bologna, Zanichelli.

(1929), *Atti del Congresso Internazionale dei Matematici, Bologna*, tomo I. Bologne, Zanichelli.

(1932), *Atti del Congresso Internazionale dei Matematici, Bologna*, tomo VI. Bologne, Zanichelli.

COURANT R., HILBERT D. (1924), *Methoden der Matematischen Physik.* Berlin, Springer. 2ième éd. ibid. 1931.

COURNOT A. A. (1843), *Exposition de la théorie des chances.* Paris, Hachette, 1843. Rééd. Paris, Vrin, 1984.

CRAMER H. (*Œuvres*) *Collected Works*, 2 vol. Berlin, Springer-Verlag, 1994.

(1930), On the mathematical Theory of Risk, *Särrtryck ur Försäkringsaktiebolaget Skandias Festkrift.* Stockholm, Centraltryckeriet.

(1946), *Mathematical Methods of Statistics.* Princeton, Princeton University Press.

DARMOIS G. (1927), Les équations de la gravitation einsteinienne, *Mémorial des Sciences Mathématiques*, fascicule XXV.

(1928a), *Statistique mathématique*, Encyclopédie scientifique des mathématiques appliquées. Paris, Drouin.

(1929), Analyse et comparaison des séries statistiques qui se développent dans le temps (The time correlation problem), *Actes du Congrès de Bologne*, 3-10 septembre 1928, **6** (1932), 149-151, et *Metron*, **8** (1929), 3-42.

(1934), *Statistique et applications.* Paris, Armand-Colin.

(1935), Sur les lois de probabilité à estimation exhaustive. Paris, *C. R. Acad.Sci.*, **200**, 1265- 1266.

(1945), Sur les limites de la dispersion de certaines estimations, *Revue de l'Institut International de Statistique*, (1945), 15.

(1954), L'enseignement du calcul des probabilités et des méthodes statistiques, *Bulletin de la Société française de Pédagogie*, **107**, 103-113.

(1955), *Notice sur les titres et travaux.* Paris, Imp. Varitypie.

(1957), *Remise d'une épée d'académicien à M. le Professeur Georges Darmois, le samedi 12 janvier 1957, à l'occasion de son élection à l'Académie des Sciences.* Paris, Cercle Militaire.

DESROSIÉRES A. (1993), *La politique des grands nombres : histoire de la raison statistique.* Paris, La Découverte.

(2000), Histoire de la statistique : styles d'écriture et usages sociaux, in J.-P. Beaud, J.-G. Prévost (éd.) *L'ère du chiffre : systèmes statistiques et traditions nationales.* Montréal, Presses de l'Université du Québec.

DIACONIS P. (1998), From shuffling cards to walking around the buildings. Berlin, *Proc. Int. Congress Math.*, 205-234.

DIEUDONNÉ J. [*Œuvres*], *Choix d'œuvres mathématique*, 2 vol. Paris, Hermann, 1981- 1984.

(1965), *Fondements de l'Analyse Moderne.* Paris, Gauthier-Villars.

(1981), *History of Functional Analysis.* Amsterdam, North Holland.

DOEBLIN W. (1936a), Sur les chaînes discrètes de Markoff. Paris, *C. R. Acad. Sci.*, **202**, 24-26.

(1936b), Sur les chaînes de Markoff. Paris, *C. R. Acad. Sci.*, **202**, 1210-1211.

(1937a), Le cas discontinu des probabilités en chaîne. Université Masarik, Publ. Fac.Sci., 236.

(1937b), Éléments d'une théorie générale des chaînes constantes simples de Markoff. Paris, C. R. Acad. Sci., **205**, 7-9.

(1938a), Exposé de la théorie des chaînes simples constantes de Markoff à un nombre fini d'états, *Rev. Math. de l'Union Interbalkanique*, 2, 77-105.

(1938b), *Sur les propriétés asymptotiques de mouvements régis par certains types de chaînes simples*, thèse sci. math. Paris. Bucarest, Imprimerie Centrale, 1938, et *Bull. Soc. Math. Roumaine Sci.*, 39 (1937), (1)., 57-115, (2), 3-61.

(1938c), Sur deux problèmes de M. Kolmogoroff concernant les chaînes dénombrables. *Bull. Soc. Math. France*, **66**, 210-220.

DOOB J. L. (1934), Probability and Statistics, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 36, 759-775.

(1941), Probability as Measure, *Ann. Math. Stat.*, **12**, 206-214.

(1994), The Development of Rigor in Mathematical Probability, (1900-1950), *Development of Mathematics 1900-1950*, ed. J.P. Pier. Basel, Birkhäuser, 157-169.

DROESBEKE J.-J., TASSI P. (1990), *Histoire de la Statistique.* Paris, Presses Universitaires de France (Que sais-je ? 2527), 2e édition corrigée, 1997.

DUGAC P. (1984), Correspondance de Charles Hermite, *Cahiers du Séminaire d'Histoire des mathématiques*, tome 5, p. 49-285.

DU PASQUIER L. G. (1913), Matematische Theorie der Invaliditatsversicherung, *Milt. Verein. Schweiz. Versich.-Math.*, **8**, 1-153.

(1926), *Le calcul des probabilités, son évolution mathématique et philosophique.* Paris, Hermann.

DUREN P. *et al.*, eds. (1989), *A Century of Mathematics in America*, 3 vols., Providence : Amer. Math. Soc., 1988-1989.

EGGENBERGER F., PÒLYA G.(1923), Über die Statistik verketter Vorgänge, *Zeitsch. ang. Math. Mech.*, **3**, 279-289.

(1928), Sur l'interprétation de certaines courbes de fréquences. Paris, *C. R. Acad. Sci.*, **187**, 870-872.

ERLANG A. K. [*Œuvres*] *Principal Works of A. K. Erlang*, [Brockmeyer *et al.*], 1948, 131- 215.

(1909), Calcul des probabilités et conversations téléphoniques, (en danois), *Nyt Tidsskrift for Mat. B*, 20, 33-39, traduction française *Revue générale de l'Électricité*, 18 (1925), 305-, traduction anglaise, *œuvres*, 131-137.

(1917), Solutions de quelques problèmes de la théorie des probabilités présentant de l'importance pour les bureaux téléphoniques automatiques, (en danois), *Elektroteknikeren*, 13, 5-, traduction allemande et anglaise (1918), traduction française *Annales des Postes, Télégraphes et Téléphones*, **11** (1922), 800-, *œuvres*, 138-155.

(1926), Quelques applications de la méthode de l'équilibre statistique dans la théorie des probabilités, (en danois), *6ème Congrés des mathématiciens scandinaves, Copenhague 1925*, 157-, traduction française, *Annales des Postes, Télégraphes et Téléphones*, **17** (1928), 743-, traduction anglaise, *œuvres*, 201-215.

ERTLE J. E., BUSHONG R. C., HILLIX W. A. (1977), The real F. M. Urban, *Journal of the History of the Behavioral Sciences*, **13**, 379-383.

FELLER W. (1936), Zur Theorie der stochastichen Prozessen (Existenz und Eindeutigkeitssätze), *Math. Ann.*, **113**, 113-160.

(1938), Sur les axiomatiques du calcul des probabilités et leurs relations avec les expériences, *Colloque consacré à la théorie des probabilités et présidé par M. Maurice Fréchet, Genève 11 au 16 octobre 1937*, deuxième partie, *Les Fondements du calcul des probabilités*. Paris, Hermann (Actualités Sci. Ind. 735), 7-21.

(1950), *An Introduction to Probability Theory and its Applications*, Vol 1. New York, Wiley. Third ed., ibid., 1968.

FINETTI B. de (1929a), Sulle funzioni a incremento aleatorio, *Rend. Accad. Naz. Lincei*, X 6 3-4, 163-168.

(1929b), Sulla possibiltà di valore eccezionali per una legge di incrementi aleatori, *Rend. Accad. Naz. Lincei*, X 6 7-8, 325-329.

(1929c), Integrazione delle funzioni a incremento aleatorio, *Rend. Accad. Naz. Lincei*, X 6 11, 548-553.

(1930a), Funzione caratteristica di un fenomeno aleatorio, *Mem. Accad. Naz. Lincei*, IV, 5, 86-133.

(1930b), La funzioni caratteristiche di legge istantanea, *Mem. Accad. Naz. Lincei*, XII, 6 37-8, 278-282.

(1931), *Probabilismo. Saggio critico sulla teoria della probabilità e sul valore della scienza.* Napoli, Perella.

(1932), Funzione caratteristica di un fenomeno aleatorio, *Comptes rendus du Congrès international des mathématiciens de Bologne, 3-10 septembre 1928*, 6, 179-190.

(1936), La logique de la probabilité, *Actes du Congrès international de philosophie scientifique, Sorbonne 1935*, vol. I, *Induction et probabilité*. Paris, Hermann (Actualités scientifiques et industrielles 391).

(1937), La prévision : ses lois logiques, ses sources subjectives, *Ann. Inst. H. Poincaré*, 7), 1-68.

(1939), *Compte-rendu critique du Colloque de Genève sur la théorie des probabilités.* Paris, Hermann (Actualités scientifiques et industrielles 766).

(1970), *Teoria delle Probabilità, sintesi introduttiva con appendice critica*, 2 vols. Torino, Einaudi.

FISHER R.A. [*Œuvres*] *Collected Works*, 5 vols. Adelaide, University of Australia, 1971-1974.

(1922), On the dominance ratio, *Proc. Roy. Soc. Edinburgh*, **22**, 321-341.

(1925), *Statistical methods for Research Workers*. Edinburgh, Oliver & Boyd, 14th ed., 1970, reprinted as part of *Statistical methods, Experimental Design and Scientific Inference*. Oxford, Oxford Univ. Press, 1990.

(1930), *The Genetical Theory of Natural Selection*. Oxford, Oxford Univ. Press. 2nd ed. New York, Dover, 1958.

(1932), On a property connecting the χ^2 Measure of discrepancy with the method of maximum likelihood, *Comptes rendus du Congrès international des mathématiciens de Bologne septembre 1928*, **6**, 61-62.

(1935), *The Design of Experiments*, Edinburgh : Oliver & Boyd, 8th ed., 1966, reprinted as part of *Statistical methods, Experimental Design and Scientific Inference*. Oxford, Oxford Univ. Press, 1990.

FIX E., NEYMAN J. (1951), A simple stochastic model of recovery, relapse, death and loss of patients, *Human Biology*, **23**, 205-241.

FORTET R. (1935), Sur des probabilités en chaîne. Paris, *C. R. Acad. Sci.*, **201**, 184-186.

(1936), Sur des probabilités en chaîne. Paris, *C. R. Acad. Sci.*, **202**, 1362-1364.

(1937a), Sur des probabilités en chaîne. Paris, *C. R. Acad. Sci.*, **204**, 315-317.

(1937b), Sur l'itération de certaines substitutions linéaires. Paris, *C. R. Acad. Sci.*, *204*, 1393-1395.

(1937c), Sur des opérations linéaires non complètement continues. Paris, *C. R. Acad. Sci.*, **204**, 1543-1545.

(1938), Sur l'itération des substitutions linéaires algébriques d'une infinité de variables et ses applications au problème des probabilités en chaîne. Lima, *Rev. Ciencias*, **424**, 15-250, thèse sci. math. Paris, 1939.

(1942), Compte-rendu du livre de P. Vendryès, *Vie et probabilité, Revue scientifique*, 333- 334.

FRÉCHET M. (1915), Sur l'intégrale d'une fonctionnelle étendue à un espace abstrait, *Bull. Soc. Math. France*, **43**, 248-265.

(1936a), Une expression générale du nième itéré d'un noyau de Fredholm en fonction de n, *J. Math. Pures Appl.*, 251-270.

(1936b), *Recherches théoriques modernes sur le calcul des probabilités*. Premier livre. *Généralités sur les Probabilités. variables aléatoires*, avec une Note de M. Paul Lévy, (fascicule 3, tome I du *Traité du calcul des probabilités et de ses applications*, par Émile Borel). Paris, Gauthier-Villars, deuxième édition revue et augmentée, ibid., 1950.

(1937), Mélanges mathématiques, *Comptes rendus du Congrès international des mathématiciens, Oslo 1936*, 269-283.

(1938a), Exposé et discussion de quelques recherches récentes sur les fondements du calcul des probabilités, *Colloque consacré à la théorie des probabilités et présidé par M. Maurice Fréchet, Genève 11 au 16 octobre 1937*, première partie, *Conférences d'Introduction*. Paris, Hermann (Actualités Sci. Ind. 734), 19-23, deuxième partie, *Les Fondements du calcul des probabilités*. Paris, Hermann (Actualités Sci. Ind. 735), 23-55.

(1938b), *Recherches théoriques modernes sur le calcul des probabilités*. Second livre. *Méthode des fonctions arbitraires. Théorie des événements en chaîne dans le cas d'un nombre fini d'états possibles*, (fascicule 3, tome I du *Traité du calcul des probabilités et de ses applications*, par Émile Borel), Paris, Gauthier-Villars, deuxième édition avec supplément nouveau et une Note de M. Paul Lévy, ibid., 1952.

(1956), *Notice abrégée sur les travaux scientifiques de Maurice Fréchet de 1902 à 1956.* Paris.

FRÉCHET M., HEYWOOD (H. B.) (1912), *L'équation de Fredholm et ses applications à la physique mathématique*, avec une préface et une note de J. Hadamard. Paris, Hermann.

FROBENIUS G. [*Œuvres*], *Gesammelte Abhandlungen*, 3 vols. New York, Springer, 1968.

(1896), Ueber vertauschbare Matrizen. Berlin, *Sitzungsber. d. preuss. Akad. d. Wiss.*, 614.

(1908), Ueber Matrizen aus positiven Elementen, I. Berlin, *Sitzungsber. d. preuss. Akad. d. Wiss.*, 471-476.

(1909), Ueber Matrizen aus positiven Elementen, II. Berlin, *Sitzungsber. d. preuss. Akad. d. Wiss.*, 514-518.

(1912), Ueber Matrizen aus nicht negativen Elementen. Berlin, *Sitzungsber. d. preuss. Akad. d. Wiss.*, 456-477.

FRY T. C. (1928), *Probability and its Engineering Uses.* New York, Van Nostrand.

GALBRUN H. (1933a), *Théorie mathématique de l'assurance-invalidité et de l'assurance-nuptialité. Définitions et relations fondamentales*, (fascicule 4, tome III, du *Traité du calcul des probabilités et de ses applications*, par Émile Borel). Paris, Gauthier-Villars.

(1933b), *Théorie mathématique de l'assurance-invalidité et de l'assurance-nuptialité. Calcul des primes et des réserves*, (fascicule 5, tome III, du *Traité du calcul des probabilités et de ses applications*, par Émile Borel). Paris, Gauthier-Villars.

(1934), *Théorie mathématique de l'assurance-maladie*, (fascicule 6, tome III du *Traité du calcul des probabilités et de ses applications*, par Émile Borel). Paris, Gauthier-Villars.

GIBBS J. W.(1902), *Elementary principles in Statistical Mechanics, Developed with especial References to the Rational Foundations of Thermodynamics*, Yale bicentennial Publications. New York, Scribner. Traduction française par F. Cosserat et complétée par J. Rossignol, avec une préface de M. Brillouin. Paris, Hermann, 1926.

GOURSAT É. (1915), *Cours d'analyse mathématique*, tome III. Paris, Gauthier-Villars. 3ième éd., ibid., 5ième éd., ibid., 1942. Réimpression, Paris, Jacques Gabay, 1992.

GUIRALDENQ P. (1999a), *Émile Borel 1871-1956. L'espace et le temps d'une vie sur deux siècles.* Saint-Affrique, Imprimerie du Progrès.

(1999b), *Actes du Colloque Borel.* Saint-Affrique.

GUIVARC'H Y. (2000), Marches Aléatoires sur les Groupes, [Pier 2000], 577-608.

HADAMARD J. (1903), Sur les opérations fonctionnelles. Paris, *C.R. Acad. Sci.*, **136**, 351- 353, *œuvres*, I, 405-408.

(1906), Compte-rendu et analyse de [Gibbs 1902], *Bull. Amer. Math. Soc.*, **12**, 194-210, et *Bull. Sci. Math.*, 161-179.

(1910), Le calcul fonctionnel, (Recueil de travaux dédiés à la mémoire de Louis Olivier), *L'Enseignement Mathématique*, (1918), 1-18. *Œuvres*, IV, 2253-2266.

(1922), Les axiomes du calcul des probabilités, *Revue de Métaphysique et de Morale*, 39, *œuvres*, IV, 2161-2165.

(1927a), L'œuvre de Duhem sous son aspect mathématique. Bordeaux, *Mém. Soc. Sci. Phys. Nat.*, **7**, 637-665.

(1927b), Sur le battage des cartes. Paris, *C.R. Acad. Sci.*, **185**, 5-9. *Œuvres*, IV, 2065-2069.

(1928a), Sur les opérations itérées du calcul des probabilités. Paris, *C. R. Acad. Sci.*, **186**, 189-192. Œuvres, IV, 2079-2082.

(1928b), Sur le principe ergodique. Paris, *C. R. Acad. Sci.*, **186**, 275-276. *Œuvres*, IV, 20.

(1929), Le développement et le rôle scientifique du calcul fonctionnel, *Comptes rendus du Congrès international des mathématiciens de Bologne, 3-10 septembre 1928*, 1,.143-161.

(1930), *Cours d'analyse*, tome 2. Paris, Hermann.

(1931), Sur le battage des cartes en relation avec la mécanique statistique, *Comptes rendus du Congrès international des mathématiciens de Bologne, 3-10 septembre 1928*, 5, 133-139. *Œuvres*, IV, 2071-2077.

HADAMARD J., FRÉCHET M. (1933), Sur les probabilités discontinues des événements « en chaîne », *Z. angew. Math. Mech.*, **13**, 92-97.

HALD A. (1990), *A History of Probability and Statistics and Their Applications before 1750.* New York, Wiley.

(1998), *A History of Mathematical Statistics from 1750 to 1930.* New York, Wiley.

(2002), *On the History of Series Expansions of Frequency Functions and Sampling Distributions, 1873-1944*, Matematisk-fysike Meddelelser 49,.Copenhague.

HEYDE C. C., SENETA E., with CRÉPEL P., FIENBERG S. E., GANI J. (2001), *Statisticians of the Centuries.* New York, Springer.

HOPF E. (1932), On the Time Average Theorem in Dynamics. USA, *Proc. Nat. Acad. Sci.*, **18**, 93-100.

(1937), *Ergodentheorie.* Berlin, Springer.

HOSTINSKÝ B. (1909), Les équations fondamentales de la théorie des surfaces, *Bull. Sci. Math.*, **33**.

(1917), Nouvelle solution du problème de l'aiguille de Buffon, (en tchèque), *Rozpravy Ceské Akademie*, II, **26**.

(1920), Sur une nouvelle solution du problème de l'aiguille, *Bull. Sci. Math.*, **44**, première partie, 126-136.

(1921), L'équation de Fredholm. Masaryk, *Publ. Fac. Sci. Univ.*, **1**.

(1925), Sur les probabilités géométriques. Masaryk, *Publ. Fac. Sci. Univ.*, **50**.

(1926a), Sur la méthode des fonctions arbitraires dans le calcul des probabilités, *Acta mathematica*, **49**, 95-113.

(1926b), Sur une méthode générale du calcul des probabilités, *AFAS Congrès de Lyon*, 194-196.

(1928a), Sur les probabilités relatives aux transformations répétées. Paris, *C. R. Acad. Sci.*, **186**, 59-61.

(1928b), Compléments à la note sur les probabilités relatives aux transformations répétées. Paris, *C. R. Acad. Sci.*, **186**, 487-489.

(1928c), Sur les transformations itérées des variables aléatoires. *Masaryk, Publ. Fac.Sci. Univ.*, **93**.

(1928d), Sur les probabilités relatives à la position d'une sphère à centre fixe. Paris, *C. R. Acad. Sci.*, **187**, 1014-1016.

(1929a), Probabilités relatives à la position d'une sphère à centre fixe, *J. Math. Pures Appl.*, **8**, 35-43.

(1929b), Sur les probabilités des phénomènes liés en chaîne de Markoff. Paris, *C. R. Acad. Sci.*, **189**, 78-80.

(1929c), L'œuvre de Karl Vorovka en philosophie mathématique, (en tchèque), *Ruch filosoficky*, **8**, 67-71.

(1930), Sur la théorie générale des phénomènes de diffusion, *Comptes-Rendus du Premier Congrès des Mathématiciens des Pays Slaves, Warszawa 1929*, pp. 341-347.

(1931a), Méthodes générales du Calcul des Probabilités, *Mémorial des Sciences mathématiques*, fascicule 52. Paris, Gauthier-Villars.

(1931b), Sur l'intégration des transformations fonctionnelles linéaires, *Rend. Acad. N; Lincei*, **13**, 921-923.

(1932a), Sur les probabilités des effets qui dépendent d'une suite de transformations successives prises au hasard, *Comptes rendus du Congrès international des mathématiciens de Bologne septembre 1928*, **6**, 61-62.

(1932b), Application du calcul des probabilités à la théorie du mouvement brownien, *Ann. Inst. H. Poincaré*, **3**, 1-74.

(1932c), Valeurs moyennes des quantités qui varient avec le temps, *Congrès International des Mathématiciens, Zürich.*

(1932d), Sur quelques applications de l'analyse infinitésimale à l'étude des phénomènes physiques discontinus, *Congrès des mathématiciens roumains, Turnu-Severin, 5-9 mai 1932*, reproduit dans *Matematica*, 9 (1935), 61-72.

(1932/1938), Sur une équation fonctionnelle de la théorie des probabilités. Masaryk, *Publ. Fac. Sci. Univ.*, 1ère partie, 156, 1932, 2ème partie, 194, 1934, 3ème partie, 261, 1938.

(1933), Sur l'émission radiophonique du *La* normal, *Revue d'Acoustique*, **2**, 382-383.

(1934a), Sur la théorie des chaînes de Markoff et sur l'intégration des transformations linéaires (en tchèque), *Casopis Mat. Fys.*, **63**, 167-187.

(1934b), Sur une équation fonctionnelle considérée par Chapman et par Kolmogorov (en russe), *Dokl. Akad. Nauk.*, 393-397.

(1935), Sur les progrès récents de la théorie des probabilités, *Comptes-rendus du deuxième congrès des mathématiciens des pays slaves, Prague 1934*, Prague, 94-106.

(1936), Sur les probabilités en chaîne. Paris, *C. R. Acad. Sci.s*, **202**, 1000-1002.

(1937), Sur les probabilités relatives aux variables aléatoires lées entre elles. Applications diverses, *Ann. Inst. H. Poincaré*, **7** (1936), 69-119.

(1939a), *Équations fonctionnelles relatives aux probabilités continues en chaîne*, (Collection d'Exposés d'Analyse générale, dirigée par M. Fréchet). Paris, Hermann (Actualités Sci. Ind. 782).

(1939b), Sur la solution de l'équation généralisée de Chapman (en tchèque), *Casopis Mat. Fys.*, **68**, 8-14.

(1940a), Revue de la thèse de R. Fortet, *Zentralblatt f. Math.*, **21**, 338-339.

(1940b), Sur les probabilités relatives aux changements dans un système qui évolue au cours du temps, *Bull. Int. Acad. tchèque Sci.*.

(1941), Sur la courbure des surfaces, *Bull. Int. Acad. tchèque Sci.*

(1943), Die akustische Spektrum einer Saite, *Mitt. Tschechischen Akad. Wiss.*, 53, 31.

(1946), Nouveaux problèmes relatifs à la résonance (en tchèque). Masaryk, *Publ. Fac. Sci. Univ.*, **282**.

(1948), Sur le spectre acoustique de la corde de Lagrange. Masaryk, *Publ. Fac. Sci. Univ.*, **297**.

(1949), Revue des travaux publiés en 1935-1948 sur les chaînes de Markoff et problèmes voisins (en tchèque), *Casopis Mat. Fys.*, **74**, 48-62.

HOSTINSKÝ B., POTOCEK J. (1935), Chaînes de Markoff inverses, *Bull. Intern. Acad. Sc. Bohème*, 64-67.

JAMES W. (1907), *Pragmatism*. Boston. Reprint, Cleveland : The World Publishing Company, 1955. Traduction française, Paris, Flammarion (Bibliothèque de philosophie scientifique), 1911.

JENTZSCH R. (1912), Ueber Integralgleichungen mit positivem Kern, *J. für die reine und angewandt Math.*, **141**, 235-244.

JOHNSON N. L., KOTZ S. eds. (1997), *Leading personalities in statistical sciences from the seventeenth century to the present*. New York, J. Wiley and sons.

JORDAN Ch. (1927a), Sur un cas généralisé de la probabilité des épreuves répétées. Paris, *C. R. Acad. Sci.*, **184**, 315-317.

(1927b), *Statistique Mathématique*. Paris, Gauthier-Villars.

KENDALL D. G. (1990), Obituary : Andrei Nikolaevich Kolmogorov (1903-1987), organized by D. G. Kendall, *Bull. London Math. Soc.*, 22, 31-100.

KEYNES J. M. [*Œuvres*], *The Collected Writings of John Maynard Keynes*. London, Macmillan, 1973.

(1912) Reviews, *J. R. Stat. Soc. : œuvres*, vol. , 567-573.

KHINCHIN A. Ya. (1932a), Sulle successioni stazionarie di eventi, *Giorn. Ist. Ital. Attuari*, **3**, 267-272.

(1932b), Zur Birkhoffs Lösung des Ergodenproblems, *Math. Ann.*, **107** (1933), 485-488.

(1952), La méthode des fonctions arbitraires et la lutte contre l'idéalisme dans la théorie des probabilités, (en russe), *Les questions philosophiques de la physique actuelle*, Acad. Sci. URSS, traduction française, *Questions scientifiques*, tome V,.Paris, La nouvelle critique,1954, 9-24.

KNESER A. (1911), *Die linearen Integralgleichungen*. Braunschweig, Vieweg.

KOEPPLER H. (1932), Die Differentialgleichungen des normalen Verteilungsgesetzes des betrachteten Eigenschaften bei einer hinreichend grosser Anzahl von Vertreteren einer Gattung, *Comptes rendus du Congrès international des mathématiciens de Bologne, 3-10 septembre 1928*, **6**, 191-204.

(1933), Equazioni alle derivate parziali della teoria delle probabilita che intervengano anche nella teorie del calore, *Giorn. Ist. Ital. Attuari*, **4**, 245-267.

KOLMOGOROV A. N. (1933), *Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung*. Berlin, Springer (Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete 3). Traduction anglaise, *Foundations of the Theor of Probability*. New-York, Chelsea, 195.

(1936a), Zur Theorie der Markoffschen Ketten, *Math. Ann.*, **112**, 155-160.

(1936b), Anfangsgründe der Theorie der Markoffschen Ketten mit unendlich vielen möglichen Zuständen, *Mat. Sbornik*, 1, 607-610. Traduction française par J. Barbot, Institut des Actuaires français, 1949.

(1937), Chaînes de Markoff à états dénombrables, (en russe), *Bull. Univ. Moscou*, I, 3. Traduction anglaise, *œuvres* II, 193-208.

(1963), On tables of random numbers, *Sankhya*, Ser. A, **25**, 369-376.

KOOPMAN B. O. (1940a), The Axioms and Algebra of Intuitive Probability, *Ann. of Math.*, **41**, 269-292.

(1940b), The Bases of Probability. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 46, pp. 763-771. Also in *Studies in Subjective Probability*, 161-162, H. E. Kyburg and H. Smokler (eds.). New York, John Wiley & Sons, 1964.

(1941), Intuitive Probabilities and Sequences. *Ann. of Math.*, **42**, 169-187.

(1944), William Fogg Osgood, In Memoriam, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **50**, 139-142.

(1980), *Search and Screening. General Principles and Historical Applications.* New York, Pergamon Press.

KOOPMAN B.O., VON NEUMANN J. (1932), Dynamical Systems of Continuous Spectra. U.S.A., *Proc. Nat. Acad.*, **18**, 255-263.

(1932), Dynamical Systems of Continuous Spectra. USA, *Proc. Nat. Acd. Sci.*, **18**, 255-263.

KRENGEL U. (1994), History of Probability and Statistics at the International Congresses of Mathematicians. Zürich, ICM.

LALESCO T. (1912), *Introduction à la théorie des équations intégrales.* Paris, Gauthier-Villars.

LEHTO O. (1998), *Mathematics without borders. A history of the International Mathematical Union.* New York, Springer.

LÉVY P. (1922a), Sur le rôle de la loi de Gauss dans la théorie des erreurs. Paris, *C. R. Acad. Sci.*, **174**, 855-857.

(1922b), Sur la loi de Gauss. Paris, *C. R. Acad. Sci.*, **174**, 1682-1684.

(1922c), Sur la détermination des lois de probabilités par leurs fonctions caractéristiques. Paris, *C. R. Acad. Sci.*, **175**, 854-856.

(1935a), *Notice sur les travaux scientifiques de M. Paul Lévy.* Paris, Hermann.

(1935b), Propriétés asymptotiques des sommes de variables aléatoires enchaînées, *Bull. Sci. Math.*, 84-96 et 109-128.

(1937), *Théorie de l'addition des variables aléatoires*, (Fascicule I de la Collection des monographies des probabilités , publiée sous la direction de M. Émile Borel). Paris, Gauthier-Villars.

(1952), L'évolution des systèmes ayant une infinité dénombrable d'états possibles, Note dans [Fréchet 1938b], 351-363.

(1970), *Quelques aspects de la pensée d'un mathématicien.* Paris, Blanchard.

LITZMAN 0. (1985), Prof. PhDr. Bohuslav Hostinský-sto let od narození, *Cesk. cas. fyz.* A **35**, 68-72.

LOCKER B. (2001), *Paul Lévy : « La période de guerre » . Intégrales stochastiques et mouvement brownien*, thèse Univ. Paris 5.

LOMNICKI A. (1923), Nouveaux fondements du calcul des probabilités, *Fund. Math.*, 4, 34- 71.

LOUANCHI M. (1997), Aperçu sur la vie de S. N. Bernstein, *Matapli*, **52**, 21-30.

MACKEY G. W. (1992), *The Scope and History of Commutative ans Noncommutative Harmonic Analysis*, History of Mathematics, Vol **5**, Amer. Math. Soc., London Math. Soc.

MARCH L. (1911), Statistique, *De la Méthode dans les Sciences*, deuxième série. Paris, Alcan (Nouvelle collection scientifique, directeur Émile Borel), 2ième éd. ibid. 1919, 315-364.

(1930), *Les principes de la Méthode Statistique avec quelques applications aux sciences naturelles et à la science des affaires.* Paris, Alcan.

MARKOV A. A. (1907), Extension de la loi des grands nombres aux événements ls uns des autres (en russe), *Bull. Soc. Phys.-math. Kazan*, 2e série, **15** (1906), 135-156. *Œuvres*, 339-361.

(1910), Recherches sur un cas remarquable d'épreuves dépendantes, *Acta math.*, **33**, 87-104.

(1912), *Wahrscheinlichkeitsrechnung. nach der zweiten Auflage der russischen Werkes übers. von H. Liebmann*, Leipzig, 4e éd. (en russe), Moscou, 1924.

(1917), Sur quelques formules limites du Calcul des probabilités (en russe), *Bull. Acad. Imp. Sc. Saint Pétersbourg*, 6, 11, 177-186.

(1918), Généralisation du problème de l'échange successif de boules (en russe), *Bull. Acad. Imp. Sc. Saint Pétersbourg*, 6, 12, 261-266.

MAYR E. (1982), *The Growth of Biological Thought, Diversity, Evolution and Inheritance.* Cambridge, The Bellknap Press of Harvard University Press, Trad. française, par Marcel Blanc. Paris, Fayard, 1989.

MAZYA V., SHAPOSHNIKOVA (T.) (1995), *Life of Jacques Hadamard, a universal mathematician*, translation P. Besarab-Horwath, Linköping University. History of Mathematics, Amer. Math. Soc., 1998.

MELILLI E. (1997), Cantelli, Francesco Paolo, in *Leading Personalities in Statistical Sciences from the seventieth Century to the Present*, eds; N. L. Johnson, S. Kotz. New York, Wiley, 228-232.

MISES R. von, R. de MISES (1919), Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung, *Math. Zeitschr.*, **5**, 52-99.

(1931), *Wahrscheinlichkeitsrechnung und ihre Anwendung in der Statistik und Theoretischen Physik*, Leipzig und Wien, Deuticke.

(1932a), Théorie des probabilités. Fondements et applications, *Ann. Inst. H. Poincaré*, **3**, 137-190.

(1932b), Fragen der Wahrscheinlichkeitsrechnung, *Actes Congrès Int. Math. Zürich.*

(1938a), Quelques remarques sur les fondements du calcul des probabilités, *Colloque consacré à la théorie des probabilités et présidé par M. Maurice Fréchet, Genève 11 au 16 octobre 1937*, deuxième partie, *Les Fondements du calcul des probabilités.* Paris, Hermann, (Actualités Sci. Ind. 735), 61-68.

(1938b), Note on deduced probability distributions, *Bull. Amer. Math.Soc.*, **44.**

(1941), On the foundations of probability and statistics, *Ann. Math. Stat.*, **12**, 191-205, 215.

MOLINA E. C. (1930), The theory of probability : some comments on Laplace's *Théorie analytique, Bull. Amer. Math. Soc.*, **36**, 369-392.

MORINO S. (1996), Bruno de Finetti : L'origine de son subjectivisme, *Cahiers du CAMS, Série « Histoire du Calcul des Probabilités».* Paris, EHESS.

MORSE M. (1946), George David Birkhoff and his mathematical work, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **52**, 357-391.

MORSE P. M. (1977), *In at the beginnings : a physicist's life.* Cambridge, MIT Press.

NADDEO A., ed. (1987), *Italian Contributions to the Methodology of Statistics*, Soc. Ital. Stat. Padova, Cleup.

NEYMAN J. (1932), On Methods of testing hypothesis, *Comptes rendus du Congrès international des mathématiciens de Bologne septembre 1928*, 6, 35-41.

(1938), L'estimation statistique traitée comme un problème classique de probabilité, *Colloque consacré à la théorie des probabilités et présidé par M. Maurice Fréchet, Genève 11 au 16 octobre 1937*), Paris : Hermann (Actualités Sci. Ind. 739), 1938, 25-57.

NEYMAN J., PEARSON E. (1933), On the problem of the most efficient tests of statistical hypothesis, *Trans. R. Soc. Lond.* A, **231**, 289-337.

NIXON J.W. (1960), *A History of the International Statistical Institute.* The Hague, ISI.

ONDAR Kh. O. (1981), *The Correspondence Between A.A. Markov and A.A. Chuprov on the Theory of probability and Mathematical Statistics*, traduit du russe par C. et M. Stein. New York, Springer.

PEARSON K. (1892), *The Grammar of Science*, London : Scott, 3rd ed., ibid., 1911, traduction française sur la troisième édition par Lucien March. Paris, Alcan, 1912.

(1912), Cause et effet. Probabilité, extrait du précédent, *La Revue du Mois*, **13**, 44-66.

PERRON O. (1907), Zur Theorie der Matrices, *Math. Ann.*, **64**, 248-263.

PETRUSZEWYCZ M. (1981), *Les Chaînes de Markov dans le domaine linguistique.* Genève-Paris, Slatkine.

PLATO J. von (1983), The Method of Arbitrary Functions, *The British Journal for the Philosophy of Science*, **34**, 37-47.

(1987), Probabilistics Physics the Classical Way, *The Probabilistic Revolution. Volume 2 Ideas in the Sciences*, ed. L. Krüger, G. Gigerenzer, M. S. Morgan. Cambridge, MIT Press, 379-407.

(1994), *Creating Modern probability. Its Mathematics, Physics and Philosophy in Historical Perspectives.* New York, Cambridge University Press.

POINCARÉ H. (1884), Sur les nombres complexes. Paris, *C.R. Acad. Sci.*, **99**, 740-742. *Œuvres* V, 77-79.

(1890), Sur le problème des trois corps et les équations de la dynamique, *Acta Mathematica*, **13**, 1-290. *Œuvres* VII, 262-479.

(1896), *Calcul des probabilités*, leçons professées pendant le second semestre 1893-1894, rédigées par A. Quiquet, ancien élève de l'École normale supérieure. Paris, Gauthier-Villars.

(1899a), *Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste*, t. III. Paris, Gauthier-Villars.

(1899b), Réflexions sur le calcul des probabilités, *Revue générale des sciences pures et appliquées*, **10**, 262-269. Reproduit dans [Poincaré 1902].

(1902), *La science et l'hypothèse.* Paris, Flammarion, 1902, rééd. avec une préface de Jules Vuillemin, ibid. 1965.

(1903), Sur l'intégration algébrique des équations linéaires et les périodes des intégrales abliennes, *J. Math. Pures et appl.*, 5, 9, 139-212.

(1907), Le hasard, *Revue du Mois*, 3, 257-276. Reproduit dans [Poincaré 1908a] et en introduction de [Poincaré 1912].

(1908a), *Science et méthode.* Paris, Flammarion.

(1908b), *Thermodynamique*, seconde édition revue et augmentée. Paris. Réimpression Paris, Jacques Gabay, 1995.

(1911), *Leçons sur les hypothèses cosmogoniques.* Paris.

(1912), *Calcul des probabilités*, seconde édition revue et augmentée par l'auteur. Paris, Gauthier-Villars, nouveau tirage 1923. Réimpression Paris, Jacques Gabay, 1987.

PÓLYA G. [*Œuvres*], *Collected papers*, 3 vol. Cambridge, MIT Press, 1984.

(1917), Über geometrische Wahrscheinlichkeiten, *Sitzungber. Kais. Akad. Wiss. Wien*, Abt. IIA, 126, 3, 1-8.

(1919), Wahrscheinlichkeitstheoretisches über die « Irrfarht », *Mitteilungen der Physikalischen Gesellschaft Zürich*, **19**, 75-86.

(1920), Über den zentralen Grenzwertsatz der Wahrscheinlichkeitsrechnung und das Momentproblem, *Math. Zeitschrift*, **8**, 171-181.

(1921), Über eine Aufgabe der Wahrscheinlichkeitsrechnung betreffend die Irrfhart im Strassennetz, *Math. Ann.*, **84**, 149-160.

(1930), Sur quelques points de la théorie des probabilités, *Ann. I.H.P.*, **1**, 117-161.

(1938), Sur la promenade au hasard dans un réseau de rues, *Colloque consacré à la théorie des probabilités et présidé par M. Maurice Fréchet, Genève 11 au 16 octobre 1937*, première partie, Paris, Hermann (Actualités Sci. Ind. 734), 25-44. (La conférence de M. Pólya a été accompagnée, durant un quart d'heure, de la projection d'un film intitulé : le charriage des pierres par le courant. Ce film a été réalisé au laboratoire d'essais hydrauliques de l'École polytechnique de Zurich).

POTOČEK J. (1932), Sur la dispersion dans la théorie des chaînes de Markoff, (en tchèque). Masaryk, *Publ. Fac. Sci. Univ*, **154**.

QUENEAU R. (1963), *Bords. Mathématiciens Précurseurs Encyclopédistes.* Paris, Hermann.

REGAZZINI E. (1987), Probability theory in Italy between the two world wars. A brief historical review, *Metron* 45 (3-4), 5-42.

REID C. (1982), *Neyman.* New York, Springer; nouvelle éd., ibid., 1998.

(1986), *Hilbert-Courant.* New York, Springer.

RIESZ F. (1918), Über lineare Funktionalgleichungen, *Acta Math.*, 41, pp. 71-98, *œuvres* **II**, 1017-1080.

RIESZ F., SZ-NAGY B. (1952), *Leçons d'Analyse Fonctionnelle*, Budapest : Académie des sciences de Hongrie, 3ième éd., 1955,. Réimpression Paris, Jacques Gabay, 1990.

ROMANOVSKY V.I. [*Œuvres*], *Izbrannie Trudy*, Tachkent, 1959-1964.

(1929), Sur les chaînes de Markoff, *Doklad. Akad. Nauk SSSR*, 203-208.

(1930a), Sur les chaînes discrètes de Markoff. Paris, *C. R. Acad. Sci.*, **191**, 450-452.

(1930b), Sur les chaînes biconnexes continues de Markoff. Paris, *C. R. Acad. Sci.*, **191**, 695-697.

(1931a), Sur les zéros des matrices stocastiques. Paris, *C. R. Acad. Sci.*, **192**, 266-269.

(1931b), Revue de [Mises 1931], *Zentralblatt f. Math.*, **1**, 55-57.

(1932), Sur une classe d'équations intégrales linéaires, *Acta Math.*, **59**, 99-208.

(1936), Recherches sur les chaînes de Markoff. Premier Mémoire, *Acta Math.*, **66**, 147-251.

(1949), *Chaînes discrètes de Markov* (en russe), Moscou, traduction anglaise par E. Seneta. Groningen, Wolters-Nordhoof, 1970.

(1955), On a statistical criterion of D. I. Mendeleyev, *Akad. Nauk Uzbek. SSR, Tr. Inst. Mat. Mekh.*, **15**, 31-40.

SCHNORR C. P. (1971), *Zufäligkeit und Wahrscheinlichkeit.* Berlin, Springer.

SCHWARTZ L. (1997), *Un mathématicien aux prises avec le siècle.* Paris, Odile Jacob.

SENETA E. (1973), On the historical development of the theory of finite inhomogenous Markov chains, *Proc. Camb. Phil. Soc.*, **74**, 507-513.

(1981), *Non-negative Matrices and Markov Chains*, 2nd ed. New York, Springer.

(1982), Bernstein, Sergei Natanovich, *Encyclopedia of Statistical Sciences*, Kotz, Johnson eds, vol I. New York, Wiley, 221-223, reprint [Johnson Kotz, 1997], 223-224.

(1992), On the history of the strong law of large numbers and Boole's inequality, *Historia Mathematica*, **19**, 24-39.

(1995), Markov and the birth of chain dependent events, *Bull. Int. Stat. Inst., Proceedings 50th Session*, tome LVI, **3**, Pékin, 1261-1276. *International Statistical Review*, **64** (1996), 255-263.

SERVIEN P. (1941), *Le choix au hasard. Mesure d'égalité physique et calcul des Probabilités.* Paris, Hermann (Actualités scientifiques et industrielles 884).

(1942), *Base physique et base mathématique de la Théorie des probabilités, vers une nouvelle forme de la théorie.* Paris, Hermann (Actualités scientifiques et industrielles 904).

SHAFFER G., VOLK V. (2003), The sources of Kolmogorov's Grundbegriffe. Working Paper#4, Game-Theoretical Probability Project, www.probabilityandfinance.com

SHEYNIN O. (1989), A.A. Markov's work on probability, *Arch. Hist. Ex. Sci.*, 39, 4, 337-377.

(1996), *A.A. Chuprov : Life, Work, Correspondance.* Göttingen, Vandenhoeck-Ruprecht.

(1998), Statistics in the Soviet Epoch, *Jahrbücher f. Nationalökonomie u. Statistik*, 217/5, 529-549.

(2002), A. N. Kolmogorov. Obituary : Evgeny Evgenievich Slutsky, traduction et notes, *Math. Scientist*, 27, 67-74.

SIEGMUND-SCHULTZE R. (1986), Faschistiche Pläne zur « Neuordung » der europäischen Wissenschaft. Das Beispiel Mathematik, *NTM-Schieftenr. Gesch. Naturwiss.*. Leipzig, *Technik, Med.*, 23 2, 1-17.

(1994), « Scientific Control » in Mathematical Reviewing and German-U.S.-American Relations between the Two World Wars, *Historia Mathematica*, **21**, 306-329.

(1997), The emancipation of Mathematical Research Publishing in the United States from German Dominance (1878-1945), *Historia Mathematica*, **24**, 135-166.

(2001), *Rockefeller and the Internationalization of Mathematics Between the Two World Wars.* Basel, Birkhäuser.

SLUTSKY E. E. [*Œuvres*], *Izbrannie Trudy.* Moscou, Izd AN SSSR, 1960.

(1925), Ueber stochastische Asymptoten und Grenzwerte, *Metron*, 5, 3, 1-91.

(1926), Über zufällige zyklische Anordnung paarweise gleicher Elemente, *Zeitschrift f. angew. Math. Mech.*, **6**, 150-159.

(1927), The summation of random causes as the source of cyclic process, (en russe), *Problems of Economic Condition*, 3, 1, version anglaise révisée, *Econometrica*, **5** (1937), 105-146.

(1928a), Sur un critérium de la convergence stochastique des ensembles de variables éventuelles. Paris, *C. R. Acad. Sci.*, **187**, 370-373.

(1928b), Sur les fonctions éventuelles continues, intégrables et dérivables dans le sens stochastique. Paris, *C. R. Acad. Sci.*, **187**, 878-880.

(1932), Sur les fonctions éventuelles compactes, *Actes Congrès Int. Math. Bologne 3-10 septembre 1928*, **6**, 111-115.

(1937), Qualche proposizione relativa alla teoria degli funzioni aleatorie, *Giorn. d. Ist. Ital. d. Attuari*, VIII, **2**, 183-199.

(1938), Sur les fonctions aléatoires presque périodiques et sur la décomposition des fonctions aléatoires stationnaires en composantes, *Colloque consacré à la théorie des probabilités et présidé par M. Maurice Fréchet, Genève 11 au 16 octobre 1937*, cinquième partie. Paris, Hermann (Actualités Sci. Ind. 738), 33-55.

STEINHAUS H. (1923), Les probabilités dénombrables et leurs rapports avec la théorie de la mesure, *Fund. Math.*, **4**, 286-310.

STIGLER S. M. (1978), Mathematical Statistics in the early States, *Ann. Stat.*, **6**, 239-265.

(1986), *The History of Statistics The Measurement of Uncertainty before 1900.* Cambridge, Belknap Press of Harvard Univ. Press.

(1996), The History of Statistics in 1933, *Statistical Science*, **11**, 244-252.

(1999), *Statistics on the Table. The History of Statistical Concepts and Methods.* Cambridge, Harvard University Press.

STONE M. H. (1932), *Linear Transformations in Hilbert Space and their applications to analysis*, Amer. Math. Soc. Coll. Publ., XV.

TAKACS L. (1961), Charles Jordan, 1871-1959, *Ann. Math. Stat.*, 32, 1-11.

ULAM S. M. (1958), John von Neumann, 1903-1957, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **64**, 1-49.

(1976), *Adventures of a mathematician.* New York, Scribner.

UNIVERSITÉ de STRASBOURG (1920), *Fêtes d'Inauguration, 21, 22, 23 novembre 1919.* Strasbourg, Imprimerie alsacienne.

URBAN F.M. (1907), On the method of just perceptible differences, *Psychological Review*, **14**, 244-253.

(1908), *The application of Statistical Methods to the problems of Psychophysics.*

(1909), Die psychophysischen Massmethoden als Grundlagen empirischer Messungen, *Archiv f. d. ges. Psychologie*, **16**, 261-415.

(1910), The method of constant stimuli and its generalizations, *Psychological Review*, **17**, 229-259.

(1911), A reply to Professor Safford, *Amer. J. of Psychology*, **22**, 298-303.

(1921), On the Theory of Errors of Observation, *Amer. J. of Psychology*, **35**, p. 322-331.

(1923), *Grundlagen der Warscheinlichkeitsrechnung und der Theorie der Beobachtungsfehler.* Leipzig, Teubner.

(1927), The Accuracy of the Method of Constant Stimuli, *Amer. J. of Psychology*, **38**, 252- 256.

(1932), Das Mischungsproblem der D. Bernoulli, *Atti del Congresso Internazionale dei Matematici*, Bologne, 3-10 septembre 1928, tome **6**, 21-25.

(1950a), The Psychometric Constant Delta, *Amer. J. of Psychology*, **63**, 100-107.

(1950b), The Equality Judgments, *Amer. J. of Psychology*, **63**, 282-284.

USPENSKY J.V. (1937), *Introduction to Mathematical Probability.* New York, McGraw-Hill.

VENDRYES P. (1942), *Vie et probabilités.* Paris, Albin Michel.

VILLE J. (1939), *Étude critique de la notion de collectif,* thèse sci. math. Paris, (fascicule III de la Collection de monographies des probabilités, publiée sous la direction de M. Émile Borel). Paris, Gauthier-Villars.

VOROVKA K. (1913), Portée philosophique du calcul des probabilités (en tchèque). Prague, *Ceska Mysl.*

WALD A. (1938), Die Widerspruchsfreiheit des Kollektivbegriffes, *Colloque consacré à la théorie des probabilités et présidé par M. Maurice Fréchet, Genève 11 au 16 octobre 1937,* deuxième partie, *Les fondements du calcul des probabilités.* Paris, Hermann (Actualités Sci. Ind. 735), 79-99.

WEIL A. [*Œuvres*], *œuvres Scientifiques – Collected Works.* New York, Springer, 3 vols, 1980.

(1939), Revue critique du livre de Maurice Fréchet [Fréchet, 1938], *Revue Scientifique, Revue rose illustrée*, 50-52.

(1991), *Souvenirs d'apprentissage.* Bâle, Birkhäuser.

WIENER N., WINTNER A. (1941), On the ergodic dynamics of almost periodic systems, *Amer. J. of Math.*, **63**, 794-824.

YOUNG L.-C. (1981), *Mathematicians and their times, History of mathematics and mathematics of history.* Amsterdam, North-Holland.