

MURAD S. TAQQU

**Bachelier et son époque : une conversation
avec Bernard Bru**

Journal de la société française de statistique, tome 142, n° 2 (2001),
p. 3-40

http://www.numdam.org/item?id=JSFS_2001__142_2_3_0

© Société française de statistique, 2001, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Journal de la société française de statistique » (<http://publications-sfds.math.cnrs.fr/index.php/J-SFdS>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

BACHELIER ET SON ÉPOQUE : UNE CONVERSATION AVEC BERNARD BRU* †

Murad S. TAQQU †

RÉSUMÉ

Louis Bachelier défend sa thèse, «Théorie de la spéculation», en 1900. Il utilise le mouvement brownien comme modèle des cours de Bourse. Cette conversation avec Bernard Bru décrit le milieu scientifique de l'époque et les conditions dans lesquelles Bachelier a fait ses découvertes. Elle indique que Bachelier est l'homme de la situation. Il est en contact avec la Bourse de Paris, est autodidacte mais a suivi des cours sur la théorie des probabilités et sur la théorie de la chaleur. Ne faisant pas partie de l'«establishment» scientifique, il peut se permettre de développer un sujet qui n'est pas du goût des mathématiciens de l'époque. Il est le premier à mettre l'accent sur les trajectoires du mouvement brownien et ses théories préfigurent le développement des mathématiques financières modernes. Ce document est une version revue et augmentée de la conversation avec Bernard Bru.

Bernard Bru est l'auteur d'un article sur Doeblin [37] et récemment, de l'article *Borel, Lévy, Neyman, Pearson et les autres* [38]. Il a créé en 1982 avec Marc Barbut et Ernest Coumet le séminaire d'histoire du calcul des probabilités de l'EHESS (École des Hautes Études en Sciences Sociales). Celui-ci regroupe des chercheurs de mathématiques, philosophie et sciences humaines.

ABSTRACT

Louis Bachelier defended his thesis "Theory of Speculation" in 1900. He used Brownian motion as a model for stock exchange performance. This conversation with Bernard Bru illustrates the scientific climate of his times and the conditions under which Bachelier made his discoveries. It indicates that Bachelier was indeed the right person at the right time. He was involved with the Paris stock exchange, was self-taught but also took courses in probability and on the theory of heat. Not being a part of the "scientific establishment," he had the opportunity to develop an area that was not of interest to the mathematicians of the period. He was the first to apply the trajectories of Brownian motion, and his theories prefigure modern mathematical finance. What follows is an edited and expanded version of the original

* Une traduction anglaise de cet article a paru dans la revue *Finance and Stochastics* [119] et dans [120]. Une version française va paraître également dans [121]. La présente version française corrigée contient des détails supplémentaires

†. Cette recherche a été partiellement subventionnée par une bourse NSF ANI-9805623 à l'Université de Boston. © Murad S Taqqu

‡. Department of Mathematics, Boston University, 111 Cummington Street, Boston, MA 02215, USA. Email : murad@math.bu.edu, Web · <http://math.bu.edu/people/murad>

conversation with Bernard Bru. The English translation of this conversation appears in [119] and [120].

Bernard Bru is the author, most recently, of *Borel, Lévy, Neyman, Pearson et les autres* [38]. He is a professor at the University of Paris V where he teaches mathematics and statistics. With Marc Barbut and Ernest Coumet, he founded the seminars on the history of Probability at the EHESS (École des Hautes Études en Sciences Sociales), which bring together researchers in mathematics, philosophy and the humanities.

Murad Taqqu : Il a fallu près d'un siècle pour que l'importance des contributions de Louis Bachelier soit reconnue. Son caractère demeure, toutefois, énigmatique. Sa vie et les conditions dans lesquelles il a travaillé sont peu connues. Commençons par sa jeunesse. Que savons-nous d'elle ?

Bernard Bru : Peu de choses. Bachelier est né au Havre le 11 mars 1870 d'une famille bourgeoise aisée. Son père, Alphonse Bachelier, était négociant en vins au Havre et sa mère, Cécile Fort-Meu, était fille d'un banquier. Il perd ses parents en 1889 et doit abandonner ses études pour travailler. Il a peut-être repris l'affaire familiale mais il semble qu'il soit parti pour Paris après son service militaire vers 1892 et qu'il ait travaillé en liaison avec la Bourse de Paris. On sait en tout cas qu'il est inscrit à la Sorbonne en 1892 et sa thèse *Théorie de la Spéculation* [5] de 1900 démontre qu'il connaît parfaitement les techniques boursières de la fin du XIX^e siècle.

M.T. : Quelle était l'importance de la Bourse de Paris à l'époque ?

B.B. : La Bourse de Paris à partir de 1850 est le marché mondial des « rentes ». Les rentes sont des titres à revenu fixe. Lorsqu'un gouvernement voulait faire un emprunt, il passait par la Bourse de Paris, lieu des négociations. Leur stabilité était garantie par l'état et la parité du franc-or. A cause de cette parité, l'inflation a été pratiquement négligeable jusqu'en 1914. Le taux des rentes était entre 3 et 5%. Les titres avaient une valeur nominale, en général de 100Fr, mais une fois une rente émise, son prix fluctuait. Les sommes qui passaient par Paris étaient absolument énormes. Parmi les Français, les rentes restaient en famille de génération en génération. Un Français fortuné, c'était un « rentier », quelqu'un qui vivait du produit de ses rentes.

M.T. : Je croyais qu'être rentier, c'était vivre du revenu de ses terres.

B.B. : C'est vrai, mais une partie importante – celle qui se transmettait, car c'était facile à transmettre – venait des rentes financières. Tout a commencé avec « le milliard des émigrés ». Au moment de la Révolution française, les nobles sont partis et leurs biens ont été vendus comme biens nationaux. C'était une spoliation. Lorsqu'ils sont rentrés en 1815, il a fallu les dédommager. L'état français a fait un emprunt d'un milliard de francs de l'époque, c'était une somme considérable. L'état en payait les intérêts, il ne l'a jamais remboursé. C'était ce qu'on appelait une rente perpétuelle, et le succès de ce premier emprunt a entraîné le succès des suivants. En 1900 le capital nominal de la dette publique perpétuelle était de 26 milliards de francs (pour

un budget annuel de la France de 4 milliards). Les emprunts d'états (russes, allemands, etc...) s'élevaient à 70 milliards de francs (or). Toutes les maisons de commerce avaient une partie de leurs fonds en rentes. L'état garantissait que tous les ans, l'intérêt serait payé aux titulaires à taux fixe. Ça ne s'est arrêté qu'avec la guerre de 1914, lorsque le franc s'est effondré.

M.T. : Les rentes se vendaient ?

B.B. : Elles se vendaient, effectivement, au comptant ou à terme, après être passées par les cabinets d'agents de change. Il y avait un marché officiel à la Bourse et un marché parallèle. C'est très compliqué, mais ça occupait énormément de gens, car il n'y avait pas de téléphone, il y avait des commis qui s'occupaient de cela. De nombreux produits financiers que l'on connaît aujourd'hui existaient déjà. Il y avait plusieurs façons de vendre ces rentes. Si vous examinez la thèse de Bachelier, il explique un peu le fonctionnement du système.

M.T. : Pourquoi est-ce que les gens vendaient leurs rentes perpétuelles ?

B.B. : Pour des questions de succession ou pour la spéculation. Mais c'était une spéculation qui était tolérée car elle n'était pas très dangereuse. Ces rentes n'ont oscillé beaucoup qu'au moment des grandes crises politiques françaises en 1830, 1848, 1870.

M.T. : On ne savait pas si l'état allait continuer de les payer ?

B.B. : Oui. Il y a alors des fortunes considérables qui se sont faites et défaites. Les fluctuations extrêmes n'ont pas été prises en compte par Bachelier, il s'intéressait aux fluctuations ordinaires au jour le jour.

M.T. : Où travaillait Bachelier ?

B.B. : J'ai cherché, mais je n'ai pas trouvé dans quelle maison Bachelier a été employé. Ça reste un mystère. Mais ce qui est incontestable, c'est qu'il avait le goût de la science. Dès qu'il a pu mettre un peu d'économies de côté, il a repris ses études. Il a passé sa licence de mathématiques à la Sorbonne en 1895 où il a eu comme professeurs Paul Appell, Émile Picard et Joseph Boussinesq, un physicien-mathématicien. Il y a deux domaines mathématiques importants en France à la fin du XIX^e siècle, la physique mathématique - la mécanique - et la géométrie. Ce sont les choses que l'on apprenait à cette époque-là. Il a donc appris la théorie de la chaleur (l'équation de diffusion) avec Boussinesq [35], et puis il a eu aussi Henri Poincaré. C'était avant que Poincaré ne change de chaire.

M.T. : A la Sorbonne ?

B.B. : Oui, où Poincaré a occupé la chaire de physique mathématique et de calcul des probabilités entre 1886 et 1896. Poincaré s'est ensuite fait transférer à la chaire de mécanique céleste.

M.T. : Bachelier a donc failli de pas l'avoir.

B.B. : Il n'aurait sans doute pas suivi ses cours de mécanique céleste, quoiqu'à cette époque-là, Poincaré était comme un dieu vivant. Ses cours étaient difficiles à suivre, c'étaient toujours des cours très originaux et sans examens. Dans la licence de maths, il y avait des examens obligatoires qui étaient la mécanique, le calcul différentiel et intégral, et l'astronomie que Bachelier a finalement réussi. Bachelier a passé en plus l'examen de Poincaré en physique mathématique en 1897. Ce cours était enseigné depuis 1834, mais il n'y avait pas d'examens car cela faisait partie des cours non obligatoires. Bachelier a été le premier à passer cet examen. Bachelier et Poincaré se sont donc parlé.

M.T. : C'était un examen oral ?

B.B. : Oui, et c'est probablement là que Bachelier a eu l'idée de continuer ses études. A l'époque c'était un honneur, car le diplôme suivant était la thèse¹. Après la thèse, il fallait trouver un poste dans une université, et les postes n'existaient quasiment pas. Dans les universités de province, il y avait peut-être en tout une cinquantaine de postes de mathématiques. Dans chaque université il y en avait deux. Pour enseigner à l'université, il fallait la thèse, mais elle ne suffisait pas, car il n'y avait pratiquement pas de postes.

M.T. : Le sujet de thèse de Bachelier n'était pas ordinaire.

B.B. : En fait, il était exceptionnel. Mais par contre, Bachelier était l'homme de la situation. Car il avait les cours de Bourse. Il avait la théorie de la chaleur (c'était le sommet de la physique mathématique classique). Il avait l'initiation aux probabilités de Poincaré, et puis il avait le cours de probabilités [27] de Joseph Bertrand qui lui a beaucoup servi. Si vous regardez le chapitre de Bertrand sur la ruine des joueurs, vous verrez que ça lui a été utile. Mais l'idée de suivre les trajectoires, c'est dû à Bachelier seul, c'est ce qu'il a vu dans les cours de Bourse.

M.T. : Bachelier semble avoir vraiment été l'homme de la situation.

B.B. : Il était sans doute le seul au monde à pouvoir faire ça, même Poincaré n'aurait pas pu le faire. Il fallait que cela se passe à Paris, la place boursière des rentes. Il fallait avoir un bagage mathématique, mais pas trop, parce qu'à l'époque les mathématiques à la mode, ce n'était pas du tout ça; c'était la théorie des fonctions, surtout les fonctions de variable complexe. La thèse d'Émile Borel, celle de Jacques Hadamard, concernent la théorie des fonctions. Bachelier était incapable de lire ça. D'ailleurs, la thèse de Bachelier n'a pas eu la mention qu'il fallait pour lui ouvrir les portes de l'université. Il fallait avoir la mention « très honorable ». Il a eu « honorable ».

M.T. : Il y avait donc deux mentions ?

1. En fait, il y avait deux thèses, l'une originale, et une seconde qui était un examen oral et qui devait montrer la culture mathématique du candidat et ses qualités pédagogiques. La deuxième thèse de Bachelier traitait des travaux de Boussinesq en mécanique des fluides. Bachelier a décrit le mouvement d'une sphère dans un fluide.

BACHELIER ET SON ÉPOQUE

B.B. : Il y avait «ajourné» qui indiquait que la thèse n'était pas digne d'être soutenue. Et puis il y avait trois mentions : «passable» qui n'était jamais donnée, «honorable» qui voulait dire «c'est très bien Monsieur, au revoir», et la mention «très honorable» qui ouvrait la possibilité d'une carrière universitaire, mais pas systématiquement.

M.T. : Mais pourquoi croyez-vous qu'il ait seulement reçu la mention «honorable»?

B.B. : C'était un sujet qui était complètement ésotérique par rapport aux sujets qui étaient traités à l'époque, généralement des thèses de mécanique, c'est-à-dire des équations aux dérivées partielles, et surtout les grandes thèses de l'époque étaient les thèses de théorie des fonctions (Borel, Baire, Lebesgue). Donc ce n'était pas une thèse convenable. Si l'on regarde les notes obtenues par Bachelier à ses examens de licence – conservées aux archives nationales – elles sont très médiocres. Il y avait un examen écrit sur des problèmes d'analyse, de mécanique, et d'astronomie; il a eu beaucoup de difficultés. Il a eu beaucoup d'échecs avant de finalement réussir et, lorsqu'il a réussi, c'était toujours de justesse. Il était le dernier ou l'avant-dernier. Ce qui était déjà très bien puisqu'il y avait relativement peu de reçus, les examens étaient difficiles et il était autodidacte.

M.T. : Pourquoi?

B.B. : Il n'a pas poursuivi le lycée après son baccalauréat. Il a dû travailler tout de suite. Le bac était l'examen qui ouvrait les portes de l'université. Mais, en fait, tous les étudiants suivaient deux années de «mathématiques spéciales» dans un lycée pour se présenter aux grandes écoles scientifiques (comme Polytechnique ou l'École Normale Supérieure). La culture scientifique de base était acquise au lycée. Bachelier a dû apprendre seul, ce qui explique ses difficultés aux examens. Avec un tel cursus, Bachelier n'avait aucune chance, de toutes façons, d'accéder à une chaire d'université. Au fond la qualité de sa thèse, le fait qu'elle ait été appréciée de Poincaré, le plus grand savant du temps, ne changeait rien à la situation de Bachelier qui n'avait pas la «distinction» nécessaire.

M.T. : Il travaillait déjà?

B.B. : Il travaillait et étudiait en même temps. Il suivait de temps en temps les cours et il passait les examens. Il était employé je ne sais où, peut-être dans une maison de commerce. Comme sa thèse n'a pas pu le mener à un emploi universitaire, il a vraisemblablement continué de travailler.

M.T. : N'y avait-il pas de fautes dans sa thèse?

B.B. : Non, absolument pas, il n'y avait pas de fautes. C'était un langage plutôt physicien. Au fond, ce n'était pas ça le problème. A l'époque d'ailleurs, Poincaré l'aurait relevé s'il y avait eu une vraie faute. Les raisonnements de Poincaré étaient un peu la même chose : il laisse les détails de côté, il les suppose justes et ne s'y attarde pas. Bourbaki, c'est venu après. L'affaire de

la faute, c'est autre chose. Ça vient après la guerre de 1914. La thèse, c'était en 1900. Donc il n'a pas eu de poste, parce qu'il n'était pas « distingué ». De plus, le calcul des probabilités n'a commencé à être reconnu en France que dans les années 30. Mais en Allemagne aussi.

M.T. : Qui étaient les grands probabilistes en 1900 ?

B.B. : Il n'y en avait pas. Le calcul des probabilités, en tant que discipline mathématique, date d'après 1925. Il y a eu l'époque laplacienne jusqu'en 1830, puis c'est la traversée du désert, les mathématiciens ne s'intéressant plus du tout à ces choses-là, et ils s'y sont réintéressés beaucoup plus tard. Prenons Paris. La thèse de Bachelier, c'est 1900. Les thèses de probabilités suivantes, il faut attendre les années vingt, Deltheil, Francis Perrin et surtout la fin des années trente avec Dugué, Doeblin, Ville, Malécot, Fortet, Loève.

M.T. : La thèse de Bachelier était considérée comme une thèse de probabilités. Est-ce comme ça qu'il la voyait ?

B.B. : Non. C'était une thèse de physique mathématique, mais comme ce n'était pas de la physique - c'était de la Bourse - ce n'était pas un sujet reconnu.

M.T. : Il y avait quand même à l'époque une notion de mouvement brownien ?

B.B. : Bachelier n'en parle pas du tout. Il l'a su longtemps après, car il y a eu beaucoup de publications vulgarisées sur ce sujet. Mais en 1900, zéro. La traduction de Boltzmann² [28] en France, c'est 1902 et 1905. Et Boussinesq était un pur mécanicien. Pour lui, la physique mathématique, ce sont des équations différentielles.

M.T. : Pourquoi Bachelier a-t-il introduit le mouvement brownien ?

B.B. : Afin de fixer le prix des options. (Les options que Bachelier considère sont un peu différentes de celles d'aujourd'hui.) Il utilise les accroissements du mouvement Brownien pour modéliser les changements « absolus » des prix, alors qu'aujourd'hui on préfère les utiliser pour modéliser les changements « relatifs » des prix (cf. Samuelson [113, 114, 115])³.

2. Le mouvement brownien doit son nom au botaniste écossais Robert Brown [36], qui a remarqué en 1827 que les grains de pollen en suspension dans l'eau ont un mouvement oscillatoire rapide quand on les regarde sous un microscope. Le travail original de Brown a été reproduit et décrit dans [55]. La théorie cinétique qui relie la température à l'énergie cinétique moyenne a été développée plus tard, et en particulier par Ludwig Boltzmann. Elle constitue la base de l'explication du mouvement brownien qu'Einstein [51] a donnée en 1905.

3. L'idée de modéliser le logarithme des prix par des variables aléatoires gaussiennes indépendantes a aussi été suggérée en 1959 par Osborne [96] qui, à l'époque, ne semblait connaître ni Bachelier, ni Samuelson (cf. aussi [2] et [26]). Osborne était un physicien qui travaillait au Naval Research Laboratory à Washington D.C. Il a enseigné plus tard un cours à l'université de Californie à Berkeley. Ses notes de cours ont été publiées [98]. Dans son article de 1959 [96], Osborne ne cite pas Bachelier, mais à la suite d'une lettre à l'éditeur, écrite par A. G. Laurent [82], Osborne envoie une réponse [97] où il cite Bachelier. Au début

M.T. : Est-ce Poincaré qui a fait le rapport de la thèse ?

B.B. : Oui, c'était ainsi à cette époque. Il y a trois personnes dans le jury mais il n'y en a qu'une qui rapporte. Les deux autres membres du jury étaient Appell et Boussinesq. Ils n'ont sans doute rien lu. Par contre, Poincaré a lu, il lisait tout. Dès qu'il y avait une thèse que personne ne voulait lire, sur tous les sujets, physique appliquée, physique expérimentale, on en chargeait Poincaré ; j'ai vu des rapports de Poincaré sur des appareillages invraisemblables. Il avait une intelligence incroyablement rapide.

M.T. : Est-ce pour ça qu'on lui a demandé de rapporter sur la thèse de Bachelier ?

B.B. : Peut-être. Mais c'est aussi parce qu'il connaissait Bachelier.

M.T. : Bachelier avait, en effet, suivi son cours. Mais dans ces cours là, parlait-on au professeur ?

B.B. : Jamais. C'était impensable de poser une question. Même après le cours. Dans la biographie de Jerzy Neyman⁴ par Constance Reid [112], Neyman raconte que, boursier Rockefeller à Paris, il a suivi le cours de probabilité de Borel⁵, il descend un jour lui poser des questions. Borel lui répond : « You are probably under the impression that our relationships with people who attend

de [97], il indique qu'après la publication de son article de 1959 [96], des lecteurs lui ont signalé des travaux plus anciens. Il lit alors la thèse de Bachelier et il la résume de la façon suivante (les références ont été modifiées de façon à correspondre à celles de notre texte) :

I believe the pioneer work on randomness in economic time series, and yet most modern in viewpoint, is that of Bachelier [5] also described in less mathematical detail in reference [15]. As reference [5] is rather inaccessible (it is available in the Library of Congress rare book room), it might be well to summarize it here. In it Bachelier proceeds, by quite elegant mathematical methods, directly from the assumption that the expected gain (in francs) at any instant on the Bourse is zero, to a normal distribution of price changes, with dispersion increasing as the square root of the time, in accordance with the Fourier equation of heat diffusion. The theory is applied to speculation on rente, an interest bearing obligation which appeared to be the principle vehicle of speculation at the time, but no attempt was made to analyze the variation of prices into components except for the market discounting of future coupons, or interest payments. The theory was fitted to observations on rente for the years 1894-98. There is a considerable quantitative discussion of the expectations from the use of options (puts and calls). He also remarked that the theory was equally applicable to other types of speculation, in stock, commodities, and merchandise. To him is due credit for major priority on this problem.

4. C'est le Neyman (1894-1981) du fameux lemme de Neyman-Pearson qu'on applique aux tests d'hypothèses statistiques

5. Émile Borel (1870-1956) est le fondateur de l'école française de théorie des fonctions (Baire, Lebesgue, Denjoy, etc.) Dans son traité [29] de théorie des fonctions de 1898, Borel introduit sa mesure, comme unique prolongement dénombrablement additif de la longueur des intervalles, qui est la source de la théorie moderne de la mesure et de l'intégration. Les ensembles de Borel portent son nom. À partir de 1905, Borel s'est intéressé au calcul des probabilités et ses applications. Il énonce le premier théorème presque sûr de la théorie, la loi forte des grands nombres pour le jeu de pile ou face, dont il esquisse une démonstration à partir du lemme qui porte son nom. Le livre de Fréchet [56] décrit la vie et l'oeuvre de Borel

our courses are similar here as elsewhere. I am sorry. It is not the case. Yes, it would be a pleasure to talk to you, but it would be more convenient if you would come this summer to Brittany where I will be during vacation »⁶. Neyman n'était déjà plus si jeune. C'était en 1926, il avait 32 ans.

M.T. : Où avez-vous trouvé le rapport de thèse de Poincaré ?

B.B. : Aux Archives nationales⁷. Tout ça reste pour l'éternité. Voici le début de son rapport⁸.

Le sujet choisi par M. Bachelier s'éloigne un peu de ceux qui sont habituellement traités par nos candidats ; sa thèse est intitulée Théorie de la Spéculation et a pour objet l'application du Calcul des Probabilités aux Opérations de Bourse. On pourrait craindre d'abord que l'auteur ne se soit fait illusion sur la portée du Calcul des Probabilités, comme on l'a fait trop souvent. Il n'en est rien heureusement ; dans son introduction et plus loin dans le paragraphe intitulé « la probabilité dans les Opérations de Bourse », il s'efforce de fixer les limites dans lesquelles on peut avoir légitimement recours à ce genre de Calcul ; il n'exagère donc pas la portée de ses résultats et je ne crois pas qu'il soit dupe de ses formules.

M.T. : Poincaré ne semble pas être convaincu de l'applicabilité du calcul des probabilités aux questions boursières.

B.B. : Il faut dire que Poincaré était très sceptique sur l'application du calcul des probabilités à quoi que ce soit. Il a changé de point de vue en 1906, après les articles d'Émile Borel. Mais avant, il y avait eu l'affaire Dreyfus.

M.T. : Quelle relation y a-t-il entre Poincaré et l'affaire Dreyfus ?

B.B. : On accusait Dreyfus d'avoir dissimulé son écriture sur un document compromettant, « le bordereau ». La question était alors de savoir si ce document était écrit d'une écriture naturelle où le hasard intervient, ou bien si c'était une écriture contrainte, dite « forgée ». Un problème typique de test statistique. Poincaré avait été appelé par la défense pour témoigner par écrit sur la valeur même de l'argument probabiliste. Poincaré avait commencé en disant que l'expert de l'Accusation, Alphonse Bertillon, avait commis des fautes de calcul « colossales », mais que de toutes façons, le calcul des probabilités ne peut pas s'appliquer aux sciences morales⁹. Si vous regardez le

6. cf [reid ·1982], p. 66.

7. Le rapport de thèse de Bachelier se trouve dans le registre des thèses de la Faculté des sciences de Paris, déposé aux Archives nationales, 11 rue des Quatre-Fils, 75003 Paris, sous la cote AJ/16/5537. Il est daté du jour de soutenance de la thèse, c'est à-dire le 29 mars 1900

8. On trouvera plus bas le texte complet ainsi que le court rapport de soutenance d'Appell.

9. La lettre est reproduite dans le journal « Le Figaro », (compte rendu sténographique in extenso, 4 septembre 1899). La lettre est adressée à Painlevé qui avait été appelé comme témoin de la Défense et il a lu cette lettre de Poincaré sur le « système Bertillon ». Voici

cours de Poincaré sur le calcul des probabilités, vous verrez qu'il est sceptique quant aux applications.

M.T. : Qu'est ce qui a surtout intéressé Poincaré dans la thèse de Bachelier ?

B.B. : C'est d'abord le rapport avec l'équation de la chaleur. Et pourtant ce rapport avec l'équation de la chaleur a déjà été remarqué par Rayleigh en Angleterre. Rayleigh (1842-1919) est un très grand physicien, le successeur de Maxwell à Cambridge, un spécialiste des mouvements vibratoires. Il a eu le prix Nobel en 1904. Rayleigh avait fait le rapport entre le problème des phases aléatoires et l'équation de la chaleur [106, 107]. Vous avez n vibrations qui s'ajoutent. La version la plus simple est un jeu de pile ou face. Une des démonstrations de Bachelier (il a plusieurs raisonnements), c'est un peu ça. Par contre, ce que Rayleigh n'a pas vu du tout et que Bachelier a vu et que Poincaré a compris et apprécié, c'est l'exploitation des symétries, le principe de réflexion, ce qui lui donnera la loi du maximum, c'est quelque chose qui vient vraisemblablement de Bertrand [27]. Poincaré était sans doute le seul à pouvoir comprendre aussi vite l'intérêt de la méthode des cours de Bourse de Bachelier puisqu'il avait introduit en mécanique céleste dès 1890 la méthode des « chemins conséquents » qui fait intervenir les trajectoires.

M.T. : Le principe de réflexion, c'est dû à Bertrand ?

B.B. : Pour le jeu de pile ou face, oui. L'aspect purement combinatoire du principe de réflexion, est dû à Désiré André, un élève de Bertrand. Désiré André était un mathématicien, professeur dans un lycée parisien. Il avait passé sa thèse, mais n'a jamais pu accéder à l'Université de Paris. Il a fait des choses très fines en combinatoire (1870-1880). Le principe de réflexion, pour la ruine des joueurs, c'est déjà dans Bertrand [27], et surtout chez Émile Borel. Mais la version à temps continue ne va pas de soi. Evidemment Bachelier le fait d'une façon heuristique, mais c'est quand même remarquable.

M.T. : Désiré André avait trouvé le principe de réflexion. Ne fut-il donc pas le premier à voir les trajectoires, car le principe de réflexion est basé sur elles ?

B.B. : Chez Désiré André il s'agit d'une symétrie combinatoire, il n'y a pas vraiment de temps ni de trajectoire, mais évidemment il n'en est pas très loin. Les trajectoires sont implicites chez presque tous les probabilistes classiques mais le pas n'est pas franchi. S'il l'avait été, tout aurait sans doute été différent. Nous avons de nos jours un point de vue déformé. Le jeu de pile ou face, on voit que ça monte et que ça descend. A l'époque, pas du tout.

M.T. : Bachelier a appris les probabilités dans le cours de Poincaré. Est-ce que ce cours existe encore ?

comment Poincaré conclut sa lettre Rien de tout cela n'a de caractère scientifique, et je ne puis comprendre vos inquiétudes. Je ne sais pas si l'accusé sera condamné, mais s'il l'est, ce sera sur d'autres preuves. Il est impossible qu'une pareille argumentation fasse quelque impression sur des hommes sans partis pris qui ont reçu une éducation scientifique solide.

B.B. : Oui, il existe (voir référence [102]). Il y a eu deux éditions, une en 1896 et une en 1912, juste l'année de sa mort. L'édition de 1912 est très intéressante. Celle de 1896, qu'avait dû lire Bachelier, l'est moins. Bachelier s'est surtout servi du livre de Bertrand [27] qui date de 1888. Bertrand est un personnage contesté. On connaît «les séries de Bertrand», «les courbes de Bertrand», etc. Il est mort en 1900, l'année de la thèse de Bachelier. Il était professeur de physique mathématique au Collège de France. Il a enseigné toute sa vie un cours de probabilité, car il était également professeur à l'École Polytechnique, et son livre est très brillant.

M.T. : Est-ce que Poincaré connaissait les résultats de Rayleigh ?

B.B. : Pas du tout. Les travaux de Rayleigh sur les «random vibrations» commencent en 1880 et se terminent l'année de sa mort en 1919. (La deuxième édition de son livre [106] date de 1894 et contient de nombreux résultats à ce sujet.) Les articles de Rayleigh étaient publiés dans ces revues anglaises qui n'étaient pas lues en France ; à l'époque, les Français ne lisaient pas l'anglais. C'était un moment où la physique française était dans un état de sommeil. C'est Pólya [104], qui était en Suisse à Zurich, qui a fait connaître à Paris en 1930 les résultats de Rayleigh. Pólya était quelqu'un qui lisait beaucoup. Il s'est intéressé aux probabilités géométriques en 1917, et aux réseaux de rues dans les années vingt.

M.T. : Mais je suppose qu'après Einstein, on a fait le rapport avec ce que Rayleigh avait fait.

B.B. : Il y a là de nombreuses traditions différentes. Et la synthèse de tout cela a été faite au moment du redémarrage de la théorie des probabilités dans les années 30. On s'est alors aperçu que tout ça, c'était un peu la même chose mais dans des traditions différentes.

M.T. : Après sa thèse, est-ce que Bachelier a voulu faire quelque chose d'autre ?

B.B. : Ah non, pas du tout. Quand il a découvert les diffusions, cela a été pour lui une révélation, une fascination qui ne l'a plus jamais quitté. Ce sont évidemment des idées qui courent depuis Laplace (1749-1827). Laplace est passé des équations aux différences aux équations aux dérivées partielles. Ça ne lui pose pas de problèmes. Mais seulement c'est de l'analyse, c'est un esprit combinatoire. Bachelier, c'est un esprit très physique, très concret, il voit ces cours de Bourse, ils sont sous ses yeux. Et cela change le point de vue. Il a une position très originale, unique. Rayleigh n'a pas cette vision là. Il voit des vibrations. Bachelier voit des trajectoires. A partir de ce moment là, il a consacré toute son énergie à cela, autant qu'on puisse le savoir. Cela se voit si l'on regarde ses manuscrits aux Archives de l'Académie des Sciences. Ses formules sont calligraphiées comme des œuvres d'art (et les démonstrations bâclées). Il n'a plus jamais arrêté, jusqu'à sa mort en 1946. Aussitôt qu'il a soutenu sa thèse, il publie un article [6] en 1901, où il reprend tous les résultats classiques sur les jeux avec sa technique d'approximation par une

diffusion (comme on l'appelle maintenant). Il a repris en gros le livre de Bertrand [27] et il a tout réécrit en adoptant, ainsi qu'il le dit, un point de vue «hyperasymptotique». Car selon lui, Laplace a bien vu le point de vue asymptotique, mais il n'a pas été au delà, ce que lui, Bachelier, a fait.

M.T. : Le point de vue asymptotique, c'est le point de vue de la distribution limite gaussienne. Le point de vue hyperasymptotique, c'est le point de vue de la trajectoire limite, qui est continue vue de loin.

B.B. : Il le fait de façon très maladroite, car ce n'est pas vraiment un mathématicien. Mais Kolmogorov [76] en 1931¹⁰, Khinchine [75] en 1933¹¹ et les probabilistes de l'après-guerre ont compris la richesse du point de vue approximation-diffusion.

M.T. : Mais les techniques n'existaient pas.

B.B. : Non, bien sûr, mais il y a la fraîcheur du point de vue et l'enthousiasme. Il a donc continué à travailler, il a essayé d'obtenir des bourses. Il y avait quelques bourses de recherche à l'époque en France, une invention due aux rentiers. Certains d'entre eux n'avaient pas de descendants, ils léguaient leurs rentes à l'université. Les premières bourses de recherche, c'est 1902. Avant il n'y avait rien. C'est pourquoi la recherche en France était quelque chose de marginal. C'est seulement à l'Université de Paris qu'on faisait de la recherche, et encore.

M.T. : Bachelier a-t-il eu des précurseurs à la Bourse ?

B.B. : Il y a Jules Regnault qui a publié un livre [111] en 1863 (cf. [70]). Quarante ans avant Bachelier, il a vu la loi de la racine carrée, les écarts moyens sont exprimés en raison de la racine carrée du temps¹². C'est un livre sur la philosophie de la Bourse qui est assez rare, je n'en connais qu'un seul exemplaire, à la Bibliothèque Nationale¹³.

M.T. : Pour trouver ça sans base mathématique, ils ont dû avoir recours à une estimation empirique.

10. Voir plus loin

11. Voici ce que Khinchine [75] écrit (page 8) :

Cette nouvelle approche diffère de la précédente du fait qu'elle implique une recherche directe de la fonction de distribution du processus limite continu. Par conséquent, la solution apparaît comme une loi de distribution propre (et non, comme auparavant, comme limite de lois de distributions.) Bachelier [5, 12] fut le premier à suivre cette nouvelle approche, mais avec des moyens mathématiques inadéquats. Le développement et la généralisation de cette approche par Kolmogorov [76, 77] et par de Finetti [46, 45] constituent l'un des plus beaux chapitres du calcul des probabilités...

[Traduit de l'allemand Les numéros de citation ont été modifiés de façon à correspondre à ceux de notre texte]

12. L'écart moyen est sans doute calculé en prenant la moyenne des valeurs absolues de la déviation des cours entre deux périodes de temps Regnault n'offre pas de définition précise.

13. The *Library of Congress*, Washington D.C , possède aussi un exemplaire. Le catalogue indique que Jules Regnault est mort en 1866.

B.B. : La raison que Regnault donne est curieuse (rayon d'un cercle dont le temps est la surface...) ¹⁴ . Mais il a vérifié la loi de la racine carrée sur le cours des rentes. Comment l'a-t-il trouvée, je n'en sais absolument rien. Regnault, n'est visiblement pas quelqu'un qui a fait des études mathématiques supérieures. J'ai essayé de regarder s'il avait été reçu au baccalauréat, mais je n'ai pas trouvé. Il a sans doute étudié tout seul, en particulier Quetelet et peut-être Cournot ¹⁵ . On ne sait rien encore de ce Regnault, qui serait le Kepler de la Bourse dont Bachelier serait le Newton (toutes proportions gardées).

M.T. : Qui a publié le livre de Regnault ? la Bourse ?

B.B. : Il y a une littérature gigantesque sur la Bourse. Mais ce ne sont pas des livres intéressants (« Comment faire fortune ? », etc.). Donc il y a celui-là qui est singulier, mais qui est connu. Émile Dormoy [49], un grand actuaire français, le cite ¹⁶ en 1873 et mentionne la loi de la racine carrée. Les agents de change ont tenu compte du livre de Regnault et si vous regardez les cours de finance de la fin du XIX^e siècle, ils parlent de la loi de la racine carrée.

M.T. : Alors Bachelier devait connaître cette loi.

B.B. : Bien sûr, c'est évident, il devait la connaître. De la même façon que Bachelier connaissait les diagrammes de Lefèvre, qui représentent des opérations concrètes de Bourse ¹⁷ . On pouvait en même temps acheter et vendre le même produit à termes différents. Il y a une façon graphique de représenter la chose. La première réflexion de Bachelier est sur ces diagrammes.

14. Des extraits sont donnés à la fin de cet article.

15. Adolphe Quetelet (1796-1874) a été influencé par Laplace et Fourier. Il a utilisé la loi normale dans un autre contexte que celle de la loi des erreurs [105]. Antoine Augustin Cournot (1801-1877) est l'auteur de [43] mais aussi de [42] où il discute de l'offre et de la demande.

16. Voici ce que Dormoy écrit ([49], page 53)

Pour se faire une idée de l'impôt réellement payé à la Bourse sur chaque opération, il faut donc estimer quel est l'écart moyen que l'on peut obtenir entre les cours dans un temps donné. Or il résulte d'observations faites pendant longtemps, et résumées par M. Jules Regnault dans son ouvrage intitulé Philosophie de la Bourse, que l'écart moyen pendant 30 jours est, pour la rente, de 1,55 frs, et que, pour des durées plus grandes ou plus petites qu'un mois, l'écart moyen des cours est en proportion de la racine carré de leur nombre de jours.

17. Henri Lefèvre est né à Châteaudun en 1827. Il a suivi les cours de la Faculté des sciences de Paris et a obtenu une licence de sciences naturelles en 1848. Ne trouvant pas de poste d'enseignement il s'est orienté vers le journalisme économique, il a tenu la rubrique boursière de plusieurs journaux et a même été rédacteur en chef d'un journal d'informations sur les pays d'Amérique du sud en langue espagnole *El eco hispano americano*. Il a été, en 1869, l'un des fondateurs de l'Agence centrale de l'Union financière et ses ouvrages sur la Bourse [83, 85] datent de cette période là. Il connaissait bien la vie économique et ses diagrammes sont très intelligents (cf [69]). Ces diagrammes ont été retrouvés et publiés indépendamment en 1873 par un actuaire polytechnicien Léon Pochet [101]. Dans le même numéro, Henri Lefèvre [84] proteste et revendique la méthode exposée par Pochet. C'est à la suite de cette affaire que Lefèvre est nommé membre agrégé du cercle des actuares. A partir de ce moment là, il a travaillé dans les Assurances, en particulier à l'Union, une des plus importantes compagnies parisiennes.

BACHELIER ET SON ÉPOQUE

M.T. : Tout ça ne porte que sur les rentes ?

B.B. : Oui.

M.T. : Il y avait sans doute aussi des émissions constantes de rentes.

B.B. : Par exemple, les Allemands ont financé la guerre de 1870 en émettant des emprunts à Paris et les Français ont payé les « réparations » de la guerre aux Allemands par un emprunt de 5 milliards souscrit à la Bourse de Paris. Les grands réseaux de chemin de fer ont été financés par des emprunts souscrits à Paris, etc.

M.T. : Où publie Bachelier ?

B.B. : Jusqu'en 1912 Bachelier a publié ses travaux grâce à l'appui de Poincaré, car il fallait quelqu'un qui les recommande aux *Annales de l'École Normale Supérieure* ou au *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*. Ce sont des revues importantes. Mais les articles de Bachelier n'ont pas été lus. Et Poincaré, à la fin, visiblement ne les lit pas : il encourage.

M.T. : La thèse de Bachelier a-t-elle été publiée ?

B.B. : Elle a été publiée aux *Annales de l'École Normale Supérieure* [5] en 1900.

M.T. : Elle a aussi été traduite en anglais et réimprimée en 1964 dans le livre *The Random Character of Stock Market Prices* [41].

B.B. : Ce qui est curieux, c'est qu'Émile Borel, qui est un mathématicien très important et qui fait partie de l'« establishment », ne s'est jamais intéressé à Bachelier. Son intérêt, c'était la physique statistique, en rapport avec la théorie cinétique, le paradoxe de l'irréversibilité. C'est en 1905 que Borel publie ses premiers travaux probabilistes [30].

M.T. : Est-il plus jeune que Bachelier ?

B.B. : Non, ils sont à peu près du même âge : Borel 1871, Bachelier 1870. Borel s'est bien sûr beaucoup intéressé aux probabilités, mais pas à Bachelier. Borel a été amené à rapporter sur les demandes de bourse de Bachelier. Il a toujours émis des rapports favorables, car Bachelier avait très peu d'argent, mais sans jamais s'intéresser à ses travaux (autant que je sache).

M.T. : Mais Bachelier travaillait à la Bourse ?

B.B. : Peut-être, mais il devait recevoir un salaire très modeste. Borel avait une position dominante au Conseil de la Faculté des Sciences. A chaque fois que Bachelier faisait une demande, Borel faisait un rapport positif. C'étaient de petites sommes d'argent. Je crois qu'il a eu quatre fois 2000F. C'étaient des francs-or, mais c'étaient de petites sommes. Donc Bachelier, à partir des années 1906-1907, a obtenu trois ou quatre fois de petites bourses comme ça. C'est là qu'il a pu rédiger cette espèce d'énorme traité de calcul des

probabilités, publié à compte d'auteur [12]. Mais il ne fait que reprendre ses articles.

M.T. : Il a écrit un article après sa thèse sur les diffusions. Était-il intéressant ?

B.B. : Oui c'est un article publié en 1906 qui s'appelle «sur les probabilités continues» (cf. [7]). C'est un article extraordinaire. Il a fait deux grandes choses, sa thèse et puis ça.

M.T. : Bachelier était assez isolé avant la guerre de 14 ?

B.B. : De Montessus¹⁸ [47] a publié en 1908 un livre sur le calcul des probabilités et ses applications et le chapitre sur la finance est basé sur la thèse de Bachelier. André Barriol¹⁹ [25] expose le modèle gaussien de Bachelier dans son livre sur les opérations financières. On trouve également un livre de vulgarisation sur la Bourse de Gherardt [60] où Regnault et Bachelier sont mentionnés²⁰. Mais, en fait, Bachelier était essentiellement isolé. Dans ces années là, il est toujours à Paris. Il ne semble pas avoir de rapports avec qui que soit.

M.T. : Mais comment se fait-il qu'Émile Borel ait tant de pouvoir pour octroyer des bourses ? Il devait être très jeune aussi ?

B.B. : Il a soutenu son doctorat en 1894 à l'âge de 23 ans. Il était exceptionnel. Il a été nommé à la Sorbonne à 25 ans, ce qui était sans précédent parce qu'à la Sorbonne on était nommé à 50 ans. Borel était le premier partout. Il a épousé la fille de Paul Appell, doyen de la Faculté des Sciences de Paris.

M.T. : Celui des polynômes dits d'Appell ?

B.B. : Oui, Appell était un mathématicien important. Borel a beaucoup écrit mais il ne semble pas qu'il ait fait attention à Bachelier. Borel s'est beaucoup intéressé aux probabilités. En 1912 (cf. [33]), il écrit qu'il veut consacrer toute

18. Robert de Montessus (1870-1937) était professeur à la Faculté catholique des sciences de Lille et à l'Office national météorologique. Il a soutenu une thèse sur les fractions continues algébriques en 1905 qui a obtenu en 1906 le grand prix des sciences mathématiques.

19. Alfred Barriol (1873-1959) est un polytechnicien de la promotion 1892 qui a fait une très belle carrière d'économiste et d'actuaire, il a été le premier professeur de finance à l'Institut de Statistique de l'Université de Paris en 1923 et l'un des conseillers financiers des divers gouvernements français. Alors que le livre de Montessus [47] n'a pas eu un grand succès, le livre de Barriol [25] a servi à des générations d'étudiants en finances et assurances.

20. Maurice Gherardt n'appartient pas à une société savante. Ses œuvres indiquent le genre de ses intérêts et de ses sources de revenus. *Vers la fortune par les courses, guide pratique du parieur aux courses de chevaux...exposé théorique et pratique d'une méthode rationnelle et inédite de paris par mises égales permettant de gagner 4000frs par an avec 500frs de capital* (Paris : Amat, 1906), *La vie facile par le jeu à la roulette et au trente-et quarante* (Paris : Amat, 1908); *Le gain mathématique à la Bourse; la spéculation de Bourse considérée comme un jeu de pur hasard, théorie mathématique de la probabilité en matière de cours, écarts et équilibres, conjectures alternantes, tableaux et graphiques à l'usage des spéculateurs, exposé théorique d'une méthode de spéculation assurant un bénéfice considérable et continu* (Paris : Amat, 1910, qui est [60])

son énergie au développement des applications du calcul des probabilités et il a réussi. Il voyait les probabilités comme une philosophie générale, un mode de pensée pour comprendre les sciences et en particulier la physique. Mais Bachelier a dû lui paraître peu important, parce que cette affaire de Bourse, ce n'était pas très sérieux. Et cette affaire de diffusion hyperasymptotique, pour Borel qui était un esprit brillant, ça ne l'intéressait pas. Sans doute juge-t-il que c'est inutile, la formule de Stirling suffit pour les jeux. Mais Borel a dirigé la thèse de Francis Perrin²¹ sur le mouvement brownien de rotation et ses applications physiques, une thèse remarquable publiée en 1928. Borel est un esprit un peu paradoxal. C'est un mathématicien très puissant. C'est l'un des fondateurs de la théorie moderne des fonctions. Et d'autre part Borel est très élitiste. Vous comprenez ce que veut dire « élitiste » dans le contexte français ? Ça veut dire que Bachelier c'est sans importance.

M.T. : Pourquoi Bachelier a-t-il écrit un livre ?

B.B. : C'était son livre de cours [12], publié en 1912. Bachelier était titulaire d'un cours libre, mais non payé, à l'Université de Paris de 1909 à 1914 et il a enseigné les probabilités.²² Bachelier a aussi écrit un autre livre, *Le Jeu, la Chance et le Hasard* [15] qui a paru en 1914 et a été très populaire. Mais toutes ces activités scientifiques ont cessé en 1914 lorsque la guerre a éclaté.

M.T. : A-t-il fait la guerre ?

B.B. : Oui, il a fait toute la guerre et est devenu lieutenant. C'est-à-dire qu'il a fait une « bonne guerre ». La guerre a tué un très grand nombre de jeunes mathématiciens. Ce qui a ouvert de nouvelles perspectives de carrière pour Bachelier. A partir de 1919, Bachelier a été chargé de cours aux universités de Besançon (1919-1922), Dijon (1922-1925) et Rennes (1925-1927). Le poste de « chargé de cours » est non titulaire (sans *tenure*) mais rémunéré et relativement stable, en remplacement d'un professeur titulaire en congé ou non encore remplacé.

M.T. : Est-ce que Bachelier a essayé d'obtenir un poste permanent ?

B.B. : La chaire de calcul différentiel à Dijon qui avait été occupée par René Baire est devenue disponible en 1926 et Bachelier avait suppléé Baire. Bachelier, qui avait 56 ans, a alors postulé la chaire de Baire. Dans les

21. Francis Perrin (1901-1992), fils du prix Nobel Jean Perrin n'a pas suivi une scolarité ordinaire. Il recevait des cours particuliers des meilleurs savants du moment avec les enfants de Marie Curie et ceux de Paul Langevin (1872-1946). Émile Borel a enseigné les mathématiques au jeune Francis (Borel était un ami très proche de son père depuis l'École Normale Supérieure). Après ses thèses (une de math, une de physique), Francis Perrin a été nommé professeur de physique théorique à la Sorbonne puis au Collège de France. Il a joué un rôle de premier plan dans la mise en œuvre de la politique nucléaire de la France dans les années cinquante-soixante, comme haut commissaire à l'énergie atomique.

22. Borel a enseigné un cours de probabilités deux fois en 1908 et 1909 et il est vraisemblable que Bachelier ait pris la suite de Borel. Après la guerre de 14, en 1919, Borel s'est fait transférer de la chaire de théorie des fonctions qu'il occupait depuis 1908 à la chaire de calcul des probabilités et physique mathématique qui avait été occupée par Boussinesq.

universités de province, il y avait deux chaires de mathématiques, une chaire de calcul différentiel et une chaire de mécanique. C'étaient les deux cours obligatoires pour la licence. La chaire de mécanique de Dijon était occupée par un mathématicien connu, Maurice Gevrey²³, un spécialiste des équations aux dérivées partielles (cf. [57, 58]) qui, bien sûr, connaissait l'équation de la diffusion. C'est lui qui devait faire un rapport sur Bachelier. Il a dû regarder rapidement ce que Bachelier avait écrit car ce n'était pas sa théorie à lui et c'était étrange. Bachelier a souvent des raccourcis où il ne fait pas beaucoup attention aux questions de normalisation et de convergence.

M.T. : C'est sans doute une question de simplification.

B.B. : Oui, c'est évident. En lisant Bachelier, on a parfois l'impression qu'il considère que le mouvement brownien est différentiable, sans l'être. Gevrey avait l'article de 1913 publié dans les Annales de l'École Normale Supérieure [13] où Bachelier pose la question suivante : « Un point géométrique M est animé d'une vitesse v dont la grandeur est constante et dont la direction varie constamment au hasard. Le mouvement de M étant rapporté à trois axes rectangulaires passant par sa position initiale, quelle est la probabilité pour que, au bout du temps t , le point considéré ait pour coordonnées x, y, z ? ». La réponse est que le point M est animé d'un mouvement (brownien) de Bachelier. Mais cela n'est pas possible si la vitesse est constante et finie ainsi que Bachelier semble le supposer. En effet, si on se place en dimension 1, la vitesse du mobile M de Bachelier est à chaque instant $+v$ avec probabilité $1/2$ ou $-v$ avec probabilité $1/2$. Sa position au temps t est $\sum \pm v dt$. Donc l'espérance mathématique de sa position est 0 et la variance est $\text{Var}(\sum \pm v dt) = (v dt)^2 t/dt$, de l'ordre de dt . Comme dt est infinitésimal la variance est négligeable, il n'y a pas de mouvement et le point M ne peut jamais quitter son point de départ. Pour qu'il y ait mouvement, il faut normaliser v par $1/\sqrt{dt}$, c'est-à-dire poser $v = v_0/\sqrt{dt}$, où $0 < v_0 < \infty$. L'on communique alors à M une vitesse infinie, ce qui va lui permettre de se déplacer. Les « accroissements » $v dt$ deviennent $(v_0/\sqrt{dt}) dt = v_0 \sqrt{dt}$, ce qui donne $\text{Var}(\sum \pm v dt) = \text{Var}(\sum \pm v_0 \sqrt{dt}) = (v_0^2 dt) t/dt = v_0^2 t$, une valeur finie et non nulle. C'est ce que Bachelier avait fait dans sa thèse, dans le contexte du jeu de pile ou face mais il ne reproduit pas ce raisonnement en 1913.

M.T. : Mais est-ce que Gevrey le savait ?

B.B. : Non, il n'en avait aucune idée, mais il a dû lire cette page de l'article de 1913 et sauter au plafond. Pour Bachelier, c'était une façon habituelle de parler.

M.T. : C'est donc un vrai malheur.

23. Maurice Gevrey (1887-1957) était le grand spécialiste français de la théorie des équations aux dérivées partielles du type parabolique à la suite de Hadamard [64]. En fait, le théorème d'existence et d'unicité des processus de Markov de type continu de Feller [53] en 1936 est basé sur la théorie de Hadamard–Gevrey. Ses œuvres ont été republiées [59].

B.B. : C'est donc tombé sur le mauvais rapporteur. Il a fait un rapport assassin. Mais comme il n'était pas compétent en calcul des probabilités, il a envoyé ça à Paul Lévy²⁴. Lévy, à cette époque là (1926), venait de publier un important ouvrage de calcul des probabilités (cf. [186]). Gevrey le connaissait très bien, car ils étaient tous les deux élèves de Jacques Hadamard. Hadamard était Professeur au Collège de France et avait autour de lui de nombreux élèves très brillants qui formaient une espèce de caste. Visiblement Gevrey ne voulait pas de Bachelier. Gevrey envoie la page incriminée à Lévy en lui demandant (je paraphrase) « Qu'est-ce que tu en penses ? ». Lévy lui répond, « Tu as raison, ça ne marche pas », sans avoir rien lu d'autre que cette fameuse page. On peut imaginer que le but de Bachelier dans son article de 1913 est de montrer que sa modélisation des cours de Bourse s'applique également aux mouvements browniens dont Jean Perrin vient d'expliquer l'importance dans la mise en évidence de la « réalité moléculaire ». C'est en effet en 1913 que Jean Perrin a publié « Les atomes » (cf. [100]), un livre de haute vulgarisation où sont exposées en particulier ses expériences sur le mouvement brownien. On pourrait imaginer aussi bien que Poincaré qui a lu la thèse de Bachelier ait recommandé cet article « cinématique » aux Annales de l'École Normale Supérieure pour la même raison, malgré la « faute » relevée par Lévy et Gevrey, laquelle n'est en définitive qu'une métaphore mécanique audacieuse de la théorie de la spéculation de 1900. Naturellement Lévy n'en a jamais rien su.

M.T. : Est-ce que Bachelier a su le rôle que Lévy avait joué ?

B.B. : Oui, et il était furieux. Il a écrit une lettre circulaire où il accuse Lévy d'avoir bloqué sa carrière et de ne pas connaître ses travaux²⁵.

M.T. : On a le texte de Lévy ?

B.B. : La lettre de Lévy à Gevrey, je ne l'ai jamais vue. Je ne sais pas si elle existe. Par contre, ce que l'on a de Lévy, ce sont deux ou trois phrases dans ses livres, dans son livre [89] sur le mouvement brownien de 1948²⁶ et dans son livre de souvenirs [90]. Dans ce dernier livre qui date de 1970, Lévy exprime

24. Paul Lévy (1886 1971) est avec Kolmogorov et Khinchine l'un des mathématiciens dont les travaux probabilistes ont le plus marqué la première moitié du XXe siècle. Il a soutenu en 1912 une thèse de mathématiques devant un jury composé de Picard, Poincaré et Hadamard, les trois plus grands mathématiciens français du temps. Il est professeur d'analyse à l'École polytechnique et à l'École des Mines dès 1920 et jusqu'à sa retraite en 1959 de l'École Polytechnique. Il a été élu à l'Académie des Sciences dans la section de géométrie en 1964. Ses travaux portent principalement sur divers points d'analyse fonctionnelle, notamment les équations aux dérivées fonctionnelles et sur la théorie des probabilités. En particulier son étude fine du mouvement brownien, commencée en 1938, est un chef d'oeuvre d'intuition.

25. Cette lettre a été retrouvée en plusieurs exemplaires à l'Institut Henri Poincaré à Paris par Madame Nocton, la directrice de la bibliothèque (document 058). L'article Courtault et. al. [44] contient des extraits de cette lettre.

26. Voici les notes dans [89] (deuxième édition) citant Bachelier et indiquant page 15 note (1) : la priorité de Bachelier sur Wiener pour la fonction du mouvement brownien. page 72 note (4) la priorité de Bachelier sur Kolmogorov pour le lien entre mouvement brownien et l'équation de la chaleur page 193 note (4) les priorités de Bachelier sur Lévy pour la loi du maximum, la loi jointe du maximum et du mouvement, la loi jointe (max, min et mouvement).

son regret d'avoir longtemps négligé les travaux de Bachelier à cause d'une faute initiale dans la construction de la fonction du mouvement brownien, faute dont il ne nous dit rien et pour cause²⁷. Il s'agit là visiblement d'un jugement tardif. Donc quelques notes elliptiques sur Bachelier et qui disent en somme « je me suis trompé mais Bachelier aussi ». Il y a aussi une lettre que Lévy a envoyé à Benoit Mandelbrot²⁸, où il écrit :

J'ai entendu parler de lui pour la première fois peu d'années après la publication de mon calcul des probabilités. Donc en 1928, à un ou deux ans près. Il était candidat à un poste de professeur à l'Université de Dijon. Gevrey, qui était professeur, est venu me demander mon avis sur un travail de Bachelier paru en 1913 ... Gevrey était scandalisé par cette erreur et me demandait mon avis. Je lui ai dit que j'étais d'accord avec lui et, sur sa demande, l'ai confirmé par une lettre qu'il a lue à ses collègues de Dijon. Bachelier a été blackboulé, a su le rôle que j'avais joué, m'a demandé des explications que je lui ai données et qui ne l'ont pas convaincu de son erreur... je passe sur les suites immédiates de cet incident.

Je l'avais oublié, lorsqu'en 1931 dans le mémoire fondamental de Kolmogorov, je vois « der Bacheliers Fall²⁹ ». Je recherche alors les travaux de Bachelier, et vois que cette erreur, qui se trouve partout, n'empêche pas qu'il arrive à des résultats qui auraient été corrects si au lieu de v constant il avait écrit $v = c\tau^{-1/2}$, et qu'il se trouve, avant Einstein et avant Wiener, avoir vu quelques propriétés importantes de la fonction dite de Wiener ou de Wiener-Lévy, notamment : l'équation de la diffusion, et la loi dont dépend $\max_{0 \leq \tau \leq 1} X(\tau)$.³⁰

Dans cette histoire avec Gevrey, Lévy n'a pas pris la peine de comprendre ce que voulait dire Bachelier pour qui, une fois pour toutes, le mouvement

27. Lévy [90] (p. 97) écrit :

La fonction du mouvement brownien linéaire, que je désignerai maintenant par $X(t)$, est souvent appelée fonction de Wiener. C'est en effet N. Wiener qui, dans un mémoire de 1923 rapidement devenu célèbre, en a donné la première définition rigoureuse. Mais il serait injuste de ne pas rappeler qu'il eut des précurseurs, notamment le Français Louis Bachelier, et le grand physicien Albert Einstein. Si le travail de Bachelier, paru en 1900, n'a pas attiré l'attention, c'est d'une part parce que tout n'y avait pas le même intérêt (ce qui est encore plus vrai pour son gros Calcul des probabilités imprimé en 1912), d'autre part parce que sa définition initiale était incorrecte. Il n'en est pas moins arrivé, au sujet de la fonction $X(t)$, à un ensemble de résultats cohérents, notamment la loi de probabilité du maximum de $X(t)$ dans un intervalle $(0, T)$ et au fait que la densité de probabilité $u(t, x)$ de $X(t)$ soit une solution de l'équation de la chaleur. Ce dernier résultat a été retrouvé en 1905 par Einstein, qui évidemment ignorait la priorité de Bachelier. Moi même, stupéfait par l'erreur initiale de ce savant, j'ai cru inutile de continuer la lecture de son mémoire. C'est Kolmogorov qui, dans son mémoire de 1931 dont j'ai déjà parlé, a cité Bachelier, et c'est à ce moment que j'ai reconnu l'injustice de mon premier jugement.

28. Lettre du 25 janvier 1964 de Paul Lévy à Benoit Mandelbrot, où il décrit l'affaire Gevrey. Mandelbrot inclut des extraits de cette lettre dans un note biographique intéressante sur Bachelier [93], pages 170 174. D'après Mandelbrot (communication privée), l'original semble avoir été perdu

29. Le cas Bachelier

30. Nous citerons plus bas un autre extrait de cette lettre.

brownien existait, depuis sa thèse où les normalisations étaient faites et les convergences affirmées. L'ironie de l'histoire, c'est que, lorsque Lévy publiera ses beaux travaux sur le mouvement brownien, à partir de 1938, les mêmes mathématiciens (et Hadamard en tête) se moqueront beaucoup de ce $\pm v_0/\sqrt{dt}$ qui représente pour Lévy (comme pour Bachelier) une espèce différente de vitesse, qui « varie constamment au hasard ».

M.T. : L'économiste anglais John Maynard Keynes semble avoir cité Bachelier.

B.B. : En 1921, Keynes, dans son livre sur le calcul des probabilités [74], cite les livres [12, 15] de Bachelier, mais seulement dans le contexte de la fréquence statistique et de la loi de succession de Laplace³¹. L'oeuvre financière de Bachelier n'est pas mentionnée.

31. Keynes [73] a aussi donné en 1912 un compte-rendu du *Calcul des Probabilités* [12] de Bachelier. Keynes écrit dans son compte-rendu :

M. Bachelier's volume is large, and makes large claims. His 500 quarto pages are to be followed by further volumes, in which he will treat of the history and of the philosophy of probability. His work, in the words of the preface, is written with the object, not only of expounding the whole of ascertained knowledge on the calculus of probabilities, but also of setting forth new methods and new results which represent from some points of view une transformation complète de ce calcul. On what he has accomplished it is not very easy to pass judgment. The author is evidently of much ability and perseverance, and of great mathematical ingenuity; and a good many of his results are undoubtedly novel. Yet, on the whole, I am inclined to doubt their value, and, in some important cases, their validity. His artificial hypotheses certainly make these results out of touch to a quite extraordinary degree with most important problems, and they can be capable of few applications. I do not make this judgment with complete confidence, for the book shows qualities of no negligible order. Those who wish to sample his methods may be recommended to read chapter IX, on what he terms Probabilités connexes, as a fair specimen of his original work.

Keynes note au début de son compte rendu

There never has been a systematic treatise on the mathematical theory of probability published in England, and it is now nearly fifty years since the last substantial volume to deal with this subject from any point of view (Venn's Logic of Chance, 1st edit., 1866) was brought forth here. But a year seldom passes abroad without new books about probability, and the year 1912 has been specially fertile.

Il critique ensuite quatre livres, Poincaré [102], Bachelier [12], Carvallo [39] et aussi Markov [95]. Voici ce qu'il écrit à propos de la deuxième édition du cours de Poincaré [102] :

Poincaré's Calcul des Probabilités originally appeared in 1896 as a reprint of lectures. This new edition includes the whole of the earlier edition, but is now rearranged in chapters according to the subjects treated, in place of the former awkward arrangement into lectures of equal length... The mathematics remain brilliant and the philosophy superficial – a combination, especially in the parts dealing with geometrical probability, which makes it often suggestive and often provoking. On the whole there is not a great deal in the book which cannot be found, substantially, elsewhere. Poincaré had to lecture on probability, and this is what without giving any very profound attention to the subject, he found to say. This new edition must have been almost the last maternal to leave his hands before his lamented death. The immense field of Henri Poincaré's achievements had made him one of the greatest mathematicians in Europe, and it must always be a matter of regret to statisticians that modern statistical methods, with their almost equal dependence on mathematics and on philosophy and logic, had not found their way to France in time to receive illumination from his brilliant and

M.T. : Est-ce que Bachelier a enseigné au lycée ?

B.B. : Non, il n'avait pas les diplômes nécessaires. Il fallait être agrégé. Il n'a enseigné qu'à l'université.

M.T. : J'ai entendu dire aussi que Bachelier faisait des fautes dans ses enseignements.

B.B. : Oui, c'est une rumeur qui circule, mais je ne sais pas sur quoi elle est fondée. Un brillant candidat, Georges Cerf, a été élu sur le poste de Baire contre Bachelier mais il n'est resté à Dijon qu'un an. En 1927, il a été nommé à Strasbourg, l'une des plus grandes universités françaises après Paris³². Cerf était normalien et avait soutenu une thèse sur les équations aux dérivées partielles. On comprend que pour Gevrey le choix était fait d'avance. Bachelier n'avait aucune chance. Mais heureusement il a été sauvé. Bachelier avait été chargé de cours à Besançon, un poste s'est libéré à Besançon et il a été pris là-bas. A Besançon, il y avait un mathématicien très original qui n'est plus très connu malheureusement, qui s'appelle Jules Haag. Haag était à Besançon parce qu'il dirigeait l'école de chronométrie (Besançon est près de la Suisse). En probabilités, Haag a notamment introduit la notion de suites échangeables (exchangeable) [63], indépendamment de de Finetti. Il a fait des études très intéressantes pendant la guerre sur les algorithmes stochastiques appliqués aux réglages de tir [62]. Toujours est-il, qu'il a accepté Bachelier. Donc cette histoire que Bachelier enseignait mal ou qu'il faisait des fautes en enseignant, je ne sais pas si c'est très juste : si cela avait été le cas, Haag ne l'aurait pas recommandé à Besançon.

M.T. : Ça vient de qui ça ?

B.B. : Je ne sais pas. Je sais que c'est quelque chose qui avait été dit sur lui mais il y a des témoignages inverses et en particulier à Besançon, où il est resté presque quinze ans, où il enseignait l'analyse. Ça ne devait pas être un cours très élevé mais il devait faire ça d'une façon très consciencieuse, sûrement préparer beaucoup ses cours. Il a dû avoir du mal à enseigner, ça c'est incontestable. Il n'avait aucune facilité à écrire un calcul jusqu'au bout, sans notes. En France, on n'aime pas les gens qui recopient leurs notes au tableau.

M.T. : Est-ce toujours comme ça ?

B.B. : Oui, mais un peu moins car les étudiants sont moins dociles qu'avant. Un cours sans note non préparé devient rapidement un discours vague et vide

speculative intellect. This book has no reference to any of the researches, either German or English, which seek by the union of probability and statistics to forge a new weapon of scientific investigation.

32. René Baire 1874-1932 a été nommé à l'Université de Montpellier en 1901 puis à celle de Dijon en 1905 en remplacement de Charles Méray 1835-1911. Il est atteint dès 1908 de « troubles nerveux prononcés » et mis en congé de maladie, renouvelé d'année en année, à partir de la rentrée 1914 et jusqu'à sa retraite en 1926. Cerf avait suppléé Baire à plusieurs reprises, notamment de 1919 à 1922 (Bachelier l'a remplacé de 1922 à 1925). Après le départ de Cerf pour Strasbourg, c'est René Lagrange qui a été nommé à sa place à Dijon.

avec parfois des éclairs incompréhensibles. Borel et Hadamard, contemporains de Bachelier, brillants représentants de l'élite mathématique française, avaient la réputation dans les années vingt et trente de ne jamais terminer un calcul ni une démonstration. Les étudiants actuels apprécient toujours la performance d'un calcul bien mené sans notes mais ils ne supportent plus les calculs qui tournent court. De sorte que le discours universitaire mathématique français change quelque peu. Il y a sur ce sujet d'innombrables anecdotes. L'une des plus belles que je connaisse se passe dans les années trente au moment où Einstein décide de quitter Berlin. Tous les grands pays lui proposent alors une position dans leurs universités les plus prestigieuses. En France, sur la recommandation de Langevin (l'auteur en 1908 de l'équation différentielle stochastique du mouvement brownien [80], reprise par l'école hollandaise de Lorentz), le Gouvernement décide la création pour Einstein d'une nouvelle chaire du Collège de France, le plus haut établissement d'enseignement supérieur du pays. A Langevin, lui-même professeur au Collège de France, qui l'invite à accepter, Einstein répond que c'est un grand honneur qu'on lui fait là mais qu'il ne peut accepter parce que sa culture scientifique est si réduite que ses conférences seraient risibles. Un étudiant ordinaire connaît ce qu'il connaît³³ et il se voit comme un tzigane qui ne sait pas lire la musique et à qui on demande d'être le premier violon dans un orchestre symphonique. Einstein a préféré Princeton où il n'avait pas à enseigner (avec ou sans notes)³⁴. La lettre d'Einstein à Langevin se trouve dans la correspondance d'Einstein.

M.T. : Est-ce que Kolmogorov³⁵ a lu Bachelier ?

B.B. : Oui. C'est de l'article de Bachelier [7] et de sa généralisation au cas multidimensionnel [10] qu'est parti Kolmogorov vers la fin des années 20 pour faire sa théorie à lui, la théorie analytique des processus de Markov [76, 78]. Voici ce qu'écrivit Kolmogorov en 1931 ([78], Volume 2, p. 63)³⁶ :

33. Il écrit *Ich bin eben kein Könnner und kein Wissen sondern nur ein Sucher* (En fait, je ne suis ni homme d'action ni un savant mais seulement un chercheur).

34. Quelques années plus tard, la situation s'est inversée. Après que Langevin fut arrêté par la Gestapo en Octobre 1940, Einstein écrit une lettre à l'ambassadeur américain William C. Bullitt au Département d'État, lui demandant d'offrir un asile aux États-Unis à Langevin.

35. Andrei Nikolaevich Kolmogorov (1903 1987) est un des plus grand mathématicien du XX^e siècle. Ses contributions sont importantes. Elles couvrent la plupart des domaines des mathématiques pures et appliquées, séries trigonométriques, théorie des ensembles, théorie de l'approximation, logique, topologie, mécanique, théorie ergodique, turbulence, dynamique des populations, statistique mathématique, théorie de l'information, théorie des algorithmes, et bien sûr, la théorie des probabilités dont il est l'un des maîtres incontestés. Son axiomatique de 1933 a joué un rôle considérable dans la mathématisation du calcul des probabilités et ses apports dans les plus importantes branches de la théorie sont fondamentaux, notamment en ce qui concerne les théorèmes limites en théorie des variables aléatoires indépendantes et la théorie analytique des processus de Markov dont il est le véritable fondateur. Kolmogorov s'est également beaucoup intéressé à l'application des mathématiques aux sciences sociales et à la linguistique et également à l'histoire et à la pédagogie des mathématiques (cf l'article synthèse [117])

36. L'un des principaux apports de Kolmogorov dans son article de 1931 a été de rendre rigoureux le passage des schémas discrets aux schémas continus en étendant à ce cadre la méthode de Lindeberg [92] pour démontrer le théorème limite central. C'est ce qui a permis à la théorie hyperasymptotique de Bachelier de devenir vraiment rigoureuse et en particulier

*En calcul des probabilités, on ne considère d'habitude que des schémas où les changements d'états du système ne peuvent se faire qu'à des instants $t_1, t_2, \dots, t_n, \dots$ formant une suite discrète. Il me semble que Bachelier³⁷ a été le premier à faire une étude systématique de schémas où la probabilité $P(t_0, x, t, \mathcal{E})$ varie d'une façon continue avec t . Nous reviendrons aux cas étudiés par Bachelier au §16 et à la conclusion. Notons seulement ici que les constructions de Bachelier sont loin d'être rigoureuses.*³⁸

M.T. : Kolmogorov donc connaissait l'œuvre de Bachelier mieux que les autres mathématiciens³⁹.

B.B. : Il y a deux sources importantes pour Kolmogorov, Bachelier et Hostinský. Bachelier est une source connue, Hostinský beaucoup moins. Hostinský est un mathématicien tchèque qui a relancé la théorie des chaînes de Markov. Les chaînes de Markov faites par Markov, c'était pour généraliser les théorèmes classiques de probabilités dans des situations où il n'y avait pas d'indépendance. Mais le développement de l'aspect physique des chaînes de Markov est dû en grande partie à Hostinský vers la fin des années 20. Pour comprendre l'article de Kolmogorov [76] de 1931, où il y a l'équation de Kolmogorov, il faut remonter aux deux sources Bachelier et Hostinský. Les conditions du théorème ergodique sont dans Hostinský [65, 66] et l'idée des probabilités continues avec la condition dite de Chapman-Kolmogorov est chez Bachelier [7]. Bachelier considère un cas qui n'est pas tout à fait général car il fait une hypothèse d'homogénéité.

M.T. : Que pense Hostinský de Bachelier ?

B.B. : Pas grand chose. Hostinský a écrit à Fréchet⁴⁰ que Bachelier faisait trop d'erreurs pour être lu. Les mathématiciens des années trente qui ont lu Bachelier considèrent qu'il ne démontre rien avec rigueur et ils ont raison, car il expose ses résultats à la manière d'un physicien. Il indique des chemins et donne des formules, sans aucune démonstration. Mais il y a une différence entre langage de physicien et erreur. Les chemins indiqués par Bachelier et ses formules sont tout à fait exacts et souvent pleins d'originalité et de richesse mathématiques.

M.T. : Qu'a fait Bachelier à Besançon ?

B.B. : Bachelier n'a pratiquement plus rien publié. Il devait visiblement préparer ses cours. Besançon c'est entre 1927 jusqu'à 1937 où il a pris sa

de déduire les équations aux dérivées partielles paraboliques de Kolmogorov à partir des équations aux différences du cas discret

37. I. 'Théorie de la spéculation', *Ann. École Norm. Supér.* **17** (1900), 21; II. 'Les probabilités à plusieurs variables', *Ann. École Norm. Supér.* **27** (1910), 339; III. *Calcul des probabilités*, Paris, 1912

38. Traduction par M.T.

39. Kolmogorov a dit à Albert Shiryaev qu'il a été très influencé par Bachelier (communication personnelle de Shiryaev) [M.T.]

40. Archives Fréchet à l'Académie des Sciences, Institut de France, quai Conti, Paris.

retraite. C'est seulement après son départ en retraite qu'il s'est remis à publier. Il a publié trois livres chez Gauthiers-Villars [21, 22, 23] à compte d'auteur qui sont des résumés de ce qu'il avait fait avant la guerre, mais surtout, en 1941, il a publié une note [24] aux Comptes Rendus qui est extrêmement originale. C'est cette note là que Paul Lévy a lu.

M.T. : Comment cela se fait-il ?

B.B. : Lévy a commencé à s'intéresser au mouvement brownien vers la fin des années trente par l'intermédiaire de l'école polonaise, en particulier Marcinkiewicz qui était à Paris en 1938. Il a retrouvé tous les résultats de Bachelier qu'il n'avait jamais vraiment lu auparavant⁴¹. Lévy s'est pris de passion pour le mouvement brownien. Son livre sur les processus [89] qu'il a entrepris d'écrire n'a été publié qu'en 1948. Lévy était juif et donc interdit de publication pendant la guerre.

M.T. : Où était Lévy pendant la deuxième guerre ?

B.B. : Il a d'abord été à Lyon, puisqu'il était professeur à l'École polytechnique. L'École polytechnique avait été transférée à Lyon. Lyon était en « zone libre ». C'était sous Pétain. Il y avait des lois raciales. Mais comme il était professeur dans une école militaire, il a pu continuer à enseigner un moment. Après le débarquement des américains en Afrique du Nord en 1942, les Allemands ont envahi toute la zone libre. La première grande rafle des juifs à Paris a eu lieu en juillet 42. Lévy s'est caché sous un faux nom d'abord à Grenoble et ensuite à Mâcon.

M.T. : La note de Bachelier est de 1941.

B.B. : C'était du temps où Lévy était encore à Lyon. Bachelier qui s'était retiré en Bretagne chez l'une de ses soeurs, a dû lui envoyer un tiré à part de son travail. Il en existe un exemplaire annoté dans les archives de Lévy⁴². Lévy a indiqué dans la marge qu'il avait écrit à Bachelier et que ce dernier lui avait signalé d'autres propriétés qu'il connaissait et Lévy ajoutait un commentaire sur l'enthousiasme manifesté alors (en 1942 ou approchant) par Bachelier pour la recherche mathématique. Il s'agit de résultats sur les excursions du mouvement brownien qui dépassaient les derniers résultats de Lévy. Voici aussi un extrait d'une lettre de Lévy à Fréchet⁴³ datée du 27 septembre 1943 :

Au point de vue des questions de priorité, j'ai eu une correspondance récente avec Bachelier, qui me dit avoir donné l'équation dite de Chapman

41. Lévy écrit dans son livre de souvenir (p. 123) :

Je n'ai su qu'après la guerre de 1939-1945 que L. Bachelier avait, peu avant la guerre, publié un nouveau livre sur le mouvement brownien. Je n'exclus pas l'hypothèse qu'il y ait dans ce livre quelques-uns des résultats de mon mémoire. Occupé par d'autres travaux, je ne l'ai jamais vérifié.

42. Archives Lévy déposées à la bibliothèque interuniversitaire de mathématiques, Universités Paris VI et VII, Paris.

43. Carton 2 des archives Fréchet déposées aux archives de l'Académie des Sciences, Institut de France, quai Conti, Paris.

dès 1906, dans un mémoire du journal de math. Pouvez-vous vérifier si c'est exact ou le faire vérifier par vos élèves ? Il m'a donné d'autre part sur le mouvement brownien sur la surface de la sphère, qui aurait été étudié par Perrin, une indication que j'ai demandé à Loève de vérifier.

Cet extrait montre qu'en 1942 ou 43, Lévy ne connaissait vraiment ni les articles de Bachelier du début du siècle ni même la thèse [99] de Francis Perrin de 1928. Lévy, qui faisait alors l'étude fine du mouvement brownien, a reconnu enfin l'originalité des résultats de Bachelier. Il lui a aussi écrit et s'est excusé⁴⁴ :

Je m'étais réconcilié avec lui. Je lui avais écrit que je regrettais que l'impression produite par une erreur au début m'ait empêché de continuer la lecture de travaux où il y avait tant d'idées intéressantes. Il m'a répondu par une lettre témoignant d'un grand enthousiasme pour la recherche.

Bachelier a donc correspondu avec Lévy juste avant de mourir (il est mort en 1946, âgé de 76 ans⁴⁵). Cela a été certainement le grand bonheur de Bachelier, lui par quelqu'un, et par le meilleur !

Épilogue

Kiyosi Itô, au Japon, a été plus influencé par Bachelier que par Wiener⁴⁶, et aux États-Unis, Bachelier a été lu par des probabilistes tels que Paul Erdős, Mark Kac, William Feller et Kai Lai Chung⁴⁷ Doob [48] dans son article sur Kolmogorov porte lui aussi un jugement positif sur Bachelier :

Bacheher, in papers from 1900 on, derived properties of the Brownian motion process from asymptotic Bernoulli trial properties. His Brownian motion process was necessarily not precisely defined, but his application of the André reflection principle becomes valid for the Brownian motion process as an application of the strong Markov property. His valuable results were repeatedly rediscovered by later researchers.

dans les années 40. Mais il semble que ce soit Paul Samuelson⁴⁸, qui ait introduit Bachelier auprès des économistes dans les années 50. Voici comment

44. Suite de la lettre du 25 janvier 1964 de Lévy à Mandelbrot [93], page 172.

45. Louis Bachelier est mort à Saint Servan sur Mer, à côté de Saint Malo en Bretagne le 28 avril 1946. Il est enterré à Sanvic près du Havre où se trouvait le caveau de la famille Bachelier.

46. Communication personnelle de l'économiste Robert C. Merton. Itô lui a dit ça en 1994 lors du symposium sur Wiener au Massachusetts Institute of Technology (MIT).

47. cf. Erdős et Kac [52], Chung [40], et Feller [54] qui écrit (dans une note en page 323) .

Credit for discovering the connection between random walks and diffusion is due principally to L. Bacheher (1870). His work is frequently of a heuristic nature, but he derived many new results. Kolmogorov's theory of stochastic processes of the Markov type is based largely on Bacheher's ideas. See in particular L. Bacheher Calcul des Probabilités, Paris, 1912.

48. Paul Samuelson a reçu le prix Nobel d'économie en 1970.

cela s'est passé⁴⁹ : Autour de 1955, Leonard Jimmie Savage après avoir découvert le livre de Bachelier daté de 1914 à la bibliothèque de Chicago ou de Yale, a envoyé une demi douzaine de cartes postales miméographiées à divers collègues, demandant « est-ce que l'un d'entre vous le connaît ? » Paul Samuelson était l'un des destinataires. Mais Samuelson avait déjà entendu parler de Bachelier. Tout d'abord par Stanislaw Ulam, entre 1937 et 1940, qui comme lui appartenait à la *Society of Fellows* de l'Université de Harvard. Ulam était un joueur instinctif. Il faisait à cette époque de la topologie, mais plus tard, il a popularisé les méthodes de simulation Monte Carlo et a travaillé sur la bombe atomique à Los Alamos. Samuelson a également noté l'existence de Bachelier en lisant Feller [54]. Mais, incité par la carte postale de Savage, Samuelson a trouvé la thèse de Bachelier de 1900 à la bibliothèque du MIT. Peu de temps après, par des manuscrits miméographiés et des conférences informelles, il a suggéré que l'on utilise la mouvement brownien géométrique comme modèle des prix de Bourses⁵⁰.

Aujourd'hui, un siècle après sa thèse, Bachelier est enfin considéré, et à juste titre, comme le père des mathématiques financières.

Remerciements

Je remercie Bernard Bru de m'avoir reçu chez lui si gracieusement, de m'avoir accordé cette entrevue, et pour l'enrichissante correspondance qui a suivi. Cette rencontre m'a été suggérée par Jean-Pierre Kahane et Christian Gilain. Je suis également reconnaissant à Franck Jovanovic pour une lecture attentive et Corine Astier, Marie-France Bru, Vladas Pipiras, Jean-François Ravoux, Gérard Vichniac et Nader Yeganefar de m'avoir aidé à mettre ce document en forme.

Dates

1700-1800

Pierre Simon, marquis de Laplace	1749-1827
Robert Brown	1773-1858
Adolphe Quetelet	1796-1874

49. C'est ce que Paul Samuelson a raconté à M.T. le 14 août 2000. Voir aussi [116]. La date 1957, indiquée dans [116] est sans doute tardive, car Savage a dû envoyer ses cartes postales au plus tard en 1956, date de la thèse [79] de Richard Kruizenga au MIT (Kruizenga, qui était un étudiant de Samuelson, cite Bachelier dans sa thèse)

50. En économie, le modèle lognormal a été utilisé dans différents contextes. Il a été très à la mode à Paris dans les années trente et quarante, principalement à cause des travaux de Robert Gibrat [61]. Gibrat modélise les revenus par la loi lognormale qui s'ajuste mieux que les lois de Pareto. L'article d'Armatte [4] donne de nombreuses références à ce sujet. Voir aussi Aitchison et Brown [1], Osborne [97], et Cootner [41].

BACHELIER ET SON ÉPOQUE

1800-1850

Antoine Augustin Cournot	1801-1877
Joseph Bertrand	1822-1900
Henri Lefèvre	1827 - ?
Émile Dormoy	1829-1891
Désiré André	1840-1917
John William Strutt Rayleigh (Lord)	1842-1919
Joseph Boussinesq	1842-1922
Ludwig Eduard Boltzmann	1844-1906

1850-1875

Henri Poincaré	1854-1912
Paul Appell	1855-1930
Émile Picard	1856-1941
Jacques Hadamard	1865-1963
Louis Bachelier	1870-1946
Jean Batiste Perrin	1870-1942
Robert de Montessus	1870-1937
Émile Borel	1871-1956
Paul Langevin	1872-1946
Alfred Barriol	1873-1959
René Baire	1874-1932

1875-1900

Maurice René Fréchet	1878-1973
Albert Einstein	1879-1955
Jules Haag	1882-1953
John Maynard Keynes	1883-1946
Maurice Gevrey	1884-1957
Bohuslav Hostinský	1884-1951
Paul Lévy	1886-1971
George Pólya	1887-1985
Georges Cerf	1888-1979
Alexander Yakovlevich Khinchine	1894-1959
Norbert Wiener	1894-1964

1900-1925

Francis Perrin	1901-1992
Andrei Nikolaevich Kolmogorov	1903-1987
William Feller	1906-1970
Stanislaw Ulam	1909-1984
Paul Erdős	1913-1996
Marc Kac	1914-1984
Kiyoshi Itô	1915 -
Paul A. Samuelson	1915 -
Kai Lai Chung	1917 -
Benoit B. Mandelbrot	1924 -

La loi de 1863 de Regnault sur la racine carrée du temps ⁵¹

Après y avoir mûrement réfléchi, nous avons reconnu l'impossibilité de prendre un rapport unique entre le gain et la perte que présentent les opérations de Bourse, et c'est dans les différentes manières dont se liquide le spéculateur, dans le temps qu'il consacre habituellement à la liquidation de ses affaires, que nous avons enfin trouvé une base certaine pour fixer le rapport des pertes et des gains que ses spéculations doivent inévitablement présenter...

En diminuant les périodes de temps, comme à 5 jours, 3 jours, 2 jours de distance, ou enfin d'une bourse sur l'autre, les moyennes d'écart vont constamment en diminuant.

Par conséquent, les écarts vont en diminuant pour des temps plus rapprochés, en augmentant pour des temps plus éloignés.

Enfin, si on cherche quel est le rapport qui peut unir ces différents écarts aux différents temps dans lesquels ils se sont produits, on peut constater que pour une période moitié moindre, l'écart diminue, non pas de moitié, mais dans une proportion qui est sensiblement à la première comme 1 est à 1,41; pour une période trois fois moindre, l'écart diminue dans un rapport qui est comme 1 à 1,73, pour une période de temps quatre fois moindre, dans le rapport 1 à 2.

Il existe donc une loi mathématique qui règle les variations et l'écart moyen des cours de la Bourse et cette loi, qui ne paraît pas avoir jamais été soupçonnée jusqu'à présent, nous la formulons ici pour la première fois :

L'ÉCART DES COURS EST EN RAISON DIRECTE DE LA RACINE CARRÉE DES TEMPS.

De sorte que le spéculateur qui veut se liquider avec des écarts doubles, c'est-à-dire des différences deux fois plus grandes entre ses prix d'achat et de vente, doit attendre quatre fois plus longtemps; s'il veut se liquider avec des différences triples, neuf fois plus longtemps et ainsi de suite, en multipliant les temps par les carrés des écarts.

Celui qui ne met, par exemple, qu'un jour d'intervalle entre ses liquidations, se liquidera avec un écart moitié moindre que celui qui se liquide tous les quatre jours, trois fois moindre que celui qui se liquide tous les neuf jours, etc... en divisant les écarts par les racines carrées des temps.

Il faut du reste un nombre assez considérable d'opérations pour faire ressortir clairement ces rapports qui deviennent rigoureusement exacts quand le nombre des opérations est excessivement grand.

Essayons de comprendre la raison de cette loi si remarquable :

La valeur, dans ses variations, est toujours à la recherche de son véritable prix, ou d'un prix absolu, que l'on peut se figurer comme le centre d'un

51. Regnault [111], pages 49-52 (texte fourni par by Franck Jovanovitch).

cercle dont le rayon représentera l'écart qui peut se porter indifféremment dans l'un ou l'autre sens et sur tous les points de la surface, dans un temps égal par conséquent à cette surface, et dont tous les points de la circonférence représenteront les limites d'écart. Dans toutes ses variations, la valeur ne fait jamais que s'éloigner ou se rapprocher du centre, et les premières notions de la géométrie nous indiquent que les rayons ou les écarts sont proportionnels aux racines carrées des superficies ou des temps.

Pourquoi est-ce la loi inverse qui se produit dans la pesanteur ou les oscillations du pendule, où les espaces parcourus et les écarts d'oscillations sont en raison des carrés des temps ? C'est uniquement parce que les corps, dans leur chute, se dirigent de la circonférence au centre, tandis que la valeur, dans ses plus grands écarts, est repoussée du centre à la circonférence.

Quel sujet d'étonnement et d'admiration nous offrent les vues de la Providence, quelles réflexions nous suggère l'ordre merveilleux qui préside aux moindres détails des événements les plus cachés ! Quoi ! les variations de la Bourse sont soumises à des lois mathématiques immuables ! Des événements qui sont le produit du caprice des hommes, des secousses les plus imprévues du mouvement politique, des combinaisons financières les plus savamment étudiées, le résultat d'une multitude d'événements qui n'ont aucune relation entre eux, tous ces effets se combinent dans un ensemble admirable, et le hasard n'est plus qu'un mot vide de sens ! Et maintenant, apprenez et soyez humbles, princes de la terre qui, dans votre orgueil, rêvez tenir dans vos mains les destinées des peuples, rois de la finance qui disposez des richesses et du crédit des États, vous n'êtes que de frères et dociles instruments dans la main de Celui qui embrasse toutes les causes et tous les effets dans un même ordre, qui, selon l'expression de la Bible, a tout mesuré, tout compté, tout pesé, tout distribué, dans un ordre parfait.

L'homme s'agite, Dieu le mène.

Regnault écrit plus loin :

*Le prix de la Rente, au milieu des variations les plus capricieuses, reste donc en dernier lieu, uniquement influencé par les causes constantes, dont la principale, nettement définie, et dont l'existence ne laisse aucun doute, est le montant de l'intérêt ; cette cause si faible en apparence, doit finir par avoir raison de toutes les autres, par triompher de toutes les résistances ; c'est la goutte d'eau qui creuse les rochers les plus durs ; les causes secondaires sont moins positives, mais se reproduisant tous les ans à pareille époque, elles auraient par cela même un caractère de fixité qui permettrait de les considérer comme constantes et de leur attribuer une influence réelle. Les causes accidentelles ont totalement disparu, et en général, si puissants que soient leurs effets, si bizarres, si irrégulières que soient leurs apparitions, elles finiront toujours par s'annuler presque complètement au bout d'un certain temps, pour ne laisser en évidence que l'effet des causes régulières, si faible que soit cet effet*⁵².

52. [111], p. 154.

*En d'autres termes, les causes qui produisent la baisse sont moins nombreuses que les causes qui produisent la hausse, mais ce qu'elles perdent en nombre, elles le regagnent en force; de sorte qu'en multipliant les nombres par les forces on obtiendrait des produits égaux*⁵³.

*Il y a, en effet, deux lois distinctes qui régissent toutes les variations des cours et on ne peut presque jamais faire abstraction complète de l'une des deux. La première de ces deux lois : les écarts sont en raison directe de la racine carrée des temps, serait la seule que l'on eût à considérer, si la valeur se trouvant à son prix moyen, ou du moins peu éloignée de ce prix, n'était pas sollicitée dans un sens plutôt que dans un autre. Mais à mesure que les variations de hausse ou de baisse se produisent, le prix s'écarte plus ou moins de la valeur moyenne, au-dessus ou au-dessous, et alors les variations obéissent à une seconde loi qui est celle-ci : La valeur, dans tous ses écarts, est sans cesse attirée vers son prix moyen, en raison directe du carré de son éloignement*⁵⁴.

Rapport sur la thèse de Bachelier (le 29 mars 1900)⁵⁵

Le sujet choisi par M. Bachelier s'éloigne un peu de ceux qui sont habituellement traités par nos candidats; sa thèse est intitulée Théorie de la Spéculation et a pour objet l'application du Calcul des Probabilités aux Opérations de Bourse. On pourrait craindre d'abord que l'auteur ne se soit fait illusion sur la portée du Calcul des Probabilités, comme on l'a fait trop souvent. Il n'en est rien heureusement; dans son introduction et plus loin dans le paragraphe intitulé « La probabilité dans les Opérations de Bourse », il s'efforce de fixer les limites dans lesquelles on peut avoir légitimement recours à ce genre de Calcul; il n'exagère donc pas la portée de ses résultats et je ne crois pas qu'il soit dupe de ses formules. Qu'a-t-on donc légitimement le droit d'affirmer en pareille matière? Il est clair d'abord que les cours relatifs aux diverses sortes d'opérations doivent obéir à certaines lois; ainsi on pourrait imaginer des combinaisons de cours telles que l'on puisse jouer à coup sûr; l'auteur en cite des exemples; il est évident que de pareilles combinaisons ne se produisent jamais, ou que si elles se produisaient elles ne sauraient se maintenir. L'acheteur croit la hausse probable, sans quoi il n'achèterait pas, mais s'il achète, c'est que quelqu'un lui vend; et ce vendeur croit évidemment la baisse probable; d'où il résulte que le marché pris dans son ensemble considère comme nulle l'espérance mathématique de toute opération et de toute combinaison d'opérations. Quelles sont les conséquences mathématiques d'un pareil principe? Si l'on suppose que les écarts ne sont pas très grands, on peut admettre que la probabilité d'un écart donné par rapport au cours coté ne dépend pas de la valeur absolue de ce cours; dans ces conditions le principe de l'espérance mathématique suffit pour déterminer la loi des probabilités; on retombe sur la

53. [111], p. 161.

54. [111], p. 187.

55. Registre des thèses de la Faculté des sciences de Paris, déposé aux Archives nationales, 11 rue des Quatre-Fils, 75003 Paris, sous la cote AJ/16/5537.

célèbre loi des erreurs de Gauss. Comme cette loi a été l'objet de démonstrations nombreuses qui pour la plupart sont de simples paralogismes, il convient d'être circonspect et d'examiner cette démonstration de près; ou du moins il est nécessaire d'énoncer d'une manière précise les hypothèses que l'on fait. Ici l'hypothèse que l'on a à faire c'est, comme je viens de le dire, que la probabilité d'un écart donné à partir du cours actuel est indépendante de la valeur absolue de ce cours. L'hypothèse peut être admise, pourvu que les écarts ne soient pas trop grands. L'auteur l'énonce nettement, sans y insister peut-être autant qu'il conviendrait. Il suffit pourtant qu'il l'ait énoncée explicitement pour que ses raisonnements soient corrects. La manière dont M. Bachelier tire la loi de Gauss est fort originale et d'autant plus intéressante que son raisonnement pourrait s'étendre avec quelques changements à la théorie même des erreurs. Il le développe dans un chapitre dont le titre peut d'abord sembler étrange, car il l'intitule « Rayonnement de la Probabilité. » C'est en effet à une comparaison avec la théorie analytique de la propagation de la chaleur que l'auteur a eu recours. Un peu de réflexion montre que l'analogie est réelle et la comparaison légitime. Les raisonnements de Fourier sont applicables presque sans changement à ce problème si différent de celui pour lequel ils ont été créés. On peut regretter que M. Bachelier n'ait pas développé davantage cette partie de sa thèse. Il aurait pu entrer dans le détail de l'Analyse de Fourier. Il en a dit assez cependant pour justifier la loi de Gauss et faire entrevoir les cas où elle cesserait d'être légitime. La loi de Gauss étant établie, on peut en déduire assez aisément certaines conséquences susceptibles d'une vérification expérimentale. Telle est par exemple la relation entre la valeur d'une prime et l'écart avec le ferme. On ne doit pas s'attendre à une vérification très exacte. Le principe de l'espérance mathématique s'impose en ce sens que, s'il était violé, il y aurait toujours des gens qui auraient intérêt à jouer de façon à le rétablir et qu'ils finiraient par s'en apercevoir. Mais ils ne s'en apercevront que si l'écart est considérable. La vérification ne peut donc être que grossière. L'auteur de la thèse donne des statistiques où elle se fait d'une façon très satisfaisante. M. Bachelier examine ensuite un problème qui au premier abord semble devoir donner lieu à des calculs très compliqués. Quelle est la probabilité pour que tel cours soit atteint avant telle date? En écrivant l'équation du problème, on est conduit à une intégrale multiple où on voit autant de signes \int superposés qu'il y a de jours avant la date fixée. Cette équation semble d'abord inabordable. L'auteur la résout par un raisonnement court, simple et élégant; il en fait d'ailleurs remarquer l'analogie avec le raisonnement connu de M. André au sujet du problème du dépouillement d'un scrutin. Mais cette analogie n'est pas assez étroite pour diminuer en quoi que ce soit l'originalité de cet ingénieux artifice. Pour d'autres problèmes analogues, l'auteur s'en sert également avec succès. En résumé, nous sommes d'avis qu'il y a lieu d'autoriser M. Bachelier à faire imprimer sa thèse et à la soutenir.

Signé : Appell, Poincaré, J. Boussinesq

Voici le rapport de soutenance : Dans la soutenance de sa première thèse, M. Bachelier a fait preuve d'intelligence mathématique et de pénétration. Il a ajouté des résultats intéressants à ceux que contient la thèse imprimée,

notamment une application de la méthode des images. Dans la 2^{ème} thèse, il a montré qu'il possédait à fond les travaux de M. Boussinesq sur le mouvement d'une sphère dans un fluide indéfini. La Faculté lui a conféré le grade de Docteur avec mention honorable.

Signé : Le président P. Appell.

REMARQUES BIBLIOGRAPHIQUES

Les livres de Louis Bachelier sont [5, 12, 15, 21, 22, 23], et ses articles sont [6, 7, 8, 9, 10, 11, 13, 14, 16, 17, 18, 19, 20, 24]. La meilleure biographie de Louis Bachelier est due à Courtault et. al. [44]; on s'y est reporté ici. (Jean-Michel Courtault et Youri Kabanov ont organisé en 1999 à l'Université de Besançon une exposition « Bachelier ».) Citons aussi la note biographique dans Mandelbrot [93]. L'article Bru [38] discute entre autres des relations compliquées entre Émile Borel et Paul Lévy. Le livre de Jules Regnault auquel il est fait allusion est analysé dans une thèse à paraître de Franck Jovanovic, Université Paris 1 (cf. aussi [71]). Le marché financier de Paris sous le Second Empire est décrit dans le livre de Pierre Dupont-Ferrier [50]. Une étude très complète et fort intéressante des oeuvres mathématiques de Bachelier est en cours de préparation, elle est due à Laurent Carraro de l'École des Mines de Saint-Etienne. Signalons enfin, l'introduction de Paul Cootner [41], les articles de Christian Walter [122, 123] sur les aspects financiers de l'oeuvre de Bachelier et l'article de Jean-Pierre Kahane [72] sur les origines mathématiques du mouvement brownien.

RÉFÉRENCES

- [1] J. C. AITCHISON and J. A. C. BROWN. *The lognormal distribution, with special reference to its uses in economics*. Cambridge University Press, 1957.
- [2] S. S. ALEXANDER. Price movements in speculative markets : trends or random walks. *Industrial Management Review*, 2 :7–26, 1961. Reprinted in *The Random Character of Stock Market Prices*, P. Cootner editor, MIT Press, 1964, pages 199-218.
- [3] D. ANDRÉ. Solution directe du problème résolu par M. Bertrand. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences (Paris)*, 105 :436–437, 1887. Il s'agit du fameux problème du scrutin posé et résolu (à l'aide d'une équation aux différences) par M. Bertrand.
- [4] M. ARMATTE. Robert Gibrat et la loi de l'effet proportionnel. *Mathématiques, Informatique et Sciences Humaines*, 129 :5–35, 1995.
- [5] L. BACHELIER. Théorie de la spéculation. *Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure*, III-17 :21–86, 1900. Thesis for the Doctorate in Mathematical Sciences (defended March 29, 1900). Reprinted by Éditions Jacques Gabay, Paris, 1995. English translation in *The random character of stock market prices*, Ed. P. Cootner, pp. 17-78, Cambridge, MIT Press, 1964.

- [6] L. BACHELIER. Théorie mathématique du jeu. *Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure*, 18 :143–210, 1901. Reprinted by Éditions Jacques Gabay, Paris, 1992.
- [7] L. BACHELIER. Théorie des probabilités continues. *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, 2 :259–327, 1906. 6ème série.
- [8] L. BACHELIER. Étude sur les probabilités des causes. *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, 4 :395–425, 1908. 6ème série.
- [9] L. BACHELIER. Le problème général des probabilités dans les épreuves répétées. *Comptes-rendus des Séances de l'Académie des Sciences*, 146 :1085–1088, 1908. Séance du 25 Mai 1908.
- [10] L. BACHELIER. Les probabilités à plusieurs variables. *Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure*, 27 :339–360, 1910. 3ème série.
- [11] L. BACHELIER. Mouvement d'un point ou d'un système matériel soumis à l'action de forces dépendent du hasard. *Comptes-rendus des Séances de l'Académie des Sciences*, 151 :852–855, 1910. Séance du 14 Novembre 1910, présentée par H. Poincaré.
- [12] L. BACHELIER. *Calcul des Probabilités*, volume 1. Gauthier-Villars, Paris, 1912. Reprinted by Éditions Jacques Gabay, Paris, 1992. There was no second volume, possibly because of the war.
- [13] L. BACHELIER. Les probabilités cinématiques et dynamiques. *Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure*, 30 :77–119, 1913.
- [14] L. BACHELIER. Les probabilités semi-uniformes. *Comptes-rendus des Séances de l'Académie des Sciences*, 156 :203–205, 1913. Séance du 20 Janvier 1913, présentée par Appell.
- [15] L. BACHELIER. *Le Jeu, la Chance et le Hasard*. Bibliothèque de Philosophie scientifique. E. Flammarion, Paris, 1914. 320 pp. Reprinted by Éditions Jacques Gabay, Paris, 1993.
- [16] L. BACHELIER. Le périodicité du hasard. *L'Enseignement Mathématique*, 17 :5–11, 1915.
- [17] L. BACHELIER. Sur la théorie des corrélations. *Bulletin de la Société Mathématique de France*, 48 :42–44, 1920. Comptes-rendus des Séances de la Société Mathématique de France. Séance du 7 Juillet 1920.
- [18] L. BACHELIER. Sur les décimales du nombre π . *Bulletin de la Société Mathématique de France*, 48 :44–46, 1920. Comptes-rendus des Séances de la Société Mathématique de France. Séance du 7 Juillet 1920.
- [19] L. BACHELIER. Le problème général de la statistique discontinue. *Comptes-rendus des Séances de l'Académie des Sciences*, 176 :1693–1695, 1923. Séance du 11 Juin 1923, présentée par Maurice d'Ocagne.
- [20] L. BACHELIER. Quelques curiosités paradoxales du calcul des probabilités. *Revue de Métaphysique et de Morale*, 32 :311–320, 1925.
- [21] L. BACHELIER. *Les lois des grands nombres du calcul des probabilités*. Gauthier-Villars, Paris, 1937.
- [22] L. BACHELIER. *La spéculation et le calcul des probabilités*. Gauthier-Villars, Paris, 1938. 49 pp.
- [23] L. BACHELIER. *Les nouvelles méthodes du calcul des probabilités*. Gauthier-Villars, Paris, 1939. 69 pp.
- [24] L. BACHELIER. Probabilités des oscillations maxima. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences (Paris)*, 212 :836–838, 1941. Séance du 19 Mai 1941. Erratum au volume 213 (1941), p. 220.

- [25] A. BARRIOL. *Théorie et pratique des opérations financières*. O. Doin, Paris, 1908. 375 pages. A 4th corrected edition appeared in 1931.
- [26] P. L. Bernstein. *Capital ideas : the improbable origins of modern Wall Street*. Free Press, New York, 1992.
- [27] J. BERTRAND. *Calcul des probabilités*. Gauthier-Villars, Paris, 1888. Deuxième éd. *ibid.* 1907, réimpression, New York : Chelsea, 1972.
- [28] L. BOLTZMANN. *Vorlesungen über Gastheorie*. J.A. Barth, Leipzig, 1896. Ludwig Boltzmann (1844-1906). Published in two volumes, 1896 and 1898. Appeared in French in 1902-1905, *Leçons sur la Théorie des Gaz*, Gauthier-Villars, Paris. Published in English by Dover, New York as *Lectures on Gas Theory*, 490p.
- [29] E. BOREL. *Leçons sur la théorie des fonctions*. Gauthier-Villars, Paris, 1898.
- [30] E. BOREL. Remarques sur certaines questions de probabilités. *Bulletin de la Société Mathématique de France*, 33 :123–128, 1905. Reprinted in *Oeuvres d'Émile Borel*, Paris : CNRS, volume 4, pp. 985-990.
- [31] E. BOREL. Sur les principes de la théorie cinétique des gaz. *Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure*, III-23 :9–32, 1906. Reprinted in *Oeuvres d'Émile Borel*, Paris : CNRS, volume 3, pp. 1669-1692.
- [32] E. BOREL. *Éléments de la Théorie de Probabilités*. Hermann, 1909. Second edition 1910, third edition 1924. New revised edition published in 1950 by Albin Michel, Paris in the series «Bibliothèque d'éducation par la science». English translation by J. E. Freund, Englewood Cliffs : Prentice Hall, 1965.
- [33] E. BOREL. *Notice sur les travaux scientifiques de M. Émile Borel*. Gauthier-Villars, Paris, 1912.
- [34] E. BOREL. *Oeuvres d'Émile Borel*. Editions du Centre National de la Recherche Scientifique (CNRS), Paris, 1972. 4 volumes. Émile Borel lived from 1871 to 1956.
- [35] J. BOUSSINESQ. *Théorie analytique de la chaleur mise en harmonie avec la thermodynamique et avec la théorie mécanique de la lumière*. Gauthier-Villars, 1901. Cours de physique mathématique de la Faculté des sciences. Vol 1. Vol 2 appears in 1903. Joseph Boussinesq lived from 1842 until 1929.
- [36] R. BROWN. A brief account of microscopical observations made in the months of June, July, and August, 1827, on the particles contained in the pollen of plants; and on the general existence of active molecules in organic and inorganic bodies. *Philosophical Magazine (2nd series)*, 4 :161–173, 1828.
- [37] B. BRU. Doebelin's life and work from his correspondence. In Harry Cohn, editor, *Doebelin and Modern Probability*, volume 149 of *Contemporary Mathematics*, pages 1–64. American Mathematical Society, Providence, R.I., 1993.
- [38] B. BRU. Borel, Lévy, Neyman, Pearson et les autres. *Matapli*, 60 :51–60, 1999.
- [39] E. CARVALLO. *Le Calcul des Probabilités et ses Applications*. Gauthier-Villars, Paris, 1912.
- [40] K.L. CHUNG. On the maximum partial sums of sequences of independent random variables. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the USA*, 33 :133–136, 1947.
- [41] P. COOTNER, editor. *The Random Character of Stock Market Prices*. MIT Press, Cambridge, MA, 1964.
- [42] A. A. COURNOT. *Recherches sur les principes mathématiques de la théorie des richesses*. L. Hachette, Paris, 1838. Also in *Oeuvres complètes*, volume VIII, J. Vrin, Paris, 1980. Published in English as *Mathematical Principles of*

- the Theory of Wealth*, James & Gordon, San Diego, 1995, 187 pages. Antoine Augustin Cournot lived from 1801 to 1877.
- [43] A. A. COURNOT. *Exposition de la théorie des chances et des probabilités*. L. Hachette, F. Didot, Paris, 1843. Also in *Oeuvres complètes*, volume I, J. Vrin, Paris, 1984. The *Oeuvres complètes* are published by the Librairie Philosophique, J. Vrin, Paris, from 1973 to 1989.
- [44] J.-M. COURTAULT, Y. KABANOV, B. BRU, P. CRÉPEL, I. LEBON, and A. LE MARCHAND. Louis Bachelier on the centenary of «Théorie de la Spéculation». *Mathematical Finance*, 10(3) :341–353, 2000.
- [45] B. de FINETTI. Sulla possibilità di valori eccezionali per una legge di incrementi aleatori. *Rendiconti della Reale Accademia Nazionale dei Lincei*, 10 :325–329, 1929.
- [46] B. de FINETTI. Sulle funzioni a incremento aleatorio. *Rendiconti della Reale Accademia Nazionale dei Lincei*, 10 :163–168, 1929.
- [47] R. de MONTESSUS. *Leçons élémentaires sur le Calcul des Probabilités*. Gauthier-Villars, Paris, 1908. 191 pages. The author is Robert de Montessus de Ballore, born in 1870 and died in 1937. The book can be found in microfilm in the Mathematics Collection, Brown University Library, reel # 7280, item # 6.
- [48] J. L. DOOB. Kolmogorov's early work on convergence theory and foundations. *The Annals of Probability*, 17 :815–821, 1989.
- [49] E. DORMOY. Théorie mathématique des jeux de hasard. *Journal des Actuaires Français*, 2 :38–57, 1873. Émile Dormoy (1829-1891) is an important French actuary.
- [50] P. DUPONT-FERRIER. *Le marché financier de Paris sous le Second Empire*. Presses Universitaires de France, Paris, 1925.
- [51] A. EINSTEIN. Über die von der molekularkinetischen Theorie der Wärme geforderte Bewegung von in ruhenden Flüssigkeiten suspendierten Teilchen. *Annalen der Physik*, 17 :549–560, 1905. Reprinted in A. Einstein, *Investigations on the theory of the Brownian movement*, edited with notes by R. Fürth, translated by A. D. Cowper, London : Methuen, 1926. This English translation appears also in Dover : New York, 1956. Albert Einstein lived from 1879 to 1955.
- [52] P. ERDŐS and M. KAC. On certain limit theorems of the theory of probability. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 52 :292–302, 1946.
- [53] W. FELLER. Zür Theorie der stochastischen Prozesse (Existenz- und Eindeutigkeitssätze). *Mathematische Annalen*, 113 :113–160, 1936.
- [54] W. FELLER. *An Introduction to Probability Theory and its Applications*, volume 1. Wiley, New York, 2nd edition, 1957. The first edition appeared in 1950.
- [55] B. J. FORD. Brownian movement in clarkia pollen : a reprise of the first observations. *The Microscope*, 40 :235–241, 1992.
- [56] M. FRÉCHET. *La vie et l'oeuvre d'Émile Borel*. Monographie de L'Enseignement Mathématique, Genève, 1965.
- [57] M. GEVREY. Equations aux dérivées partielles du type parabolique. *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, série 6, vol. 9 :305–471, 1913. See also vol. 10, (1914) 105-148.
- [58] M. GEVREY. Sur la nature analytique des solutions des équations aux dérivées partielles. *Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure*, série 3, vol. 35 :39–108, 1918.

BACHELIER ET SON ÉPOQUE

- [59] M. GEVREY. *Oeuvres de Maurice Gevrey*. Editions du Centre National de la Recherche Scientifique, Paris, 1970. Collected works, 573 pages.
- [60] M. GHERARDT. *Le gain mathématique à la Bourse*. Charles Amat, Paris, 1910.
- [61] R. GIBRAT. *Les Inégalités Économiques*. Sirey, Paris, 1931.
- [62] J. HAAG. Applications au tir. In E. Borel, editor, *Traité du calcul des probabilités et de ses applications*, volume 4, fascicule 1, Paris, 1926. Gauthier-Villars.
- [63] J. HAAG. Sur un problème général de probabilités et ses diverses applications. In *Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Toronto 1924*, pages 659–676, Toronto, Canada, 1928. Toronto University Press.
- [64] J. HADAMARD. Sur la solution fondamentale des équations aux dérivées partielles du type parabolique. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences (Paris)*, 152 :1148–1149, 1911.
- [65] B. HOSTINSKÝ. Sur les probabilités relatives aux transformations répétées. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences (Paris)*, 186 :59–61, 1928.
- [66] B. HOSTINSKÝ. Sur les probabilités des phénomènes liés en chaîne de Markoff. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences (Paris)*, 189 :78–80, 1929.
- [67] B. HOSTINSKÝ. Sur la théorie générale des phénomènes de diffusion. *Comptes Rendus du Premier Congrès des Mathématiciens des Pays Slaves, Warszawa 1929*, pages 341–347, 1930.
- [68] B. HOSTINSKÝ. *Méthodes générales du calcul des probabilités*. Paris. Gauthier-Villars, 1931. Mémorial des Sciences mathématiques, fascicule 52.
- [69] F. JOVANOVIC. Instruments et théorie économiques dans la construction de la "Science de la Bourse" d'Henri Lefèvre. Cahiers de la MSE (Maison des Sciences Économiques, Université de Paris 1) No. 2000.65, 2000.
- [70] F. JOVANOVIC. L'origine de la théorie financière : une réévaluation de l'apport de Louis Bachelier. *Revue d'Économie Politique*, 110(3) :395–418, 2000.
- [71] F. JOVANOVIC and Ph. LE GALL. Does God practice a random walk? A 19th century forerunner in financial theory and econometrics, Jules Regnault. Preprint, 2000.
- [72] J.-P. KAHANE. Le mouvement brownien : un essai sur les origines de la théorie mathématique. In *Matériaux pour l'histoire des mathématiques au XX^e siècle. Actes du colloque à la mémoire de Jean Dieudonné (Nice, 1996)*, volume 3 of *Séminaires et Congrès*, pages 123–155. Société Mathématique de France, 1998.
- [73] J. M. KEYNES. Review of Louis Bachelier's "Calcul des probabilités". *Journal of the Royal Statistical Society*, December 1912. Republished in Volume 11, pp. 567-573 of *The Collected Writings of John Maynard Keynes*, 1971-, London : Macmillan, St. Martin's Press : New York.
- [74] J. M. KEYNES. *A Treatise on Probability*. Macmillan, London, 1921. Republished in Volume 8 of *The Collected Writings of John Maynard Keynes*, 1971-, London : Macmillan, St. Martin's Press : New York.
- [75] A. Ya. KHINCHINE. *Asymptotische Gesetze der Wahrscheinlichkeitsrechnung*. Springer, Berlin, 1933. Series "Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete". Reissued by Chelsea Pub. Co., New York, 1948.
- [76] A. N. KOLMOGOROV. Über die analytischen Methoden in der Wahrscheinlichkeitsrechnung. *Mathematische Annalen*, 104 :415–458, 1931.

- [77] A. N. KOLMOGOROV. Sulla forma generale di un processo stocastico omogeneo. *Rendiconti della Reale Accademia Nazionale dei Lincei*, 15 :805–808, 1932. Reprinted in *Selected Works of A.N. Kolmogorov*, Vol. 2 pp. 121-127, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht 1992. The second part of the article is called "Ancora sulla forma generale di un processo omogeneo" Vol. 15 of *Rendiconti*, pp. 866-869.
- [78] A. N. KOLMOGOROV. *Selected works*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1991. 3 volumes. Andrei Nikolaevich Kolmogorov lived from 1903 to 1987.
- [79] R. KRUIZENGA. *Put and call options : a theoretical and market analysis*. PhD thesis, MIT, 1956.
- [80] P. LANGEVIN. Sur la théorie du mouvement brownien. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris*, 146 :530–533, 1908.
- [81] P.-S. LAPLACE. *Théorie Analytique des Probabilités*. Ve Courcier, Paris, 3rd edition, 1820. The book is 560 pages long. It is republished as Volume 7 in the *Oeuvres complètes*, published by Gauthier-Villars, Paris, in 1886. Pierre Simon, marquis de Laplace lived from 1749 until 1827.
- [82] A. G. LAURENT. Comments on "Brownian motion in the stock market". *Operations Research*, 7 :806–807, 1959. Comments on an M. F. M. Osborne article, which appears in the same volume, pp. 145-173.
- [83] H. LEFÈVRE. *Théorie élémentaire des opérations de bourse*. Chez l'auteur, Bureau du journal des placements financiers, 12 rue Laffite, Paris, 1870.
- [84] H. LEFÈVRE. Physiologie et mécanique sociales. *Journal des Actuaires Français*, 2 :211–250, 1873. See also pp. 351-388 and volume 3 (1874) 93-118.
- [85] H. LEFÈVRE. *Principes de la Science de la Bourse*. Institut Polytechnique, Paris, 1874. Approuvés par la Compagnie des Agents de Change.
- [86] P. LÉVY. *Calcul des probabilités*. Gauthier-Villars, Paris, 1925.
- [87] P. LÉVY. Sur certains processus stochastiques homogènes. *Compositio Mathematica*, 7 :283–339, 1939.
- [88] P. LÉVY. Le mouvement brownien plan. *American Journal of Mathematics*, 62 :487–550, 1940.
- [89] P. LÉVY. *Processus stochastiques et mouvement brownien*. Gauthier-Villars, Paris, 1st edition, 1948. A second edition appeared in 1965. Reprinted by Éditions Jacques Gabay, Paris, 1992.
- [90] P. LÉVY. *Quelques aspects de la pensée d'un mathématicien*. Albert Blanchard, 9 rue de Médecis, Paris 6^e, 1970.
- [91] P. LÉVY. *Oeuvres de Paul Lévy*. Gauthier-Villars, Paris, 1973-. Six volumes. Paul Lévy lived from 1886 to 1971.
- [92] J. W. LINDBERGER. Eine neue Herleitung des Exponentialgesetzes in der Wahrscheinlichkeitsrechnung. *Mathematische Zeitschrift*, 15 :211–225, 1922.
- [93] B. B. MANDELBROT. *Les Objects fractals*. Flammarion, 4ième édition, 1995. La première édition a paru en 1975.
- [94] J. MARCINKIEWICZ. Sur une propriété du mouvement brownien. *Acta Literarum Scientiarum*, pages 77–87, 1939.
- [95] A. A. MARKOFF. *Wahrscheinlichkeitsrechnung*. Teubner, Leipzig, 1912. Translated from the second Russian edition.
- [96] M. F. M. OSBORNE. Brownian motion in the stock market. *Operations Research*, 7 :145–173, 1959. Reprinted in *The Random Character of Stock Market Prices*, P. Cootner editor, MIT Press, 1964, pages 100-128. A reply

BACHELIER ET SON ÉPOQUE

- to a letter of A. G. Laurent, titled *Comments on "Brownian motion in the stock market"* appears in the same volume, pp. 807-811.
- [97] M. F. M. OSBORNE. Reply to "Comments on 'Brownian motion in the stock market'". *Operations Research*, 7 :807-811, 1959. Reply to a letter by A. G. Laurent which appears on pp. 806-807.
- [98] M. F. M. OSBORNE. *The Stockmarket and Finance from a Physicist's Viewpoint*. Crossgar Press, Minneapolis, MN, 1977.
- [99] F. PERRIN. Étude mathématique du mouvement brownien de rotation. *Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure*, III-45, 1928. Thèse, Paris.
- [100] J. PERRIN. *Les Atomes*. Felix Alcan, Paris, 1912. Nouvelle collection scientifique, directeur Émile Borel.
- [101] L. POCHE. Géométrie des jeux de Bourse. *Journal des Actuaires Français*, 2 :153-160, 1873.
- [102] H. POINCARÉ. *Calcul des probabilités*. Gauthier-Villars, Paris, 1896. Leçons professées pendant le second semestre 1893-1894, rédigées par A. Quiquet, ancien élève de l'École Normale Supérieure, Paris. Seconde édition revue et augmentée par l'auteur, Gauthier-Villars, Paris, 1912. Nouveau tirage en 1923. The second edition is reprinted by Éditions Jacques Gabay, Paris, 1987. Henri Poincaré lived from 1854 to 1912.
- [103] G. PÓLYA. Über eine Aufgabe der Wahrscheinlichkeitsrechnung betreffend die Irrfahrt im Strassennetz. *Mathematische Annalen*, 84 :149-160, 1921.
- [104] G. PÓLYA. Sur quelques points de la théorie des probabilités. *Annales de l'Institut Henri Poincaré*, 1 :117-161, 1930.
- [105] A. QUETELET. *Lettres à S.A.R. le duc régnant de Saxe-Coburg et Gotha, sur la théorie des probabilités, appliquée aux sciences morales et politiques*. M. Hayez, Bruxelles, 1846. Appears in English as *Letters addressed to H.R.H. the Grand Duke of Saxe Coburg and Gotha, on the theory of probability*, New York : Arno Press, 1981, 309 p. Alphonse Quetelet lived from 1796 to 1874.
- [106] J. W. S. RAYLEIGH. *Theory of Sound*. Macmillan, London, 1877. Second edition revised and enlarged, *ibid.*, 1894. Reedited by Dover, New York, 1945. Jonn William Strutt Rayleigh lived from 1842 to 1919.
- [107] J. W. S. RAYLEIGH. On the resultant of a large number of vibrations of the same pitch and of arbitrary phases. *Philosophical Magazine*, 10(5) :73-78, 1880.
- [108] J. W. S. RAYLEIGH. Dynamical problems in illustration of the theory of gases. *Philosophical Magazine*, 32(5) :424-445, 1891.
- [109] J. W. S. RAYLEIGH. On James Bernoulli's theorem. *Philosophical Magazine*, 42(5) :246-251, 1899.
- [110] J. W. S. RAYLEIGH. On the problem of random vibrations, and of random flights in one, two and three dimensions. *Philosophical Magazine*, 37(6) :321-347, 1919.
- [111] J. REGNAULT. *Calcul des chances et philosophie de la Bourse*. Mallet-Bachelier et Castel, Paris, 1863. 219 pages.
- [112] C. REID. *Neyman*. Springer Verlag, New York, 1982.
- [113] P. A. SAMUELSON. Rational theory of warrant pricing. In P. Cootner, editor, *The Random Character of Stock Market Prices*, pages 506-532. MIT Press, Cambridge, MA, 1964. With an appendix by Henry P. McKean, Jr. *A free boundary problem for the heat equation arising from a problem in Mathematical Economics*.

- [114] P. A. SAMUELSON. *The Collected Scientific Papers of Paul A. Samuelson*. MIT Press, Cambridge, MA, 1966. Five volumes, starting in 1966. Volumes 1 and 2 are edited by Joseph E. Stiglitz (1966), Volume 3 by Robert C. Merton (1972), Volume 4 by Hiroaki Nagatani and Kate Crowley (1977), and Volume 5 by Kate Crowley (1986).
- [115] P. A. SAMUELSON. Mathematics of speculative price. In R.H. Day and S.M. Robinson, editors, *Mathematical Topics in Economic Theory and Computation*. SIAM, Philadelphia, 1972. Reprinted in Volume 4 of *The Collected Scientific Papers of Paul A. Samuelson*, article 240.
- [116] P. A. SAMUELSON. Paul Cootner's reconciliation of economic law with chance. In W. F. Sharpe and C.M. Cootner, editors, *Financial Economics : Essays in Honor of Paul Cootner*, pages 101–117. Prentice Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1982. Reprinted in Volume 5 of *The Collected Scientific Papers of Paul A. Samuelson*, article 328.
- [117] A. N. SHIRYAEV. Kolmogorov – life and creative activities. *The Annals of Probability*, 17 :866–944, 1989.
- [118] M. SMOLUCHOWSKI. *Oeuvres de M. Smoluchowski*. Impr. de l'Université jaguellonne, Cracovie, Pologne, 1924. Publiées sous les auspices de l'Académie polonaise des sciences et des lettres par les soins de Ladislas Natanson et Jean Stock.
- [119] M. S. TAQQU. Bachelier and his times : a conversation with Bernard Bru. *Finance and Stochastics*, 5(1) :3–32, 2001.
- [120] M. S. TAQQU. Bachelier and his times : a conversation with Bernard Bru. In H. Geman, D. Madan, S. R. Pliska, and T. Vorst, editors, *Mathematical Finance - Bachelier Congress 2000*, Springer Finance, New York, 2002. Springer-Verlag. To appear. Corrected and expanded version of the paper with the same title which appeared in « Finance and Stochastics », 5 (2001) 3-32.
- [121] M. S. TAQQU. Bachelier et son époque : une conversation avec Bernard Bru. Dans le livre : J-M. Courtault et Y. Kabanov, editors, *Louis Bachelier, père de la finance mathématique*, Besançon, France, 2001. Presses Universitaires Franc-Comtoises. A paraître.
- [122] C. WALTER. Une histoire du concept d'efficience sur les marchés financiers. *Annales d'Histoire Économique et Sociale*, pages 873–905, 1996.
- [123] C. WALTER. The efficient market hypothesis : birth, rise, zenith, crisis and impact on investment management industry. Preprint, 1999.