JOURNAL DE LA SOCIÉTÉ FRANÇAISE DE STATISTIQUE

J. COLLET

J.-L. BON

Encadrements de la disponibilité de systèmes testés

Journal de la société française de statistique, tome 141, nº 3 (2000), p. 37-42

<http://www.numdam.org/item?id=JSFS_2000__141_3_37_0>

ENCADREMENTS DE LA DISPONIBILITÉ DE SYSTÈMES TESTÉS

J. COLLET[1], J.-L. BON[2]

RÉSUMÉ

La disponibilité est un critère important de qualité d'un matériel industriel. Nous nous intéressons ici à un système réparable qui est régulièrement inspecté. Bien sûr, les dates d'inspection peuvent légèrement varier en fonction de contraintes de fonctionnement mais, globalement, le temps moyen séparant deux inspections successives est fixé. La distribution du temps d'inter-inspection joue-t-elle un rôle important pour la disponibilité? Pour quelle distribution celle-ci est-elle maximale?

Mots clés : ordre stochastique, disponibilité, vieillissement.

ABSTRACT

The availability of repairable systems is an important characteristic of quality. We are concerned here with a repairable system which is regularly inspected. Of course, the dates can vary with a random part but the expectation of time between inspections is fixed The distribution of the inter-arrivals seems to be crucial for the availability of the system. How to compare the availability of the system for different distributions of inter-arrivals is the aim of this note.

Keywords : stochastic order, availability, ageing property.

1. INTRODUCTION

Nous considérons un système réparable qui évolue dans le temps selon deux états (marche et panne). Des inspections (ou tests) sont effectuées régulièrement. Certes les dates peuvent varier avec un aléa mais la durée moyenne entre les inspections est fixée. La loi de probabilité sur l'aléa qui régit les dates d'inspections a-t-elle de l'influence sur l'indisponibilité du système?

C'est pour répondre à ce type de questions que l'on est conduit à utiliser les notions d'ordre stochastique.

Cela permet de comparer des politiques de maintenance (ou des modélisations de ces politiques) mais aussi de simplifier parfois la recherche d'optimum pour une politique donnée.

1. EDF R&D, 92141 Clamart CEDEX, mel . Jerome.Collet@edf.fr

2. EUDIL, Université de Lille 1, 59655 Villeneuve d'Asq, mel : Jean-Louis.Bon@eudil.fr

2. LES DIFFÉRENTS ORDRES PORTANT SUR DES VARIABLES ALÉATOIRES

La notion d'ordre stochastique a été introduite dans le but de comparer des variables aléatoires réelles. Intuitivement, la comparaison peut privilégier la moyenne, la dispersion ou toute autre caractéristique de la mesure. De nombreuses notions sont donc envisageables. Pour une présentation plus détaillée de ces notions, on se réfèrera à l'état de l'art que représente le livre de Shaked et Shantikumar [6].

Pour notre étude, la moyenne est fixée et nous souhaitons faire des comparaisons en termes de disponibilité. La variable importante est la durée résiduelle qui a tendance à se régulariser lorsque le temps d'observation tend vers l'infini. Cela incite à privilégier l'ordre convexe qui est lié à la loi limite de la durée résiduelle.

DÉFINITION 1. — *Soient $\mathcal{C}$ la classe des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ convexes croissantes, et X et Y deux variables aléatoires réelles positives, on dira que X est inférieure en ordre convexe à Y, et on notera $X \underset{\text{cconv}}{\leqslant} Y$ si et seulement si :*

$$X \underset{\text{cconv}}{\leqslant} Y \Leftrightarrow \forall f \in \mathcal{C}, \mathbb{E}(f(X)) \leqslant \mathbb{E}(f(Y))$$

Quelquefois, on parle d'ordre convexe pour une propriété analogue prise sur l'ensemble $\mathcal{C}$ des fonctions convexes quelconques, ce qui impose aux variables aléatoires d'avoir la même moyenne.

La propriété $X \underset{\text{cconv}}{\leqslant} Y$ connaît de nombreuses autres caractérisations, dont la suivante qui est l'une des rares à faire intervenir explicitement l'espace de probabilité sous-jacent. On tire de cette proposition que si $X \underset{\text{cconv}}{\leqslant} Y$ alors l'espérance de X est inférieure à celle de Y.

PROPOSITION 2. — *Soient X et Y deux variables aléatoires. On a $X \underset{\text{cconv}}{\leqslant} Y$ si et seulement si il existe deux variables aléatoires $\tilde{X}$ et $\tilde{Y}$, définies sur le même espace de probabilité, telles que :*

$$\tilde{X} \underset{\text{loi}}{=} X \ , \ \tilde{Y} \underset{\text{loi}}{=} Y$$

$$\tilde{X} \leqslant \mathbb{E}\left(\tilde{Y} \mid \tilde{X}\right) \ p.s.$$

Une fois défini un ordre entre variables aléatoires, il est possible de définir une notion de vieillissement. En effet, intuitivement, le vieillissement traduit une comparaison entre la durée résiduelle de vie (aléatoire) d'un même objet à deux dates différentes. Là encore de nombreux concepts ont été développés ces vingt dernières années. Le résultat que nous proposons est valable pour une notion très générale de vieillissement qui est la notion HNBUE (pour Harmonic New Better Than Used in Expectation).

DÉFINITION 3. — *Soit X une variable aléatoire réelle. On dira que X est HNBUE si et seulement si elle est inférieure, pour l'ordre convexe, à toute variable exponentielle de même moyenne.*

Cette propriété est réalisée, en particulier, quand la durée résiduelle de vie à une date quelconque est inférieure (stochastiquement ou en moyenne) à la durée de vie initiale.

3. APPLICATION À UNE POLITIQUE D'INSPECTION

Notre but est de mesurer l'efficacité d'une politique de tests pour un système donné. On va donc chercher à comparer l'indisponibilité du système $\bar{A}(t)$ à la date t à l'indisponibilité du système **avec tests**, notée $\bar{B}(t)$ à cette même date. Dans ce qui suit on suppose que les tests remettent à neuf le système, ce qui s'écrit :

$$\bar{B}(t) = \bar{A}(t - t_t),$$

où t_t est la date du dernier test avant t. Notre but est de calculer l'indisponibilité moyenne asymptotique du système avec tests, c'est-à-dire l'expression :

$$\mathcal{I} = \lim_{t \to +\infty} \frac{1}{t} \int_0^t \bar{B}(t) dt$$

La modélisation des tests est un cadre classique d'utilisation de la théorie du renouvellement [4, 1], ce qui signifie que lorsqu'un test a eu lieu le suivant aura lieu avec une durée indépendante et de même loi que le précédent. Cependant, en partant de la propriété HNBUE très générale, il est possible d'affiner des résultats connus.

THÉOR'EME 4. — *Soit un système d'indisponibilité $\bar{A}(t)$ croissante en fonction de t, assez régulière (par exemple Riemann intégrable). Ce système est supposé être testé périodiquement. Chaque test remet à neuf le système. Les tests arrivent selon un processus de renouvellement de distribution F inconnue, de moyenne r connue, et de moment d'ordre 2 fini.*

Sous ces hypothèses, l'indisponibilité moyenne asymptotique du système est

- *plus petite si F est déterministe (ou de Dirac) que si F est une autre distribution.*
- *plus grande si F est exponentielle que si F est une autre distribution ayant la propriété HNBUE,*

Preuve. — La première partie de la preuve reprend une méthode classique de calcul de renouvellement. Les tests constituant un processus de renouvellement, on utilise les notations et hypothèses suivantes :

- $T_0 = 0$: renouvellement à la date 0 correspondant au premier test,
- τ_i : durées entre tests, indépendantes de même distribution F,
- $T_n = \tau_1 + \cdots + \tau_n$: dates de renouvellement (ou de test),
- $N_t = \sum_{n \geqslant 0} \mathbb{1}(T_n \leqslant t)$: numéro du **premier** renouvellement **après** t.

On remarque que $N_t \geqslant 1$ d'après le choix des notations. Le fait que les tests remettent à neuf le système s'écrit :

$$\bar{B}(t) = \bar{A}(t - T_{N_t - 1}).$$

Donc, pour une date t fixée, en conditionnant par les dates des tests, on a :

$$\int_0^t \bar{B}(t)dt = \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{N_t} \int_{T_{i-1}}^{T_i} \bar{A}(u)du - \int_t^{T_{N_t}} \bar{A}(u)du\right)$$

Nous allons étudier séparément les deux termes de la différence. Simplifions la notation du premier en notant $\mathcal{A}_i$ l'indisponibilité intégrale sur un intervalle de renouvellement :

$$\mathcal{A}_i = \int_{T_{i-1}}^{T_i} \bar{A}(u)du$$

Nous avons donc une somme de termes aléatoires dont le nombre de termes est aussi aléatoire. Il faut pouvoir appliquer l'identité de Wald (voir [3] p. 161). Pour cela, il faut montrer, pour tout n, que l'événement $\{N_t = n\}$ est donné par la connaissance du processus jusqu'à la date t. Ce qui s'écrit :

$$\{N_t = n\} = \{T_{n-1} \leqslant t < T_n\} \in \sigma(\tau_1, \cdots, \tau_n) = \sigma(\mathcal{A}_1, \cdots, \mathcal{A}_n)$$

où $\sigma(\tau_1, \cdots, \tau_n))$ représente la tribu engendrée par les variables aléatoires $\tau_1, \cdots, \tau_n$ (c'est-à-dire le passé du processus jusqu'à t). Alors :

$$\mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{N_t} \mathcal{A}_i\right) = \mathbb{E}(N_t)\,\mathbb{E}(\mathcal{A}_1)$$

Venons-en au deuxième terme : $(t^{-1} \times \mathbb{E}\left(\int_t^{T_{N_t}} \bar{A}(u)du\right)$ qui représente ce qui se passe entre t et le renouvellement le plus proche. Pour montrer qu'il tend vers 0, il suffit de le majorer. Puisque l'indisponibilité est bornée par 1, on a :

$$\frac{1}{t}\mathbb{E}\left(\int_t^{T_{N_t}} \bar{A}(u)du\right) \leqslant \frac{1}{t}\mathbb{E}(T_{N_t} - t)$$

Écrivons $\mathbb{E}(T_{N_t}) = H(t)r$, où H est la fonction de renouvellement, dont nous savons (voir, par exemple, [2], p. 134) :

$$H(t) \leqslant \frac{t}{r} + \frac{\mathbb{E}(\tau_1^2)}{r^2}.$$

Ce qui permet de conclure :

$$\frac{1}{t}\mathbb{E}\left(\int_t^{T_{N_t}} \bar{A}(u)du\right) \leqslant \frac{1}{t}\frac{\mathbb{E}\left(\tau_1^2\right)}{r}\xrightarrow[t+\infty]{}0$$

Par ailleurs, un résultat asymptotique classique (théorème de Blackwell) de la théorie du renouvellement donne :

$$\frac{\mathbb{E}\left(N_t\right)}{t}\xrightarrow[t+\infty]{}\frac{1}{r}$$

Donc, l'indisponibilité moyenne converge à l'infini, et l'indisponibilité asymptotique moyenne est :

$$\mathcal{I} = \frac{\mathbb{E}\left(\mathcal{A}_1\right)}{r}$$

Or, la variable $\mathcal{A}_1$ est une fonction convexe croissante de τ_1, car $\bar{A}(t)$ est positive et croissante. D'après la définition de l'ordre convexe et de la propriété HNBUE, son espérance est maximale parmi les lois HNBUE si F est exponentielle.

De plus, l'inégalité de Jensen indique que, pour toute fonction f convexe :

$$f(\mathbb{E}\left(\tau\right)) \leqslant \mathbb{E}\left(f(\tau)\right)$$

Reprenant la définition de l'ordre convexe, on conclut que $\mathcal{I}$ est minimale parmi toutes les lois si F est déterministe.

Le cœur de la démonstration de ce résultat est situé dans le dernier paragraphe où l'on prouve que la variable $\mathcal{A}_1$ est une fonction convexe croissante de τ_1 à partir de l'hypothèse que $\bar{A}(t)$ est une fonction positive croissante de t. C'est cette constatation, alliée à l'hypothèse HNBUE sur τ_1, qui permet de construire l'encadrement.

Il faut noter que nous n'avons utilisé que la croissance de $\bar{A}$ et sa remise à zéro lors de dates données par un processus de renouvellement. On a donc une propriété qui peut être utilisée dans d'autres contextes économiques : performances de systèmes, assurances, etc.

Cependant il est à noter que la croissance de $\bar{A}$ n'est pas automatique même si elle semble conforme à l'intuition. Cette hypothèse doit donc être vérifiée.

4. CONCLUSION

Comme cela a été évoqué dans l'introduction, ce résultat peut avoir deux utilisations : d'une part comparer des politiques de maintenance, d'autre part comparer leurs modélisations.

- Dans le premier cas, nous pourrons, avec ce résultat (ou peut-être des résultats du même type), restreindre assez rapidement la recherche de la politique optimale de tests à un petit ensemble de politiques.
- Dans le second cas, ce résultat nous indique que, si l'on accepte d'être pessimiste (dans le cas d'une étude de sûreté), et si modéliser les tests de manière déterministe pose un problème, il est possible de représenter les temps entre tests comme aléatoires.

Par exemple, il est possible de les représenter comme suivant une loi exponentielle, ce qui permet d'utiliser les méthodes markoviennes. De plus, si cette représentation se révèle trop pessimiste, le même résultat nous indique que représenter le temps entre tests par une loi d'Erlang (correspondant à une somme de variables exponentielles) sera meilleur, et d'autant meilleur que l'ordre de cette loi sera grand.

Nous avons donné un exemple de problème d'optimisation de maintenance où les notions d'ordre stochastique et de vieillissement rendent un grand service. Mais ces notions peuvent s'appliquer dans bien d'autres domaines. Pour rester dans la théorie de la fiabilité, signalons l'intérêt de modéliser les durées de réparation avec des hypothèses de ce type. Cela permet des comparaisons et des généralisations riches d'applications. Un exemple d'une telle étude est donné dans [5].

RÉFÉRENCES

[1] AVEN T., JENSEN U., *Stochastic models in reliability*, Masson, Applications of Mathematics, Springer, New-York, 1998.

[2] BON J.L., *Fiabilité des systèmes*, Masson, Paris 1995.

[3] COCOZZA-THIVENT C., *Processus stochastiques et fiabilité des systèmes*, Masson SMAI, Springer, Berlin, 1997.

[4] FELLER W., *An introduction to probability theory*, Masson vol1., Wiley, New-York 1957.

[5] COLLET J., *La modélisation des durées de réparation pour les études de sûreté de fonctionnement*, Université Paris-Sud, Orsay, 2000.

[6] SHAKED M., SHANTIKUMAR J.G., *Stochastic Orders and their applications*, Academic Press, San Diego, 1994.