JOURNAL DE LA SOCIÉTÉ FRANÇAISE DE STATISTIQUE

CHRISTOPHETTE BLANCHET-SCALLIET
MONIQUE JEANBLANC

Information et risque de défaut

Journal de la société française de statistique, tome 141, nº 1-2 (2000), p. 87-101
<http://www.numdam.org/item?id=JSFS_2000__141_1-2_87_0>

INFORMATION ET RISQUE DE DÉFAUT

Christophette BLANCHET-SCALLIET, Monique JEANBLANC *

RÉSUMÉ

Nous présentons le problème d'évaluation d'actifs financiers soumis à risque de défaut en soulignant que la modélisation de l'information liée à ce problème est, comme l'on peut s'y attendre un point important, bien que souvent passé sous silence dans la littérature. Nous montrons en particulier que la connaissance de la fonction de hasard permet d'identifier l'intensité du défaut et de mener à terme les calculs lorsque l'intensité ne contient pas assez d'information.

Nous remercions un rapporteur dont les remarques pertinentes nous ont permis d'améliorer la rédaction de ce texte. Nous sommes entièrement responsables de toutes les erreurs qui figureraient dans cette version.

INTRODUCTION

Le problème d'évaluation d'un actif contingent consistant en un flux terminal aléatoire X, versé en T, est effectué dans un marché complet ne présentant pas d'opportunité d'arbitrage au moyen de la mesure martingale équivalente. Plus précisément, considérons un marché financier comportant $d+1$ actifs financiers dont les prix sont des processus stochastiques notés $(S_i(t), t \geqslant 0; i = 0, \dots d)$, construits sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{G}, P)$. L'information $\mathcal{F}_t$ dont les agents disposent à la date t correspond à la connaissance des prix jusqu'à cet instant, soit $\mathcal{F}_t = \sigma(S_i(s), s \leqslant t; i = 0, \dots d)$. Nous supposons que l'actif 0 est un actif sans risque de taux déterministe r, dont le prix vérifie $dS_t^0 = r(t)S_t^0 dt$. Nous supposons également qu'il existe au moins une mesure martingale équivalente (m.m.e.), c'est-à-dire une probabilité Q équivalente à la probabilité historique P telle que les processus des prix actualisés $\widetilde{S}_i(t) = R_t S_i(t)$ où $R_t = \exp\left(-\int_0^t r(s)ds\right)$ soient des Q-martingales; cette condition étant imposée pour exclure les possibilités d'arbitrage qui permettraient à un agent de s'enrichir sans risque. Dans ce cas, la valeur actualisée de tout portefeuille auto-finançant [1] est une martingale. Rappelons que, par définition, la valeur actualisée d'un portefeuille auto-finançant comportant θ parts d'actifs risqués

* Équipe d'analyse et probabilités, Université d'Evry Val d'Essonne, Boulevard François Mitterrand, 91025 Evry Cedex, France. blanchet@maths.univ-evry.fr, jeanbl@maths.univ-evry.fr

1. On est amené à imposer des conditions d'intégrabilité sur les portefeuilles pour exclure des arbitrages, nous ne nous attardons pas sur ces conditions ici. Il en résulte des conditions d'intégrabilité sur les actifs contingents considérés.

est

$$\tilde{V}_t = V_0 + \int_0^t \theta_s^* d\tilde{S}_s = V_0 + \sum_{i=1}^{d} \int_0^t \theta_s^i d\tilde{S}_s^i .$$

Si la m.m.e. est unique, le marché est complet ce qui signifie que, pour tout $X \in \mathcal{F}_T$, de carré intégrable, il existe un portefeuille auto-finançant de valeur terminale X (on dit que X est duplicable). Cette propriété est liée à la propriété de représentation prévisible de la Q-martingale $\tilde{S}$. La valeur à la date t de l'actif contingent X est alors V_t défini par

$$V_t R_t = E_Q(X R_T | \mathcal{F}_t) .$$

Les produits présentant un risque de défaut sont tels que le versement promis n'a pas lieu si le défaut est apparu avant la date prévue pour le versement. Notons τ l'instant de défaut et D le processus de défaut, croissant et continu à droite, défini par $D_t = \mathbb{1}_{\tau \leqslant t}$. On suppose que, lorsque le défaut apparaît, les agents en sont avertis. Autrement dit l'information des agents à la date t contient la tribu $\mathcal{D}_t = \sigma(D_s, s \leqslant t)$. Le temps τ est un temps d'arrêt pour la filtration $\mathbf{D} = (\mathcal{D}_t, t \geqslant 0)$ et donc pour toute filtration contenant $\mathbf{D}$. Le processus D étant croissant, il existe un seul processus A prévisible croissant tel que $D_t - A_t$ soit une martingale. Si de plus, le processus D est prévisible, alors $A = D$. Nous allons présenter les approches traditionnelles, connues sous le nom d'approche intensité et d'approche structurelle. Puis, en précisant les filtrations mises en jeu, nous introduirons le processus de hasard, bien connu dans la théorie de fiabilité [5] et nous montrerons comment la connaissance de ce processus permet de mener à terme les calculs d'espérance et de déterminer l'intensité. Nous évoquerons ensuite une hypothèse d'invariance de martingale (hypothèse (H)) et nous énoncerons, sans démonstration, un théorème de représentation de martingales, sous l'hypothèse (H) puis dans le cas général. Ce théorème nous permettra d'identifier les actifs de base nécessaires pour obtenir un marché complet dans le monde avec défaut. Nous montrons aussi que, dans le cas général, l'intensité n'est pas le processus permettant de mener à terme tous les calculs. Nous terminerons sur des situations, peut-être purement mathématiques, où l'interprétation des résultats reste à faire, mais où nous mettrons l'accent sur le rôle de l'hypothèse (H) et sur le choix de la filtration. Par souci de simplicité, nous nous plaçons dans le cas $r = 0$.

2. APPROCHES TRADITIONNELLES

2.1. Approche intensité

Dans cette approche (voir Duffie *et al.* [10], Lando [17]), l'information connue à la date t par les agents financiers est modélisée par une tribu $\mathcal{G}_t$ qui contient en particulier la connaissance du temps de défaut si celui-ci est déjà apparu. Autrement dit $\mathcal{D}_t \subset \mathcal{G}_t$ et τ est un temps d'arrêt pour la filtration $\mathbf{G}$. De plus, les auteurs supposent que le temps d'arrêt admet une intensité au sens où il existe un processus $(\lambda_t, t \geqslant 0)$, **G**-adapté, positif tel que

$$D_t - \int_0^{t\wedge\tau} \lambda_s ds$$

est une **G**-martingale. Ceci implique que le temps d'arrêt τ est totalement inaccessible. Remarquons que l'unicité du processus intensité n'est réalisée que jusqu'en τ. En particulier, si λ est une intensité, $\lambda_s^* = \lambda_s 1\!\!1_{(s<\tau)}$ est aussi une intensité. D'autre part, si $(\tau_i, i = 1,2)$ sont deux temps d'arrêt dans la même filtration **G**, d'intensité $(\lambda_i, i = 1,2)$, l'égalité $D_t = 1\!\!1_{(\tau\leqslant t)} = 1\!\!1_{(\tau\leqslant t)}(D_1(t) + D_2(t))$ montre que l'intensité de $\tau = \tau_1 \wedge \tau_2$ est $\lambda_1 + \lambda_2$ dès que $P(\tau_1 = \tau_2) = 0$. Les auteurs supposent enfin qu'il existe une unique m.m.e. (le marché est complet sans arbitrage, toutes les variables $\mathcal{G}_T$ mesurables de carré intégrable sont duplicables). Les calculs d'évaluation sont alors menés sous cette probabilité. Nous énonçons leur résultat principal en prenant garde au choix du prolongement de λ après τ :

THÉORÈME 1. — *Soit Y une variable aléatoire intégrable appartenant à $\mathcal{G}_T$. Supposons que λ admette une extension λ^*, c'est-à-dire un processus **G**-adapté vérifiant*

$$\lambda_u^* 1\!\!1_{(u<\tau)} = \lambda_u 1\!\!1_{(u<\tau)},\ \forall u \in I\!\!R^+ ,$$

tel que le processus $(Y_t, t \geqslant 0)$ défini par

$$Y_t = E(Ye^{-\int_t^T \lambda_u^* du} | \mathcal{G}_t)$$

soit continu en τ, soit $\Delta Y_{T\wedge\tau} = Y_{T\wedge\tau} - Y_{(T\wedge\tau)-} = 0$. Alors, pour tout $t < T$,

$$E(1\!\!1_{(\tau>T)} Y | \mathcal{G}_t) = 1\!\!1_{(t<\tau)} E(Ye^{-\int_t^T \lambda_u^* du} | \mathcal{G}_t). \qquad (1)$$

La démonstration repose sur la remarque que, si le processus Y est continu, le processus

$$(Y_t e^{-\int_0^t \lambda_u du} L_t, t \geqslant 0)$$

est une martingale comme produit de deux martingales orthogonales : la martingale Y_t, continue en τ et la martingale $e^{-\int_0^t \lambda_u du} L_t = (1 - D_t)$ purement discontinue et admettant τ comme seule discontinuité. Le membre de droite de (1) permet d'interpréter λ^* comme un spread de taux, c'est-à-dire l'écart entre le taux sans risque r et le taux à prendre en compte pour actualiser les actifs soumis au risque de défaut $(\lambda^* + r)$. Malheureusement, le choix de λ^* dépend de Y. Cette lacune est comblée par une formule des mêmes auteurs lorsque le processus Y présente un saut, c'est-à-dire pour un choix arbitraire de l'extension de λ. Le problème est alors de calculer le saut de Y, ce qui n'est pas facile. En imposant à λ et à Y des conditions de mesurabilité, notre approche nous permet d'une part d'éviter le problème du prolongement de λ, d'autre part de ne pas avoir à étudier la continuité de Y.

2.2. Approche structurelle

Dans cette approche, initiée par Merton [20], le temps de défaut est le premier instant auquel la valeur d'une firme atteint un seuil donné. Si la dynamique de la valeur de la firme est dirigée par un mouvement brownien et si le seuil est déterministe, le temps τ est un temps d'arrêt dans une filtration brownienne et est prévisible. Par suite, ce temps d'arrêt n'admet pas d'intensité au sens précédent. Le calcul de la valeur d'un actif contingent soumis à risque de défaut se réduit à un calcul d'espérance conditionnelle dans la filtration brownienne. La filtration représentant l'information de l'agent est la même que dans le monde sans défaut, l'introduction du défaut ne crée pas une incomplétion du marché et l'utilisation de la m.m.e. est alors justifiée. En utilisant les processus de hasard, nous pouvons résoudre des problèmes d'approche structurelle en situation d'information partielle [9,11].

3. PROCESSUS DE HASARD

Nous présentons ici une approche qui nous permettra de faire le lien entre celles mentionnées ci-dessus. Nous traitons différemment l'information liée au temps de défaut des autres informations et nous choisissons de modéliser l'information de la façon suivante. On note $\mathbf{F} = (\mathcal{F}_t, t \geqslant 0)$ la filtration de l'information non liée au défaut. Dans ce qui suit, $\mathbf{F}$ sera une filtration brownienne, mais le cas où $\mathbf{F}$ est la filtration grossière n'est pas sans intérêt [14], de même, ce pourrait être une information résultant de l'observation des prix à des dates prédéterminées, ou une information liée à un processus de Poisson (voir Kusuoka [16]).

3.1. Choix de l'information

L'instant de défaut est un instant aléatoire τ, c'est-à-dire une variable aléatoire à valeurs positives. Comme auparavant, $\mathbf{D}$ est la filtration vérifiant les hypothèses habituelles, engendrée par le processus de défaut $(D_t, t \geqslant 0)$, et on note $\mathcal{G}_t = \mathcal{F}_t \vee \mathcal{D}_t$ l'information disponible sur le marché à la date t. Remarquons que $\mathcal{D}_t$ contient les ensembles $\{\tau \leqslant s\}$, pour $s \leqslant t$ et l'atome $\{\tau > t\}$, et qu'une variable aléatoire $\mathcal{G}_t$-mesurable est égale, sur l'ensemble $\{\tau > t\}$, à une variable aléatoire $\mathcal{F}_t$- mesurable, soit

$$\forall G_t \in \mathcal{G}_t, \exists F_t \in \mathcal{F}_t,\ G_t \cap \{\tau > t\} = F_t \cap \{\tau > t\}. \tag{2}$$

On introduit le processus

$$F_t = P(\tau \leqslant t | \mathcal{F}_t)$$

et le processus de hasard

$$\Gamma_t = -\ln[1 - F_t]\,.$$

Dans tout ce qui suit, nous supposerons que F est continu, le cas général est abordé dans [4,14]. Nous supposerons aussi que $F_t < 1$, ce qui exclut le cas où τ est un $\mathbf{F}$-temps d'arrêt ; dans ce cas, l'information liée au défaut est déja incluse dans $\mathbf{F}$ et $F_t = 1\!\!1_{(\tau \leqslant t)}$. Cependant, la plupart des résultats obtenus restent vrais, bien que le plus souvent triviaux (en attribuant à Γ_t la valeur 0 sur $\{t < \tau\}$). Cela nous permet d'englober dans une même présentation l'approche structurelle et l'approche intensité.

3.2. Valeur des actifs avec défaut

Il est facile de calculer la *valeur* d'un actif contingent soumis au risque de défaut, en menant les calculs dans un monde sans défaut au moyen du processus de hasard. Nous utilisons le mot valeur au lieu du mot prix pour insister sur le fait que, pour le moment, nous ne savons pas parler de complétion de marché ni d'unicité de m.m.e. Nous calculons simplement les espérances conditionnelles des pay-off, sous une probabilité de référence. Les résultats suivants, dus à l'école strasbourgeoise et en particulier à Dellacherie [6,7] sont alors classiques.

Soit Y une variable aléatoire $\mathcal{G}_T$-mesurable, intégrable. L'égalité (2) permet d'affirmer que la variable aléatoire $E(Y|\mathcal{G}_t)$ est, sur l'ensemble $\{\tau > t\}$ égale à une variable aléatoire $\mathcal{F}_t$-mesurable. On en déduit

$$E(Y|\mathcal{G}_t)1\!\!1_{(\tau>t)} = 1\!\!1_{(\tau>t)}\frac{E(Y1\!\!1_{(\tau>t)}|\mathcal{F}_t)}{P(\tau > t|\mathcal{F}_t)} = 1\!\!1_{(\tau>t)}\frac{E(Y1\!\!1_{(\tau>t)}|\mathcal{F}_t)}{1-F_t} \tag{3}$$

Si h est un processus borné $\mathbf{F}$-prévisible, on établit que

$$E(h_\tau 1\!\!1_{(t<\tau)}|\mathcal{G}_t) = 1\!\!1_{(t<\tau)}e^{\Gamma(t)}E\left(\int_t^\infty h_u dF_u|\mathcal{F}_t\right) \tag{4}$$

en montrant cette formule pour des processus élémentaires, puis en appliquant un théorème de classe monotone. On peut remarquer que cette formule est vérifiée dans le cas où τ est un $\mathbf{F}$-temps d'arrêt, même si dans ce cas elle ne présente pas d'intérêt car elle se réduit à l'égalité triviale $E(h_\tau 1\!\!1_{(t<\tau)}|\mathcal{F}_t) = 1\!\!1_{(t<\tau)}E(\int_t^\infty h_u dF_u|\mathcal{F}_t)$.

Il résulte de (4) que pour toute variable aléatoire intégrable $X \in \mathcal{F}_T$ et pour tout $t < T$

$$E(X1\!\!1_{(T<\tau)}|\mathcal{G}_t) = 1\!\!1_{(t<\tau)}E(X\exp[\Gamma_t - \Gamma_T]\,|\mathcal{F}_t)\,. \tag{5}$$

Cette égalité nous montre que la valeur d'un pay-off X soumis à risque de défaut est obtenue au moyen de processus de hasard, la formule (4) donne la valeur d'une compensation de h_τ versée au moment du défaut, si celui-ci survient avant maturité.

3.3. Processus de hasard croissant

Si le processus F est croissant, le processus de hasard $\Gamma_t = \int_0^t \frac{dF_u}{1-F_u}$ l'est également, et le processus

$$(M_t = D_t - \int_0^{t\wedge\tau} \frac{dF_u}{1-F_u} = D_t - \Gamma_{t\wedge\tau}, t \geqslant 0)$$

est une $\mathbf{G}$-martingale. Si de plus, F est différentiable de dérivée f,

$$M_t = D_t - \int_0^{t\wedge\tau} \frac{f_u}{1-F_u} du$$

et $\gamma_u = \frac{f_u}{1-F_u} = \Gamma'_u$ est alors l'intensité $\mathbf{F}$-adaptée de τ. La formule (5) qui s'écrit

$$E(X\mathbb{1}_{(T<\tau)}|\mathcal{G}_t) = \mathbb{1}_{(t<\tau)} E(X \exp(-\int_t^T \gamma_s ds)\,|\mathcal{F}_t)$$

est similaire à celle que nous avons présentée dans le théorème 1. La différence consiste en l'utilisation de filtrations différentes et en l'identification précise de l'intensité.

3.4. Cas général

Si l'hypothèse de croissance de F n'est pas vérifiée, la formule (5) reste valable, mais son interprétation en terme d'intensité est fausse. En effet, dans ce cas F étant une sous-martingale, il existe un processus croissant prévisible $\tilde{F}$ tel que $F - \tilde{F}$ est une $\mathbf{F}$-martingale (décomposition de Doob-Meyer) et on vérifie que

$$M_t = D_t - \int_0^{t\wedge\tau} \frac{d\tilde{F}_u}{1-F_u} = D_t - \Lambda_{t\wedge\tau} \tag{6}$$

est une $\mathbf{G}$-martingale. Si $\tilde{F}$ est différentiable de dérivée $\tilde{f}$,

$$M_t = D_t - \int_0^{t\wedge\tau} \frac{\tilde{f}_u}{1-F_u} du \quad \text{et } \tilde{\gamma}_u = \frac{\tilde{f}_u}{1-F_u}$$

est l'intensité $\mathbf{F}$-adaptée de τ. Dans ce cas, l'intensité de τ n'est pas le processus à prendre en compte pour évaluer un pay-off, comme le montre la formule (5) qui explicite la valeur d'un pay-off versé à la date terminale.

4. HYPOTHÈSE (H)

Une difficulté pour l'étude de la complétion d'un marché présentant un risque de défaut est de savoir quels sont les actifs que l'on souhaite couvrir. Cette question est rarement abordée dans la littérature, car la plupart des auteurs travaillent avec une filtration sans séparer le défaut du reste de l'information. Si l'on suppose que la filtration $\mathbf{G}$ est, comme nous le présentons, composée d'une partie $\mathbf{F}$ provenant d'un monde sans défaut et de la partie $\mathbf{D}$ liée au défaut, et que l'on souhaite couvrir tous les actifs de $\mathcal{G}_T$ un raisonnement financier [4] permet de montrer que les martingales de la filtration $\mathbf{F}$ (qui sont des prix dans le monde sans défaut) restent des martingales dans la filtration $\mathbf{G}$. Cette situation, connue dans la littérature probabiliste sous le nom d'hypothèse (H) constitue un des premiers résultats [2,19] sur le grossissement de filtration. Dans notre cas, les $\mathbf{F}$-martingales sont des $\mathbf{G}$-martingales si et seulement si

$$P(\tau \leqslant t|\mathcal{F}_t) = P(\tau \leqslant t|\mathcal{F}_\infty) \tag{7}$$

ce qui implique que F et Γ sont des processus croissants. L'hypothèse (H) est présente dans tous les articles traitant du risque de défaut, même si elle n'est pas énoncée explicitement. Elle implique que le brownien générant la filtration $\mathbf{F}$ reste un brownien dans la filtration $\mathbf{G}$. Hull et White, remarquent cependant [12] :« When we move from the vulnerable world to a default free world, the stochastic processes followed by the underlying state variables may change ». Nous verrons plus loin quel est ce changement et comment passer d'un monde à l'autre.

4.1. Théorème de représentation prévisible

Dans [16], Kusuoka a montré que, sous l'hypothèse (H), le couple (W, M) possède la propriété de représentation prévisible :

THÉORÈME 2. — *Supposons que l'hypothèse (H) est vérifiée. Soit Z une $\mathbf{G}$-martingale de carré intégrable. Il existe deux processus prévisibles ψ, ϕ tels que*

$$Z_t = z + \int_0^t \phi_s dW_s + \int_0^t \psi_s dM_s\,.$$

Il est facile, à partir de (4), de démontrer l'extension du théorème de représentation prévisible de Brémaud [3] qui donne explicitement la décomposition des martingales de la forme $E(h_\tau|\mathcal{G}_t)$:

PROPOSITION 1. — *Supposons que* (H) *est vérifiée. Soit $H_t = E(h_\tau|\,\mathcal{G}_t)$, où h est un processus $\mathbf{F}$-prévisible. Alors, le processus H admet une décomposition en une martingale continue et une martingale discontinue :*

$$H_t = m_0 + \int_0^{t\wedge\tau} e^{\Gamma_u} dm_u^h + \int_{]0,t]} (h_u - H_{u-})\, dM_u, \tag{8}$$

où m^h est la **F**-*martingale*

$$m_t^h = E\Big(\int_0^\infty h_u dF_u \,|\, \mathcal{F}_t\Big).$$

Ce résultat [4] est moins général mais plus précis que celui de Kusuoka. L'hypothèse (H) entraîne que m^h est aussi une **G**-martingale. Pour que le marché soit complet, il suffit de disposer de deux actifs, l'un générant le mouvement brownien, l'autre la martingale M. La dynamique des zéro-coupons avec défaut est donnée par

$$\rho_t = E(\mathbb{1}_{(T<\tau)}|\mathcal{G}_t) = \mathbb{1}_{(t<\tau)} e^{\Gamma_t} E(e^{-\Gamma_T}|\mathcal{F}_t) = L_t m_t$$

où $m_t = E(e^{-\Gamma_T}|\mathcal{F}_t)$ est une **F**-martingale continue, les calculs étant menés sous une m.m.e. pour laquelle (H) est satisfaite [2]. On montre, au moyen du calcul d'Itô, que la dynamique du zéro-coupon avec défaut est alors [4]

$$d\rho_t = \rho_{t-}(\mu_t dW_t - dM_t)$$

où μ_t est obtenu en représentant la martingale $m_t = E(e^{-\Gamma_T}|\mathcal{F}_t)$, en terme d'intégrale stochastique par rapport au mouvement brownien, soit $dm_t = m_t\mu_t dW_t$.

La plupart des résultats restent vrais si F est croissante. Dans ce cas, si m est une **F**-martingale, le processus $(m_{t\wedge\tau}, t \geqslant 0)$ est une **G**-martingale.

4.2. Processus de Cox

4.2.1. Définition et propriétés

Un exemple particulièrement simple est celui des processus de Cox. Dans cette approche, on se donne un processus λ à valeurs positives, adapté par rapport à la filtration de référence **F** et l'on construit un temps aléatoire sur un espace « plus gros » qui admet λ comme intensité. Pour ce faire, on introduit Θ, v.a. indépendante de **F**, de loi exponentielle de paramètre 1. (Cette variable doit être construite sur un espace auxiliaire). On définit alors τ sur l'espace produit de Ω et de l'espace auxiliaire par

$$\tau = \inf\{t \,:\, \int_0^t \lambda_s ds \geqslant \Theta\}.$$

Il est facile de vérifier que τ est un **G**-temps d'arrêt, dont le processus de hasard est $\Gamma_t = \displaystyle\int_0^t \lambda_s ds$. En effet,

$$F_t = P(\tau \leqslant t|\mathcal{F}_t) = 1 - \exp\Big(-\int_0^t \lambda_s ds\Big) = P(\tau \leqslant t|\mathcal{F}_\infty).$$

2. On peut montrer [4], que, sous des hypothèses peu contraignantes sur la dynamique des prix, si (H) est vérifiée sous la probabilité historique, elle reste vérifiée sous toute m.m.e.

Par suite, l'hypothèse (H) est vérifiée, et l'intensité **F**-adaptée de τ est $(\lambda_s, s \geqslant 0)$. De plus, pour tout $X \in \mathcal{F}_T$

$$E(X \exp\left(-\int_t^T \lambda_u du\right) |\mathcal{G}_t) = E(X \exp\left(-\int_t^T \lambda_u du\right) |\mathcal{F}_t)$$

et le processus $X_t = E(X \exp\left(-\int_t^T \lambda_u du\right) |\mathcal{G}_t)$ est continu. On est alors dans les conditions d'applications du théorème 1, mais il faut insister qu'ici, l'intensité est définie *a priori* jusqu'en l'infini et que si l'on prend X dans $\mathcal{G}_T$, la propriété de continuité de X_t n'est plus nécessairement vérifiée.

4.2.2. Modèles de ratings

La construction précédente est très souvent utilisée et convient bien aux modèles de ratings. Les grandes firmes américaines sont classées suivant leur santé. La classe « AAA » ou triple A est réservée aux firmes en excellente santé, puis on trouve AA, A, BBB, BB, B, CCC, et l'état de faillite est D. Les agences Moody, Standard and Poors publient régulièrement des tableaux fondés sur des statistiques donnant le pourcentage de firmes qui passent d'un état à un autre dans un intervalle de temps donné (une année), et regroupent ces résultats sous forme d'une matrice de transition A. Un modèle en temps continu des probabilités de défaut est alors construit en utilisant une matrice Δ telle que $A = e^{\Delta}$ et en supposant que les probabilités de transition seront données par $A(t) = \exp(t\Delta)$. On trouve par exemple dans Lando [17] l'exemple suivant

Initial	Rating at the end of the year							
Rating	AAA	AA	A	BBB	BB	B	CCC	D
AAA	0,8910	0,0963	0,0078	0,0019	0,0030	0,000	0,0000	0,0000
AA	0,0086	0,9010	0,0747	0,0099	0,0029	0,0029	0,0000	0,0000
A	0,0009	0,0291	0,8894	0,0649	0,0101	0,0045	0,0000	0,0009
BBB	0,0006	0,0043	0,0656	0,8427	0,0644	0,0160	0,0018	0,0045
BB	0,0004	0,0022	0,0079	0,0719	0,7764	0,1043	0,0127	0,0241
B	0,000	0,0019	0,0031	0,0066	0,0517	0,8246	0,0435	0,0635
	0,000	0,0000	0,0116	0,0116	0,0203	0,0754	0,6493	0,2319
D	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000

et Δ est donnée par

Initial	Rating at the end of the year							
Rating	AAA	AA	A	BBB	BB	B	CCC	D
AAA	-0,1154	0,1019	0,0083	0,0020	0,0031	0,000	0,0000	0,0000
AA	0,0091	-0,1043	0,0787	0,0105	0,0030	0,0030	0,0000	0,0000
A	0,0010	0,0309	-0,1172	0,0688	0,0107	0,0048	0,0000	0,0010
BBB	0,0007	0,0047	0,0713	-0,1711	0,0701	0,0174	0,0020	0,0049
BB	0,0005	0,0025	0,0089	0,0813	-0,2530	0,1181	0,0144	0,0273
B	0,0000	0,0021	0,0034	0,0073	0,0568	-0,1929	0,0479	0,0753
CCC	0,0000	0,0000	0,0142	0,0142	0,0250	0,0818	-0,4318	0,2756
D	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000

Ce modèle correspond au cas où la filtration «sans défaut» est la filtration grossière. Lando a ensuite généralisé cette approche en se donnant une matrice Δ dont les coefficients dépendent d'un facteur X, processus aléatoire. Il nous semble important de souligner que la donnée est en fait la matrice de transition, conditionnellement à l'information due au facteur.

4.2.3. Approche intensité et approche structurelle

Il est facile de montrer que, sous l'hypothèse (H), il existe une variable aléatoire Θ, de loi exponentielle, indépendante de $\mathcal{F}_\infty$, telle que

$$\tau = \inf\{t \,:\, \Gamma_t \geqslant \Theta\}\,.$$

(Il suffit de prendre $\Theta = \Gamma_\tau$). Cette remarque nous permet de rapprocher les deux approches et donne une grande importance aux modèles de Cox.

5. CAS GÉNÉRAL

On peut choisir un modèle où les actifs du monde sans défaut ne sont plus disponibles dans le monde avec défaut, ce qui veut dire que seuls les actifs de la forme $X 1\!\!1_{(T<\tau)}$ et $h_\tau 1\!\!1_{(\tau\leqslant T)}$ seront négociables. Dans ce cas, l'hypothèse (H) n'est pas nécessairement vérifiée.

5.1. Décomposition de F-martingales dans la filtration G

La formule (4) permet d'établir que

THÉORÈME 3. — *Si z est une $\mathbf{F}$-martingale, le processus $Z_t = z_{t\wedge\tau} + \int_0^{t\wedge\tau} \frac{d < z, F >_u}{1-F_u}$ est une $\mathbf{G}$-martingale arrêtée en τ.*

En particulier, la décomposition canonique du mouvement brownien W, arrêté en τ, dans la filtration $\mathbf{G}$ est $W_{t\wedge\tau} = \tilde{W}_{t\wedge\tau} - \int_0^{t\wedge\tau} \frac{d < W, F >_u}{1-F_u}$.

Tous ces résultats peuvent se vérifier à la main, mais sont des résultats classiques de la théorie du grossissement progressif de filtration. On pourra consulter Yor, [21], chapitre 12 et les références qui s'y trouvent.

Il est beaucoup plus difficile d'étudier le comportement des $\mathbf{F}$-martingales dans la filtration $\mathbf{G}$ après l'instant τ. Pour que ces processus restent des semi-martingales (hypothèse indispensable en finance pour éviter les arbitrages), il convient de supposer que la variable τ est honnête, c'est-à-dire que pour tout $t \in]0,\infty[$, il existe une variable aléatoire $\mathcal{F}_t$-mesurable τ_t telle que $\tau = \tau_t$ sur l'ensemble $\{\tau < t\}$. Nous ne résistons pas au plaisir de citer Dellacherie et Meyer : [8], page 137 «Si X est un processus continu adapté, la variable aléatoire $\tau = \inf\{s \leqslant 1 \,:\, X_s = \sup_{u\leqslant 1} X_u\}$ est honnête. Par exemple, X_t peut représenter le cours d'une action à l'instant t et τ est le moment idéal pour vendre son paquet d'actions. Tous les spéculateurs cherchent à connaître τ sans jamais y parvenir, d'où son nom de variable honnête». Nous allons étudier ce temps honnête dans un cas particulier et montrer que sa connaissance entraînerait des arbitrages. Pour simplifier le raisonnement, nous effectuons les calculs avec un mouvement brownien, mais des calculs analogues peuvent être menés avec un brownien géométrique.

5.2. Un exemple

Soit W un mouvement brownien, S son maximum sur $[0,1]$ (soit $S = \sup\{W_s, s \leqslant 1\}$) et $\tau = \inf\{t \leqslant 1 : W_t = S\}$. Les égalités

$$\{\tau \leqslant t\} = \{\sup_{s\leqslant t} W_s \geqslant \sup_{t\leqslant u\leqslant 1} W_u\} = \{\sup_{s\leqslant t} W_s - W_t \geqslant \sup_{t\leqslant u\leqslant 1} W_u - W_t\}$$
$$= \{S_t - W_t \geqslant \hat{S}_{1-t}\}$$

où $S_t = \sup_{s\leqslant t} W_s$, $\hat{W}_s = W_{s+t} - W_t$ et $\hat{S}_t = \sup_{s\leqslant t} \hat{W}_s$ et l'indépendance du mouvement brownien $\hat{W}$ par rapport à $\mathcal{F}_t$ permettent de calculer le processus de hasard associé à τ. En utilisant que la loi de $\hat{S}_t$ est celle de $|\hat{W}_t|$, on obtient

$$F_t = P(\tau \leqslant t|\mathcal{F}_t) = P(S_t - W_t \geqslant |\hat{W}_{1-t}||\mathcal{F}_t) = \Psi(\frac{S_t - W_t}{\sqrt{1-t}})$$

avec, en notant G une variable gaussienne centrée réduite,

$$\Psi(x) = P(x \geqslant \frac{|\hat{W}_{1-t}|}{\sqrt{1-t}}) = P(x \geqslant |G|) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x \exp(-\frac{y^2}{2})dy.$$

La décomposition en partie martingale et partie processus croissant se fait au moyen de la formule d'Itô en utilisant que $x\Psi'(x) + \Psi''(x) = 0$.

$$\Psi\left(\frac{S_t - W_t}{\sqrt{1-t}}\right) = \int_0^t \Psi'\left(\frac{S_s - W_s}{\sqrt{1-s}}\right) d\left(\frac{S_s - W_s}{\sqrt{1-s}}\right) + \frac{1}{2}\frac{ds}{1-s}\Psi''\left(\frac{S_s - W_s}{\sqrt{1-s}}\right)$$
$$= -\int_0^t \Psi'\left(\frac{S_s - W_s}{\sqrt{1-s}}\right) \frac{1}{\sqrt{1-s}} dW_s + \int_0^t \frac{dS_s}{\sqrt{1-s}}\Psi'\left(\frac{S_s - W_s}{\sqrt{1-s}}\right)$$

L'intensité est donc

$$\frac{1}{1 - \Psi((S_t - W_t)/\sqrt{1-t})} \frac{dS_t}{\sqrt{1-t}} \Psi'\left(\frac{S_t - W_t}{\sqrt{1-t}}\right).$$

Les arbitrages sont évidents du point de vue financier. Plaçons-nous en un instant s. Si τ a déjà eu lieu, on ne fait rien. Sinon, on sait que le prix va croître. On achète le sous-jacent que l'on revendra au moment où le maximum sera atteint.

Du point de vue mathématique, on montre qu'une mesure martingale ne saurait être équivalente à P : supposons qu'il existe une probabilité faisant de $W_{t\wedge\tau}$ une **G**-martingale. Soit $A = \{\tau > \frac{1}{2}\}$. Cet ensemble est de P probabilité non nulle. Si Q est une m.m.e., l'ensemble A étant dans $\mathcal{G}_{1/2}$ on a

$$0 = E_Q(W_{\tau\vee 1/2}1\!\!1_A) - E_Q(W_{1/2}1\!\!1_A) = E_Q(1\!\!1_A(W_\tau - W_{1/2}))$$

ce qui conduit à $Q(A) = 0$ et Q n'est pas équivalente à P.

5.3. Théorème de représentation

On trouvera dans [1], dans le cas où τ est honnête et $\mathcal{F}_\infty$-mesurable un théorème de représentation pour toutes les **G**-martingales. Nous ne reproduisons pas ce théorème qui fait intervenir non seulement le brownien de la filtration **G** et la martingale M mais aussi une troisième martingale de la forme $v\mathbb{1}_{(\tau\leqslant t)}$ avec[3] $v \in \mathcal{F}_\tau^+$ telle que $E(v|\mathcal{F}_\tau) = 0$. Par exemple dans le cas $\tau = \sup\{t \leqslant 1 : W_t = 0\}$, on montre que $v = V \operatorname{sgne} W_1$ avec $V \in L^2(\mathcal{F}_\tau)$ (Voir Yor [21] page 74). L'investisseur doit attendre « un petit peu » après τ pour savoir si les prix vont monter ou descendre... Mais tout cela nous entraîne vers des résultats mathématiques d'une haute complexité, que nous ne savons pas encore exploiter en finance.

Par contre, il est facile d'obtenir un théorème de représentation pour les actifs « avant défaut ».

THÉORÈME 4. — *Soit h un processus* **F**-*prévisible et $H_t = E(h_\tau|\mathcal{G}_t)$. Le processus H admet une décomposition en une martingale continue et une martingale discontinue :*

$$H_t = m_0 + \int_0^{t\wedge\tau} \frac{1}{1-F_s}(z_s(H_s - h_s) + \mu_s)d\widetilde{W}_s + \int_{]0,t]} (h_u - H_{u-})\, dM_u, \quad (9)$$

où z et μ sont obtenus par décomposition de **F**-*martingales :*

$$d(F_t - \tilde{F}_t) = z_t dW_t, dm_t = \mu_t dW_t$$

avec $m_t = E\Big(\int_0^\infty h_u dF_u|\,\mathcal{F}_t\Big)$ et où M est la martingale définie dans (6) $M_t = D_t - \Lambda_{t\wedge\tau}$.

Ce théorème nous permet de préciser que, si dans le monde avec défaut, seuls les actifs de la forme $X\mathbb{1}_{(T<\tau)}$ et les compensations sont négociables, le marché sera complet si, en plus de l'actif S il existe un zéro-coupon avec défaut.

6. MARCHÉ COMPLET SANS ARBITRAGE

Nous présentons un exemple purement mathématique, dû à Kusuoka [16], où le processus de hasard n'est pas un processus croissant et où le marché est cependant sans arbitrage. Sous la probabilité historique P les temps aléatoires τ_i, $i = 1, 2$ sont des variables aléatoires indépendantes de loi exponentielle de paramètre λ_1 et λ_2. La loi du couple (τ_1, τ_2) sous P a pour densité $f(x, y) = \lambda_1\lambda_2 e^{-(\lambda_1 x + \lambda_2 y)}$ pour $(x, y) \in \mathbb{R}_+^2$. On note $M_t^i = D_t^i - (\tau_i \wedge t)$ les martingales associées à ces instants aléatoires et $\mathcal{D}_t^i$ les filtrations engendrées par les processus D^i.

3. La tribu $\mathcal{F}_\tau^+$ est engendrée par les v.a. Z_τ où Z est un processus **F**-progressivement mesurable.

Soit α_1 et α_2 deux nombres strictement positifs et Q la probabilité définie sur $(\Omega, \mathcal{G}_t)$ par

$$\frac{dQ}{dP} = \eta_t, \quad P\text{-a.s.}, \tag{10}$$

avec

$$\eta_t = 1 + \sum_{i=1}^{2} \int_{]0,t]} \eta_{u-} \kappa_u^i \, dM_u^i, \tag{11}$$

où

$$\kappa_t^1 = 1\!\!1_{\{\tau_2 < t\}} \Big(\frac{\alpha_1}{\lambda_1} - 1\Big), \quad \kappa_t^2 = 1\!\!1_{\{\tau_1 < t\}} \Big(\frac{\alpha_2}{\lambda_2} - 1\Big).$$

Nous allons supposer que la filtration dans le monde sans défaut est la filtration $\mathcal{D}_t^2$ et que le défaut apparaît en τ_1. La formule (2) conduit à

$$Q(\tau_1 > t | \mathcal{D}_t^2) = (1 - D_t^2) \frac{Q(\tau_1 > t, \tau_2 > t)}{Q(\tau_2 > t)} + D_t^2 Q(\tau_1 > t | \tau_2) \, .$$

Des calculs longs (reproduits dans [15]) permettent de montrer [4] que

$$\begin{aligned} Q(\tau_1 > t, \tau_2 > t) &= e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)t} \\ Q(\tau_2 > t) &= \frac{1}{\lambda_1 + \lambda_2 - \alpha_2} \Big(\lambda_1 e^{-\alpha_2 t} + (\lambda_2 - \alpha_2) e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)t} \Big) \\ Q(\tau_1 > t | \tau_2 = u) &= \frac{(\lambda_1 + \lambda_2 - \alpha_2) \lambda_2 e^{-\alpha_1 (t-u)}}{\lambda_1 \alpha_2 e^{(\lambda_1 + \lambda_2 - \alpha_2)u} + (\lambda_2 - \alpha_2)(\lambda_1 + \lambda_2)} \, . \end{aligned}$$

On en déduit

$$1 - F_t = 1\!\!1_{\{t < \tau_2\}} \frac{c}{\lambda_1 e^{ct} + \lambda_2 - \alpha_2} + 1\!\!1_{\{\tau_2 \leqslant t\}} \frac{c \lambda_2 e^{-\alpha_1 (t - \tau_2)}}{\lambda_1 \alpha_2 e^{c\tau_2} + (\lambda_2 - \alpha_2)(\lambda_1 + \lambda_2)} .$$

où $c = \lambda_1 + \lambda_2 - \alpha_2$. Les deux termes du membre de droite sont des fonctions décroissantes, le saut en τ_2, égal à

$$\Delta = \frac{c}{\lambda_1 e^{ct} + \lambda_2 - \alpha_2} - \frac{c \lambda_2}{\lambda_1 \alpha_2 e^{c\tau_2} + (\lambda_2 - \alpha_2)(\lambda_1 + \lambda_2)}$$

est négatif si et seulement si $\lambda_2 \leqslant \alpha_2$. Nous avons ainsi un exemple où l'hypothèse de croissance de F n'est pas vérifiée.

4. Il est à noter que certains termes ont été omis dans l'article de Kusuoka.

7. CONCLUSION

Nous avons présenté ici une démarche privilégiant la donnée de l'instant de défaut et nous avons caractérisé son intensité au moyen de sa loi conditionnelle par rapport à l'information sans défaut. Dans notre approche, l'intensité de l'infimum de deux temps de défaut n'est en général pas la somme des intensités. L'approche des processus de Cox est très instructive à ce sujet : si $(\tau_i, i = 1,2)$ sont construits à partir de processus positifs $(\lambda_i, i = 1,2)$ tous deux $\mathbf{F}$-adaptés vérifiant $\lambda_1 < \lambda_2$, on a $\tau_2 < \tau_1$. L'intensité $\mathbf{F}$-adaptée de l'infimum n'est pas la somme des intensités $\mathbf{F}$-adaptées de τ_1 et τ_2. Il est instructif de jouer avec les diverses filtrations mises en jeu et de montrer par exemple que τ_1, temps d'arrêt prévisible dans la filtration $\mathcal{F}_t \vee \sigma(\tau_1 \wedge t) \vee \sigma(\tau_2 \wedge t)$ n'a pas d'intensité $\mathcal{F}_t \vee \sigma(\tau_2 \wedge t)$-adaptée. Nous avons exploité les théorèmes de grossissement de filtration afin de souligner la complexité de la modélisation. La difficulté est dans un premier temps de répondre à une question primordiale « la vie après le défaut existe-t-elle ? ». Si oui (on peut penser aux procédures de restructuration des entreprises – chapitre 11 de la loi Américaine), il est nécessaire de comprendre comment les prix se modifient après le défaut. Il reste enfin à construire des modèles sans arbitrage, ayant une interprétation financière sans hypothèse (H), ce qui peut être réalisé à partir de modèles structurels en obsevation partielle.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

[1] AZÉMA, J., JEULIN, T., KNIGHT, F., et YOR, M. [1993] : Le théorème d'arrêt en une fin d'ensemble prévisible, *Séminaire de Probabilités XXVII*, Springer, p. 133-158, Lecture Notes in Math. 1557.

[2] BRÉMAUD, P. and YOR, M. [1978] : Changes of filtration and of probability measures,*Z.f. W.,* 45, 269-295.

[3] BRÉMAUD, P. [1981] : *Point Processes and Queues. Martingale Dynamics*, Springer- Verlag, Berlin.

[4] BLANCHET-SCALLIET, C. and JEANBLANC, M. [2000] Hazard process and default, preprint, Université d'Evry.

[5] COCOZZA-THIVENT, C. [1997] : *Processus stochastiques et fiabilité des systèmes*, Springer-Smai.

[6] DELLACHERIE, C. [1970] : Un exemple de la théorie générale des processus, *Séminaire de Probabilités IV*, Lecture Notes in Math. 124, 60-70, Springer-Verlag, Berlin.

[7] DELLACHERIE, C.[1972] : *Capacités et processus stochastiques*, Springer-Verlag, Berlin.

[8] DELLACHERIE, C. et MEYER, P.A. [1992] : *Probabilités et potentiel, Processus de Markov. Compléments de calcul stochastique.* Hermann.

[9] DUFFIE, D. and LANDO, D. [2000] : Term structure of credit spreads with incomplete accounting information, To appear Econometrica.

[10] DUFFIE, D., SCHRODER, M. and SKIADAS, C. [1997] : Recursive valuation of defaultable securities and the timing of resolution of uncertainty, *Annals of Applied Probability*, 6, 1075-1090.

[11] ELLIOTT, R.J., JEANBLANC, M. and YOR, M. : On models of default risk, *Math. finance*, 10, p. 179-196.

[12] HULL, J. and WHITE, A. [1995] The impact of default risk on the price of options and other derivative securities, *Journal of banking and finance,* 299-322.

[13] JARROW, R.A., LANDO, D. and TURNBULL, S.M. [1997] : A Markov model for the term structure of credit risk spreads, *Review of Financial Studies*, 10, 481-523.

[14] JEANBLANC, M. and RUTKOWSKI, M. : *Models for default risk : An overview.* Shanghai summer school August 1999. Mathematical finance : theory and practise, Yong J. and Cont R. editors, Higher education press.

[15] JEANBLANC, M. and RUTKOWSKI, M. [2000] Modeling default risk : Mathematical tools. *Fixed Income and Credit risk modeling and Management, New York University, Stern scoll of business, Statistics and operations research department, Workshop, May 5.*

[16] KUSUOKA, S. [1999] : A remark on default risk models, *Advances in Mathematical Economics*, 1, 69-82.

[17] LANDO, D. [1994] : Three essays on contingent claims pricing, Ph. D. Thesis, Cornell university.

[18] MADAN, D. and UNAL, H. [1998] : Pricing the risk of default, *Review of Derivatives Research*, 2, 121-160.

[19] MAZZIOTTO, G. and SZPIRGLAS, J. [1979] : Modèle général de filtrage non linéaire et équations différentielles stochastiques associées, *Ann. Inst. Henri Poincaré*, 15, 147-173.

[20] MERTON, R. [1974] : On the pricing of corporate debt : the risk structure of interest rates, *Journal of Finance*, 3, 449-470.

[21] YOR, M. [1997] : *Some Aspects of Brownian Motion. Part II : Some Recent Martingale Problems*, Lectures in Mathematics. ETH Zürich. Birkhäuser.