

JEAN-MARC BARDET

**Les cours d'actifs financiers sont-ils autosimilaires ?**

*Journal de la société française de statistique*, tome 141, n° 1-2 (2000),  
p. 137-148

[http://www.numdam.org/item?id=JSFS\\_2000\\_\\_141\\_1-2\\_137\\_0](http://www.numdam.org/item?id=JSFS_2000__141_1-2_137_0)

© Société française de statistique, 2000, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Journal de la société française de statistique » (<http://publications-sfds.math.cnrs.fr/index.php/J-SFdS>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

# LES COURS D'ACTIFS FINANCIERS SONT-ILS AUTOSIMILAIRES ?

Jean-Marc BARDET<sup>1</sup>

## RÉSUMÉ

La propriété d'autosimilarité caractérise les processus qui sont invariants en distribution par changement d'échelle. C'est une hypothèse assez forte permettant de lier le comportement en temps petit avec celui en temps grand par l'unique connaissance d'un paramètre d'autosimilarité  $H \in ]0, 1[$ . Après avoir rappelé quelques définitions et propriétés sur la notion d'autosimilarité, nous présentons un test simple permettant d'identifier les séries chronologiques autosimilaires gaussiennes. Ce test est alors appliqué aux cours d'actifs financiers et révèle deux plages fréquentielles dans lesquelles ces séries se comportent comme des processus autosimilaires. Nous proposons enfin un modèle de processus tenant compte de cette dernière propriété.

*Mots-clés* — Autosimilarité - Mouvement brownien fractionnaire - Test semi-paramétrique - Données financières

*Classification AMS*. Primary 62G10; secondary 60F05, 60G18, 62F10.

## INTRODUCTION

La propriété d'autosimilarité caractérise les processus qui sont invariants en distribution par changement d'échelle. Associée souvent aux notions de fractales et de processus longue-mémoire, l'autosimilarité fait partie de ces notions qui ont été beaucoup étudiées depuis les travaux vulgarisateurs de Mandelbrot (quoique Julia (1918), Hurst (1953) et Kolmogorov (1940) puissent être considérés comme les précurseurs respectifs des fractales, de la longue-mémoire et de l'autosimilarité). De nombreux phénomènes physiques (turbulences...), de traitement du signal (télécommunications, réseaux,...) peuvent être modélisés par des processus autosimilaires. Notre but est de tester si les cours d'actifs financiers peuvent présenter une telle propriété. Nous allons maintenant préciser mathématiquement ce qui précède (un exposé plus détaillé peut être consulté dans Samorodnitsky et Taqqu, 1994), où l'on retrouvera les propriétés ci-dessous, tandis que les propriétés asymptotiques importantes sur les processus auto-similaires se trouvent dans Dobrushin et Major, 1979, ou Major, 1982). Considérons un processus  $Z = (Z_t)_{t \in T}$  centré, où  $T$  est une partie de  $\mathbb{R}$  (en général,  $T$  sera  $\mathbb{N}$  ou  $\mathbb{R}_+$  lorsque le processus est causal). Alors :

---

1. Laboratoire de Statistique et de Probabilité, URA CNRS 745, Université Paul Sabatier, 118 route de Narbonne, 31062 Toulouse Cedex, France, e-mail : bardet@cict.fr

DÉFINITION 1.1. — On dit que  $Z$  est  $H$ -autosimilaire si il existe  $H \geq 0$  tel que pour tout  $a \in T$  :

$$(Z_{at})_{t \in T} \text{ a la même loi que } (a^H Z_t)_{t \in T},$$

c'est-à-dire que  $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall (t_1, \dots, t_n) \in T^n, \forall a \in T$ , alors  $(Z_{at_1}, \dots, Z_{at_n})$  a même loi que  $(a^H Z_{t_1}, \dots, a^H Z_{t_n})$ .

Notons que cette définition ne demande pas l'existence, pour le processus, d'un moment d'ordre  $p$ , où  $p > 0$ . Pour permettre une meilleure intuition de cette notion d'autosimilarité stochastique, la figure 1 présente une trajectoire d'un processus autosimilaire (en l'occurrence un mouvement brownien fractionnaire avec  $H = 0.3$ ) composée de 10000 points, et une partie de 3000 points de cette trajectoire (prise entre les points 3000 et 6000) et remise à la même échelle que la précédente. Les deux graphiques ne sont évidemment pas strictement identiques (comme l'aurait impliqué une autosimilarité déterministe), mais on peut penser que l'irrégularité est la même d'une courbe à l'autre : la distribution des deux trajectoires semble identique.

Par la suite, nous emploierons une version un peu plus faible de l'autosimilarité qui est l'autosimilarité pour des échelles déterminées :

DÉFINITION 1.2. — On dit que  $Z$  est  $H$ -autosimilaire pour les échelles  $(a_1, a_2, \dots, a_m) \in T^m$  lorsqu'il existe  $H \geq 0$  tel que pour tout  $a \in \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$  :

$$(Z_{at})_{t \in T} \text{ a la même loi que } (a^H Z_t)_{t \in T}.$$

Si on raisonne dans le domaine spectral, on pourra parler aussi d'autosimilarité pour un nombre de fréquences déterminées. Voici quelques conséquences immédiates de la définition de l'autosimilarité de  $Z$  :

- On doit forcément avoir  $Z_0 = 0$  dès que  $H > 0$ .
- Pour un processus stationnaire, l'autosimilarité n'est possible que si  $H = 0$  ; ce ne sera pas un cadre très intéressant. Une hypothèse plus porteuse sera de considérer  $Z$  à accroissements stationnaires.
- Un processus autosimilaire à accroissements stationnaires possédant un moment d'ordre supérieur ou égal à 1 vérifiera  $H \in [0, 1]$ .

PROPRIÉTÉ 1.1. — Si  $Z$  est un processus d'ordre 2,  $H$ -autosimilaire et à accroissements stationnaires, alors, pour tout  $(s, t) \in T^2$  :

$$\mathbb{E}(Z_t - Z_s)^2 = \mathbb{E}(Z_1^2) |t - s|^{2H} \text{ et } \mathbb{E} Z_t Z_s = \frac{\mathbb{E}(Z_1^2)}{2} (|t|^{2H} + |s|^{2H} - |t - s|^{2H}).$$

En conséquence, lorsque  $H \in ]0.5, 1[$ , le processus  $X = \{X_t, t \in T\}$  tel que  $X_t = Z_{t+1} - Z_t$ , est un processus stationnaire longue-mémoire car

$$\mathbb{E} X_k X_0 \sim H(2H - 1) \mathbb{E}(Z_1^2) . k^{2H-2} \text{ pour } k \rightarrow \infty.$$

LES COURS D'ACTIFS FINANCIERS SONT-ILS AUTOSIMILAIRES ?

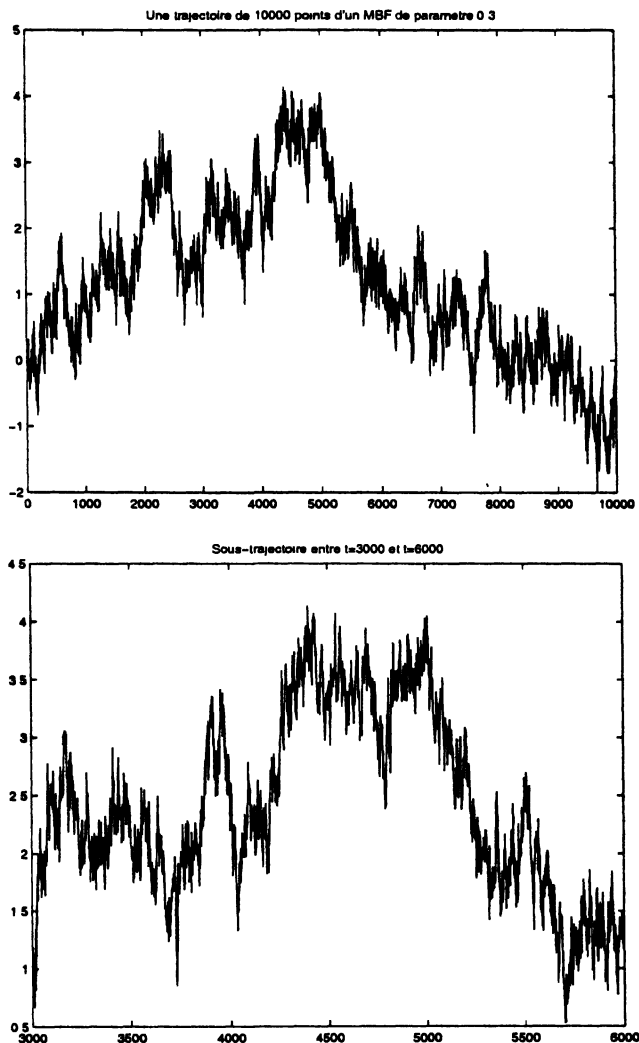


FIG 1. — Mise en évidence de la propriété d'autosimilarité pour la trajectoire d'un mouvement brownien fractionnaire de paramètre  $H = 0.3$

Nous nous intéressons maintenant aux processus gaussiens. La définition ci-dessous va être essentielle pour les sections suivantes :

DÉFINITION 1.3. — Si  $Z = \{Z_t, t \in \mathbb{R}_+\}$  est un processus gaussien centré ( $Z_0 = 0$  p.s.) à accroissements stationnaires et  $H$ -autosimilaire ( $0 < H < 1$ ) alors  $Z$  est un mouvement brownien fractionnaire, c'est-à-dire qu'il existe  $\sigma^2 > 0$  tel que pour  $(s, t) \in \mathbb{R}_+^2$ ,

$$\mathbb{E}Z_t Z_s = \frac{\sigma^2}{2} (|t|^{2H} + |s|^{2H} - |t - s|^{2H}) \text{ pour } (s, t) \in \mathbb{R}_+^2.$$

Énonçons juste les deux éléments suivants dans le cas où  $Z$  est un mouvement brownien fractionnaire :

1.  $X_t = Z_{t+1} - Z_t$  est appelé un bruit gaussien fractionnaire (processus longue mémoire si  $H > 1/2$ ).
2. La dimension de Hausdorff (souvent appelée dimension fractale) du graphe  $Gr(Z) = \{(t, Z_t), t \in \mathbb{R}_+^2\}$  de  $Z$  de  $Gr(x)$  est  $2 - H \in ]1, 2[$ . On retrouve là le fait que plus  $H$  est proche de 0, plus les trajectoires de  $Z$  sont « irrégulières » et « remplissent » le plan.

Les figures 1 et 2 présentent des trajectoires de mouvements browniens fractionnaires avec  $H = 0.3$  et  $H = 0.6$  (on remarque que plus  $H$  est grand, plus la trajectoire est régulière).

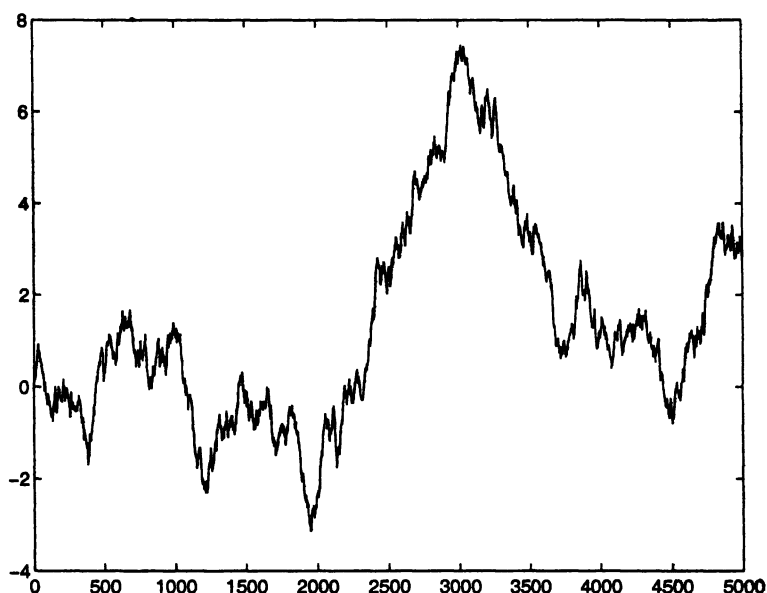


FIG 2. — Exemple de graphe de la trajectoire d'un mouvement brownien fractionnaire pour  $N = 5000$  et  $H = 0.6$

REMARQUE 1.1. — *L'ensemble des processus autosimilaires ne se réduit évidemment pas aux mouvements browniens fractionnaires. Par exemple, les processus de Rosenblatt d'ordre  $m \in \mathbb{N}^*$  (voir Taqqu, 1979), définis par :*

$$Z_{m,H}(t) = \int_{\mathbb{R}^m} \frac{e^{it(u_1 + \dots + u_m)} - 1}{i(u_1 + \dots + u_m)} |u_1 u_2 \dots u_m|^{(H-1)/2} \widehat{dB}(u_1) \dots \widehat{dB}(u_m),$$

où  $dB$  est une mesure brownienne et  $\widehat{dB}$  sa transformée de Fourier, sont des processus ayant un moment d'ordre 2,  $mH$ -autosimilaires avec  $mH < 1$ , à

*accroissements stationnaires et non gaussiens pour  $m \geq 2$  (pour  $m = 1$ , on retrouve le mouvement brownien fractionnaire). On peut aussi citer certains processus  $\alpha$ -stables qui eux n'ont pas de moments d'ordre 2 (voir encore Samorodnitsky et Taqqu, 1994).*

Nous nous proposons comme objectif de considérer la trajectoire d'une série chronologique  $X = (X_0, X_1, \dots, X_N)$ , que l'on supposera gaussienne et à accroissements stationnaires, et de tester si cette série est autosimilaire au moins pour un certain nombre d'échelles déterminées. Pour ce faire, nous allons suivre la méthode suivante :

1. Choisir des échelles  $(n_1, \dots, n_m) \in \mathbb{N}^m$  distinctes.
2. Définir une distance entre  $X$  et un ensemble  $E$  contenant toutes les séries chronologiques autosimilaires pour les échelles  $(n_1, \dots, n_m)$ .
3. Déterminer la projection de  $X$  sur cet ensemble  $E$ , ce qui revient à estimer  $H$  et  $\sigma^2$ .
4. Déterminer la distribution asymptotique de la distance entre  $X$  et l'ensemble  $E$ .

## COMMENT TESTER L'AUTOSIMILARITÉ ?

Dans toute la suite, nous allons partir de l'hypothèse suivante :

**Hypothèse (H) :**  $X = (X_0, X_1, \dots)$  est une série chronologique gaussienne, centrée et à accroissements stationnaires.

Par ailleurs, nous supposons connue une trajectoire  $(X_0, X_1, \dots, X_N)$  avec  $X_0 = 0$  et  $N$  grand. Précisons maintenant l'idée générale du test proposé, dont on trouvera les détails dans Bardet (2000). La propriété centrale sur laquelle va s'appuyer le test est la suivante :

Si  $X$  est autosimilaire pour les échelles  $n_1, \dots, n_m$  alors, pour tout  $i = 1, 2, \dots, m$ ,

$$\text{var}(X_{n_i}) = (n_i)^{2H} \mathbb{E}(X_1^2) \text{ soit } \log[\text{var}(X_{n_i})] = 2H \log n_i + K \text{ avec } K \in \mathbb{R}.$$

On obtient ainsi un modèle linéaire lorsqu'il existe un estimateur de  $\log[\text{var}(X_{n_i})]$  pour chaque  $n_i$ . Une régression de ces estimateurs sur les  $\log n_i$  permet d'obtenir une estimation de  $H$  et de  $K$ . Il est ensuite possible de faire une seconde régression par moindres carrés généralisés du fait que l'on connaît la distribution asymptotique des estimateurs de  $\log[\text{var}(X_{n_i})]$ . Enfin, une distance entre les points de régression et la droite de régression généralisée permet de savoir si le modèle initial était bien autosimilaire pour les échelles  $n_1, \dots, n_m$ .

L'idée générale est bien la précédente, mais l'estimateur naturel de  $\log[\text{var}(X_{n_i})]$  ne vérifie plus une convergence de type théorème de limite centrale lorsque  $H \geq 3/4$ , ce qui pénalise grandement le test. On préfère alors utiliser des variations quadratiques d'ordre 2, introduites par Guyon et León (1989) et

développées par Istas et Lang (1997), qui vont éviter cette dichotomie en permettant d'établir un théorème de limite centrale pour tout  $H \in ]0, 1[$ . Plus précisément, on considère pour tout  $i = 1, 2, \dots, m$ , et pour tout  $j = 0, 1, \dots, [N/n_i] - 1$  :

$$U_{n_i}(j) = X_{n_i(j+1)} - 2X_{n_i j} + X_{n_i(j-1)},$$

qui forme le processus des différences finies d'ordre 2 issu de  $X$  pour l'échelle  $n_i$ . On vérifie alors que si  $X$  est autosimilaire pour l'échelle  $n_i$ , il en est de même, et de façon déterministe, pour la variance des  $U_{n_i}(j)$  :

$$\forall j \in \{0, 1, \dots, [N/n_i] - 1\}, \quad \text{var}(U_{n_i}(j)) = [\mathbb{E}(X_1^2) \cdot (4 - 2^{2H})] n_i^{2H}.$$

Par la suite, nous noterons  $K = \log[\mathbb{E}(X_1^2) \cdot (4 - 2^{2H})]$ . On va donc pouvoir utiliser une procédure de test identique à celle présentée ci-dessus en utilisant, mutatis mutandis, des estimateurs de  $\text{var}(U_{n_i}(j))$ . On définit ainsi pour  $i = 1, 2, \dots, m$  :

$$S_N(n_i) = \frac{1}{[N/n_i]} \sum_{k=0}^{[N/n_i]-1} U_{n_i}^2(k).$$

On obtient ainsi le théorème de la limite centrale multidimensionnel suivant (voir la preuve dans Bardet, 2000) :

PROPOSITION 1.2. — *Sous l'hypothèse (H) et si  $X$  est autosimilaire pour les échelles  $(n_1, \dots, n_m)$ ,*

$$\sqrt{N} (\log S_N(n_i) - 2H \log n_i - K)_{1 \leq i \leq m} \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}_m(0; F)$$

avec, en notant  $(u_1, u_2, u_3) = (1, -2, 1)$  et  $d_{ij} = \text{PGCD}(n_i, n_j)$ ,

$$f_{ij} = \frac{d_{ij} n_i^{-2} n_j^{-2}}{2(4 - 2^{2H})^2} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \left( \sum_{k=1}^3 \sum_{k'=1}^3 u_k u_{k'} |n_i k - n_j k' + l d_{ij}|^{2H} \right)^2.$$

Remarquons que la matrice  $F$  est une matrice de forme explicite qui ne dépend que de  $H$  et des échelles  $n_1, \dots, n_m$ . Ainsi, si on a un estimateur convergent  $\hat{H}(N)$  de  $H$ , on montre que l'on obtient un estimateur convergent de  $F$  en remplaçant  $H$  par  $\hat{H}(N)$  dans son expression.

La proposition 2.1 nous permet d'obtenir la projection de  $X$  sur l'ensemble  $E$  par rapport à une première distance, à l'aide d'une régression par moindres carrés. Ainsi, on note

- $S_N = (\log S_N(n_i))_{1 \leq i \leq m}$
- $P_N(H, K) = (2H \log n_i + K)_{1 \leq i \leq m}$
- Pour  $Y$  et  $Z$  dans  $\mathbb{R}^m$ , on considère la distance :

$$\|Y - Z\|_e^2 = {}^t(Y - Z)(Y - Z).$$

On définit  $(\widehat{H}_1(N), \widehat{K}_1(N))$  le paramètre minimisant  $\|S_N - P_N(H, K)\|_e^2$ . On montre alors (voir la preuve dans Bardet, 2000) :

PROPOSITION 2.2. — *Sous les hypothèses précédentes, il existe  $\sigma_1^2 > 0$  tel que :*

$$\sqrt{N}(\widehat{H}_1(N) - H) \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0; \sigma_1^2).$$

Considérons donc  $\widehat{F}_1(N)$  l'estimation de la matrice  $F$  obtenue en remplaçant  $H$  par  $\widehat{H}_1(N)$  dans son expression. Pour  $Y$  et  $Z$  dans  $\mathbb{R}^m$ , on définit la distance :

$$\|Y - Z\|_{\widehat{F}_1(N)}^2 = {}^t(Y - Z)\widehat{F}_1(N)^{-1}(Y - Z).$$

On définit alors  $(\widehat{H}_2(N), \widehat{K}_2(N))$  le paramètre minimisant

$$\|S_N - P_N(H, K)\|_{\widehat{F}_1(N)}^2.$$

On montre alors (voir la preuve dans Bardet, 2000) :

PROPOSITION 2.3. — *Sous les hypothèses précédentes :*

$$\sqrt{N}(\widehat{H}_2(N) - H) \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0; \sigma_2^2) \quad \text{et} \quad \sigma_2^2 \leq \sigma_1^2.$$

Ainsi, ce second estimateur de  $H$  converge plus vite que le premier; des simulations montrent qu'il est effectivement plus intéressant et que sa vitesse de convergence est proche de celle obtenue avec un estimateur paramétrique de type maximum de vraisemblance avec approximation de Whittle (voir Bardet, 2000).

On obtient surtout, grâce à ce second estimateur, le test d'autosimilarité issu de la proposition suivante (voir la preuve dans Bardet, 2000) :

PROPOSITION 2.4. — *Sous les hypothèses précédentes :*

$$T(N) = N \|S_N - P_N(\widehat{H}_2(N), \widehat{K}_2(N))\|_{\widehat{F}_1(N)}^2 \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} \chi^2(m-2).$$

La procédure de test est donc la suivante :

1. On choisit des échelles  $(n_1, \dots, n_m)$  (pour des raisons pratiques, on choisira par exemple  $n_i = i\tau$  pour  $i = 1, 2, \dots, m$ , avec  $\tau \in \mathbb{N}^*$ ).
2. On calcule les  $S_N(n_i)$  pour  $i = 1, 2, \dots, m$ , et on en déduit  $\widehat{H}_1(N)$ .
3. On calcule  $\widehat{F}_1(N)$  en remplaçant  $H$  par  $\widehat{H}_1(N)$  dans l'expression de  $F$  et en tronquant les séries infinies. On en déduit  $\widehat{H}_2(N)$ .
4. On calcule alors  $T(N)$ . Lorsque  $T(N)$  est inférieure au quantile d'ordre 0.95 d'une loi du  $\chi^2$  à  $(m - 2)$  degrés de liberté, on accepte l'hypothèse  $(H_0)$  : «  $X$  est autosimilaire pour les échelles  $(n_1, \dots, n_m)$  ».



On peut remarquer que la vitesse de rejet du test est en  $N$  et que si l'on rejette l'hypothèse ( $H_0$ ), alors on décidera que  $X$  n'est pas autosimilaire. En particulier, le rejet de ( $H_0$ ) conduit à la non-légitimité d'une modélisation de  $X$  par un mouvement brownien fractionnaire discrétisé.

### 3. APPLICATION AU COURS D'ACTIFS FINANCIERS

On modélise souvent le cours d'actifs financiers à l'aide de diffusions issues d'un mouvement brownien. Nous avons voulu tester l'autosimilarité de la trajectoire d'un actif particulier (AGF) durant le mois de janvier 1997. Sur la figure 3 est représenté le cours de l'action toutes les minutes, sachant que la cotation a lieu à la Bourse de Paris de 9h00 à 17h00 du lundi au vendredi ; on observe la stationnarité de la cotation durant les samedis et dimanches, ainsi qu'un saut chaque début de séance (à 9h00), qui s'explique par les mouvements qui ont pu avoir lieu dans des bourses étrangères durant la nuit.

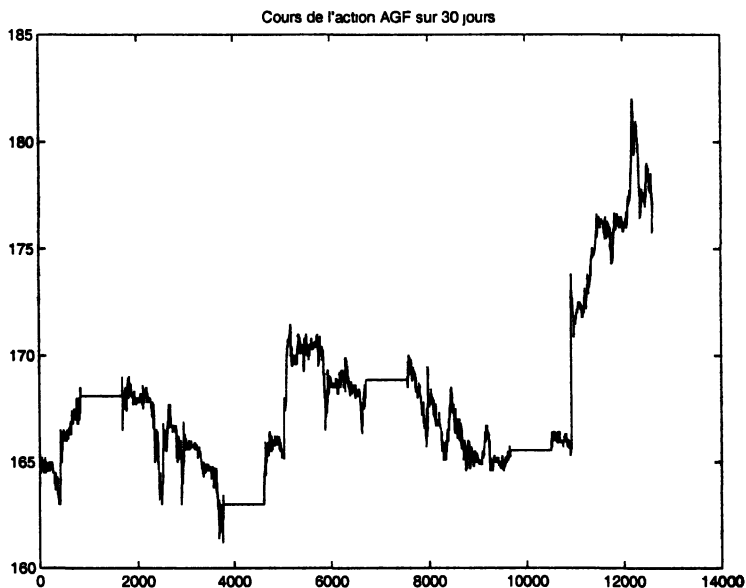


FIG 3. — Cotation chaque minute entre 9h00 et 17h00 de l'action AGF à la Bourse de Paris, chaque jour du mois de janvier 1997

Une première tâche, pour permettre l'analyse de cette série avec nos outils, a été de supprimer les discontinuités qui ne nous semblent pas essentielles à la dynamique propre de cet actif : on a ainsi supprimé les fins de semaine, et «raccordé» le début d'une séance à la fin de la séance précédente. On obtient ainsi les  $9240=420*22$  données de la figure 4 (en haut). Pour comparer les comportements hautes et basses fréquences, on présente 420 minutes d'une journée de la trajectoire (figure 4, en bas).

## LES COURS D'ACTIFS FINANCIERS SONT-ILS AUTOSIMILAIRES ?

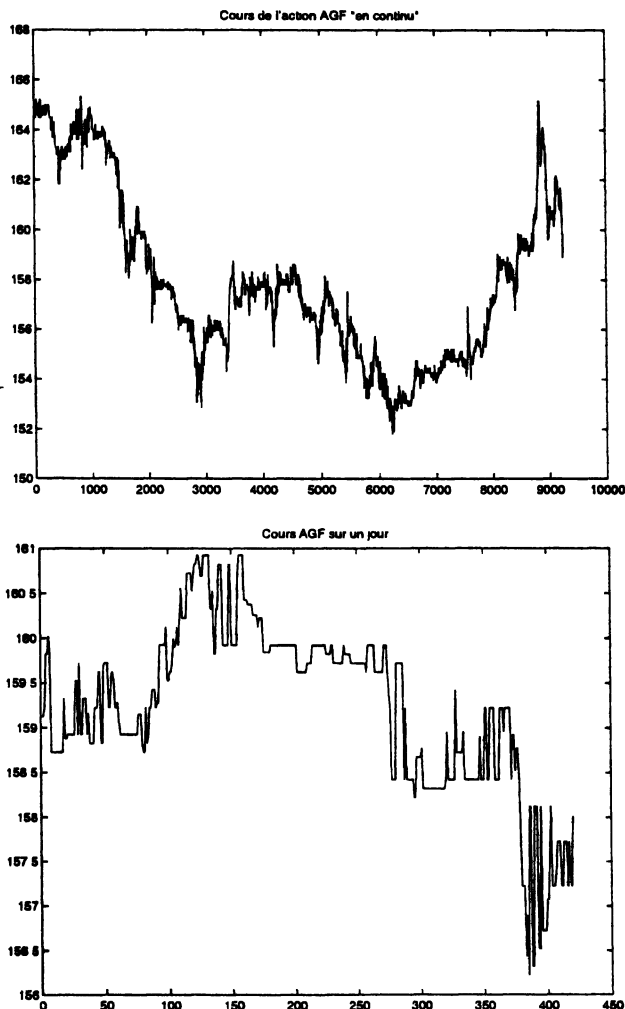


FIG 4. — En haut : cotation «en continu» de l'action AGF à la Bourse de Paris, chaque jour du mois de janvier 1997; en bas : cotation pendant 420 minutes de la même action

Nous avons appliqué le test aux 9240 données du modèle «continu». Nous avons observé les résultats suivants :

- L'estimation paramétrique de  $H$  (en supposant que le modèle est un mouvement brownien fractionnaire) à l'aide d'une approximation de Whittle de la vraisemblance est de 0.32 (à 0.01 près).
- Si on choisit pour échelles  $n_i = i$  pour  $i = 1, 2, \dots, m$  (pas de rééchantillonnage), le test rejette l'hypothèse ( $H_0$ ) quelque soit  $m$ .

- Si on choisit pour échelles  $n_i = 2^i$  pour  $i = 1, 2, \dots, 6$  (rééchantillonnage de pas 2mn), le test valide l'hypothèse (H0), avec une estimation de  $H$  proche de 0.27. En revanche, l'hypothèse (H0) est rejetée si on choisit les échelles  $n_i = 2^i$  pour  $i = 1, 2, \dots, m$  et  $m \geq 8$ . On a quasiment les mêmes résultats avec un pas d'échantillonnage de 3mn.
- L'hypothèse (H0) est à nouveau validée avec un rééchantillonnage de pas 20mn (les échelles sont  $n_i = 20^i$  pour  $i = 1, 2, \dots, 6$ ), avec une estimation de  $H$  proche de 0.45.

Plus précisément, on peut mettre en avant deux types de comportement : pour un pas de rééchantillonnage petit (2 ou 3 mn), c'est-à-dire en hautes fréquences, le processus est autosimilaire avec  $H \simeq 0.25$ , ce qui caractérise une forte irrégularité. Pour le comportement de type moyennes ou basses fréquences (avec un pas de rééchantillonnage de 12 à 60 mn), le processus est autosimilaire avec  $H \simeq 0.45$ . Le processus est alors très proche du mouvement brownien simple pour lequel  $H = 0.5$ , qui est le plus souvent utilisé pour modéliser de telles séries financières (en raison de l'hypothèse d'efficience du marché). Notons, par ailleurs, que les différentes estimations de  $H$  restent inférieures à 0.5, ce qui tendrait à rejeter un comportement de type longuemémoire des accroissements de la série (qui correspondent grossièrement aux rendements de la série). On peut illustrer le comportement fréquentiel de la série avec plus de détails, en représentant les valeurs estimées de  $H$  lorsque l'hypothèse (H0) est acceptée, pour des pas de rééchantillonnage de 1 à 30 mn, et un nombre d'échelles fixé à 6 (voir figure 5).

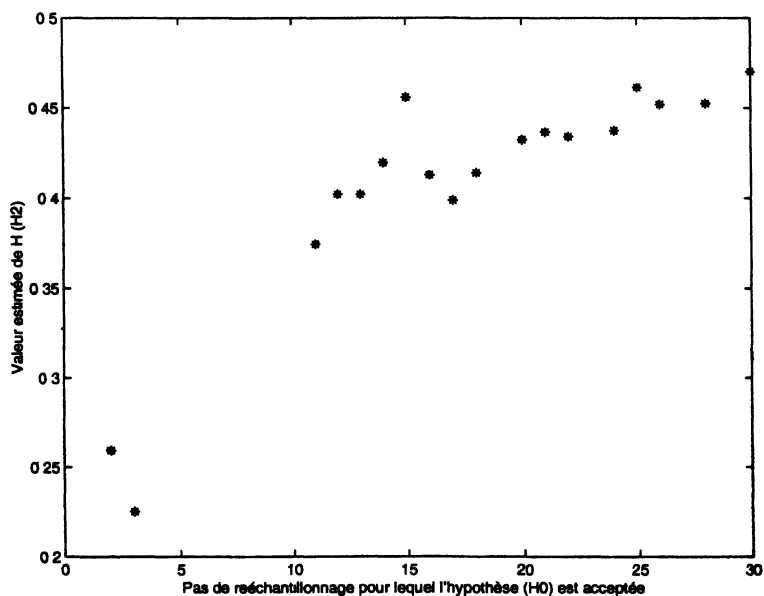


FIG 5. — Valeur estimée de  $H$  lorsque le pas de rééchantillonnage est tel que l'hypothèse d'autosimilarité est acceptée

La réponse à la question posée, à savoir «les cours d'un actif financier sont-ils autosimilaires?» est clairement non (en tout cas pour l'action AGF en janvier 1997, mais les autres valeurs testées amènent à la même conclusion). Cependant, il apparaît une autosimilarité locale en fréquence, avec une régularité du processus dépendant de la fréquence. On peut apporter une justification à la modélisation par un mouvement brownien fractionnaire de telles séries financières. En effet, en suivant une démarche proposée par Taqqu *et al.* (1997), on sait que l'agrégation d'un grand nombre de processus de renouvellement indépendants pendant un temps long se comporte soit comme un mouvement brownien, soit comme un mouvement brownien fractionnaire (suivant les hypothèses faites sur les queues des processus de renouvellement). Si on modélise le comportement de chaque agent financier par la succession de deux processus de renouvellement Achat/Vente, la somme de tels comportements peut s'approcher d'un mouvement brownien lorsque l'on regarde sur une grande échelle de temps. Un modèle possible qui possède le double comportement fréquentiel est le mouvement brownien fractionnaire multi-échelle, introduit par Benassi et Deguy (1999) (on trouvera une autre présentation sous forme de moyenne mobile dans Rogers, 1997). L'idée est de reprendre l'écriture harmonique du mouvement brownien fractionnaire et de travailler non pas avec  $H$  constant mais avec  $H$  dépendant de la fréquence  $\lambda$ . Plus concrètement, nous proposons le modèle à temps continu suivant :

$$X(t) = c \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{it\lambda} - 1}{\lambda^{H(\lambda)+1/2}} \widehat{W}(d\lambda), \quad (3)$$

pour  $t \in \mathbb{R}_+$ ,  $c > 0$ , avec  $\widehat{W}$  la transformée de Fourier d'une mesure brownienne et avec  $H(\lambda)$  la fonction en escalier telle que :

$$\begin{aligned} H(\lambda) &= 0.25 \quad \text{lorsque } \lambda > 0.1 \\ H(\lambda) &= 0.45 \quad \text{lorsque } \lambda \leq 0.1 \end{aligned}$$

(les fréquences sont données en  $mn^{-1}$ ). En fait, il est possible de travailler avec une fonction  $H$  beaucoup plus générale et avec une constante  $c$  dépendant aussi de la fréquence (voir Benassi et Deguy, 1999, qui proposent aussi une autre représentation obtenue à l'aide d'ondelettes).

Ce type de modèle a l'avantage de prendre en compte les deux «régimes» d'irrégularités de la série chronologique et de n'utiliser que 3 (ou 4) paramètres. Cependant, à hautes fréquences, ce modèle a ses limites car la série est clairement non gaussienne. En effet, en prenant un échantillonnage de pas constant de une minute, le phénomène de «bid and ask», se concrétisant par un processus de sauts autour d'une valeur explique que l'on ne peut s'attendre à obtenir des accroissements gaussiens. En revanche, lorsque l'on considère un pas d'échantillonnage beaucoup plus grand, ces effets sont moyennés, et l'hypothèse gaussienne est beaucoup plus légitime (même si une étude plus approfondie montre qu'une distribution à queue plus lourde serait plus adéquate, voir par exemple, Mandelbrot, 1997). Ainsi, si à hautes fréquences, une modélisation gaussienne ne peut consister qu'en une grossière approximation traduisant seulement l'irrégularité du processus, à basses fréquences, une telle modélisation est beaucoup plus justifiée.

## RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [1] BARDET, J.M. [2000]. Testing for the presence of self-similarity of Gaussian time series having stationary increments. *J. Time Ser. Anal.* 21, 497-516.
- [2] BENASSI, A. et DEGUY, S. [1999] Multiscale fractional Brownian motion : definition and identification. Prépublication LLAIC.
- [3] BERAN, J [1994]. *Statistics for long memory processes*. Monographs on Statist. and Appl. Probab. 61. Chapman & Hall, 315 p.
- [4] DOBRUSHIN, R.L. et MAJOR, P. [1979] Non-central limit theorems for nonlinear functionals of Gaussian fields. *Z. Wahrsch. Verw. Gebiete* 50 27-52.
- [5] HURST, H.E. [1953] Long term storage capacity of reservoirs. *Transactions of the American Society of Civil Engineers* 116, 770-779.
- [6] GUYON, X. et LEÓN, J. [1989]. Convergence en loi des H- variations d'un processus gaussien stationnaire. *Ann. Inst. Poincaré* 25, 265-282.
- [7] ISTAS, J. et LANG, G. [1997]. Quadratic variations and estimation of the local Hölder index of a Gaussian process. *Ann. Inst. Poincaré* 33, 407-436.
- [8] JULIA, G. [1918]. Sur l'itération des fonctions rationnelles. *J. Math. Pure Appl.* 8, 47-245.
- [9] KOLMOGOROV, A.N. [1940]. Wiener'sche Spiralen und einige andere interessante Kurven in Hilbert'schen Raum. *Doklady* 26, 115-118.
- [10] MAJOR, P. [1982]. On renormalization Gaussian fields. *Z. Wahrsch. Verw. Gebiete* 59, 515-533.
- [11] MANDELBROT, B. B. [1997] *Fractals and scaling in finance. Discontinuity, concentration, risk*. Selecta Volume E. Springer-Verlag, New York.
- [12] ROGERS, L. [1997]. Arbitrage with fractional Brownian motion. *Math. Finance* 7, 1-14.
- [13] SAMORODNITSKY, G. et TAQQU, M.S. [1994]. *Stable non- Gaussian random processes*. Stochastic modeling. Chapman & Hall, 636 p.
- [14] TAQQU, M.S. [1979]. Convergence of integrated processes of arbitrary Hermite rank. *Z. Wahrsch. Verw. Gebiete* 50, 53-83.
- [15] TAQQU, M.S., WILLINGER W., SHERMAN R. [1997]. Proof of a fundamental result in self-similar traffic modeling. *Computer Comm. Rev.*, 27, 5-23.