JOURNAL DE LA SOCIÉTÉ FRANÇAISE DE STATISTIQUE

B. TRUONG-VAN

La mémoire longue en économie : discussion et commentaires

Journal de la société française de statistique, tome 140, nº 2 (1999), p. 97-102

<http://www.numdam.org/item?id=JSFS_1999__140_2_97_0>

LA MÉMOIRE LONGUE EN ÉCONOMIE : DISCUSSION ET COMMENTAIRES

B. TRUONG-VAN *

Le sujet abordé par les auteurs est fort intéressant, combinant de façon équilibrée la présentation sur la longue mémoire et ses applications à l'économétrie. Les auteurs donnent une revue complète sur les modèles de longue mémoire, allant du bruit gaussien fractionnaire à l'ARFIMA et ses extensions GARMA, ARFIMA saisonniers, FIGARCH, et vont même au delà, puisqu'ils abordent des liens de ces modèles avec les processus VAR et la co-intégration. Dans ce commentaire, nous proposons quelques compléments sur une comparaison entre bruit gausssien fractionnaire et processus ARFIMA ainsi que sur quelques analyses statistiques faites par les auteurs. Le complément sur le bruit gaussien fractionnaire nous permet d'attirer l'attention sur une technique utilisée en traitement du signal pour une détection exploratoire de la longue mémoire dans une série temporelle.

1. UNE COMPARAISON ENTRE BRUIT GAUSSIEN FRACTIONNAIRE ET PROCESSUS ARFIMA

Mandelbrot (1965) proposa comme modèle de longue mémoire, le mouvement brownien fractionnaire qui dérive de processus étudiés auparavent par Kolmogorov (1940), Hunt (1951), Lévy (1953), Yaglom (1958), Lamperti (1962), et d'autres. La définition du mouvement brownien fractionnaire B_H retenue dans Mandelbrot diffère de celle donnée dans Lardic & Mignon, et s'exprime sous la forme

$$B_H(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi_t(u) dB(u)$$

avec $B_H(0) = 0$ et où B est un mouvement brownien standard, I_A désigne la fonction d'indicatrice d'un ensemble A et

$$\phi_t(u) = \frac{1}{\Gamma(H+1/2)} \{ |t-u|^{H-1/2} I_{]-\infty,t]}(u) - |u|^{H-1/2} I_{]-\infty,0]}(u) \}.$$

* Laboratoire de Statistique et Probabilités, Université Paul Sabatier, 118 route de Narbonne, 31062 Toulouse, France
email truong@gmm insa tlse fr

Le mouvement brownien fractionnaire B_H n'est défini que pour $0 < H < 1$ et est un processus centré satisfaisant à la relation

$$E\{B_H(t) - B_H(s)\}^2 = \frac{V_H}{2}|t-s|^{2H}$$

où

$$V_H = \frac{1}{\Gamma(2H+1)\sin(\pi H)} = -\frac{\Gamma(2-2H)\cos(\pi H)}{\pi H(2H-1)}.$$

Pour $0 < H < 1$, via l'isomorphisme de Kolmogorov-Cramér, B_H a la représentation spectrale suivante :

$$B_H(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}\phi_t(\lambda)dZ(\lambda) \tag{1}$$

où Z est un mouvement brownien dans le domaine fréquentiel et où la transformée de Fourier (au sens des distributions) $\mathcal{F}\phi_t(\lambda)$ de ϕ_t a pour expression

$$\mathcal{F}\phi_t(\lambda) = \frac{e^{-\imath t\lambda}-1}{|\lambda|^{H+1/2}}\{i\frac{\pi}{2}(H+\frac{1}{2})sgn(\lambda)\}.$$

Sous la forme (1), B_H est aussi appelé hélice de Schoenberg (cf. Kolmogorov (1940), Kahane (1985)).

L'existence de mouvement brownien fractionnaire permet de déduire celle de processus gaussien de longue mémoire, souvent appelé bruit gaussien fractionnaire (cf. Mandelbrot & Van Ness (1968), Barton & Poor (1988)) : La dérivée B'_H du mouvement brownien fractionnaire au sens des distributions (car B_H est non-différentiable presque sûrement) est un processus gaussien à temps continu, centré stationnaire ayant pour densité spectrale

$$S_H(\lambda) = \frac{1}{|\lambda|^{2H-1}}, -\infty < \lambda < \infty.$$

Au lieu de la dérivée B'_H, on pourrait se contenter du processus $b_{H,\delta}$ des taux d'accroissement $b_{H,\delta}(t) = \dfrac{B_H(t+\delta) - B_H(t)}{\delta}, t \in \mathbb{R}$. La densité spectrale de $b_{H,\delta}$ est

$$S_{H,\delta}(\lambda) = \frac{4\sin^2(\lambda\delta/2)}{\delta^2|\lambda|^{2H+1}}, -\infty < \lambda < \infty.$$

Si on ne s'intéresse qu'aux modèles à temps discret, on pourra considérer pour un pas de discrétisation Δ, le processus gaussien stationnaire discrétisé $(b_{H,\delta,\Delta}(k) = b_{H,\delta}(k\Delta), k \in \mathbb{Z})$ qui a pour densité spectrale

$$S_{H,\delta,\Delta}(\lambda) = \frac{4\Delta^{2H}}{\delta^2}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\frac{\sin^2\{(\lambda/2+m\pi)\delta/\Delta\}}{|\lambda+2m\pi|^{2H+1}}, -\pi < \lambda \leqslant \pi.$$

En particulier, pour $\delta = \Delta$, on a pour $-\pi < \lambda \leqslant \pi$,

$$S_{H,\delta,\delta}(\lambda) = 4\delta^{2H-2}\sin(\frac{\lambda}{2}) \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{1}{|\lambda + 2m\pi|^{2H+1}} \tag{2}$$

ou encore

$$S_{H,\delta,\delta}(\lambda) = 4\sin^2(\frac{\lambda}{2})\{\frac{1}{|\lambda|^{2H+1}} + \frac{(2\pi)^{-2H-1}}{\Gamma(2H+1)} \int_0^{\infty} u^{2H} e^{-u/2} \frac{ch(\lambda u/2\pi)}{sh(u/2)} du\}.$$

Pour les preuves des résultats précédents ainsi que des compléments, le lecteur peut se référer à Truong-van & Drouilhet (1992a).

Comparée à (2), la densité spectrale $S_d(\lambda)$ d'un processus ARFIMA(0,d,0), pour $|d| < 1/2$, paraît plus adaptée aux modèles de longue mémoire à temps discret, puisque l'on a

$$S_d(\lambda) = |\sin\lambda|^{-2d}, -\pi < \lambda \leqslant \pi.$$

Bien que pour des fréquences λ proches de 0, on ait $S_{H,1,1}(\lambda) \approx |\lambda|^{-2H+1}$ et $S_d(\lambda) \approx |\lambda|^{-2d}$ (au lieu de $\lim_{\lambda \to 0} S_d(\lambda) = \lambda^{-2d}$ comme il est écrit dans le texte de Lardic & Mignon), on n'a pas à proprement parler l'égalité $d = H - 1/2$ mais une équivalence entre d et $H - 1/2$ seulement pour des fréquences voisines de zéro. En dehors de celles-ci, les densités spectrales $S_{H,1,1}$ et S_d peuvent avoir des comportements différents.

Au vu des différentes expressions des densités spectrales de modèles de longue mémoire, ne serait-il pas souhaitable de considérer comme modèle synthétique pour la longue dépendance, un processus stationnaire centré dont la densité spectrale se comporte en $|\lambda|^{1-2H}$ pour des fréquences voisines de zéro ?

2. SUR QUELQUES ANALYSES STATISTIQUES DE LA LONGUE MÉMOIRE

On peut classer les techniques statistiques pour identifier la mémoire longue en deux catégories selon qu'elles permettent une analyse exploratoire ou confirmatoire.

1) Parmi les outils d'analyse exploratoire, Lardic & Mignon utilisent le corrélogramme empirique $\widehat{\rho}(k), k = 1, ..., K$ et la statistique R/S :

Des précautions ne seraient-elles pas à prendre dans certaines conclusions que les auteurs ont retenues sur la présence ou l'absence de la longue mémoire en se fondant uniquement sur l'inspection du corrélogramme empirique ?

En effet, l'utilisation de ce dernier pour des modèles de longue mémoire soulève deux points majeurs suivants :

(i) Pour pouvoir détecter une décroissance hyperbolique des corrélations, il faudrait observer le corrélogramme empirique sur un long intervalle i.e. pour un nombre K relativement grand. Or le biais des autocorrélations empiriques $\widehat{\rho}(k)$ augmente avec k.

(ii) Supposons que la formule de Barlett établie pour des processus linéaires stationnaires à mémoire courte soit encore valable pour des modèles linéaires à longue portée, alors on peut en déduire, d'une part que la variance des $\widehat{\rho}(k)$ est bien plus grande pour des processus de mémoire longue que pour ceux de mémoire courte et d'autre part que les $\widehat{\rho}(k)$ sont corrélés entre eux, ceci rend délicate l'interprétation du corrélogramme empirique, même si, de façon heuristique, on peut penser que les $\widehat{\rho}(k)$ sont d'autant plus fortement corrélés que la mémoire du modèle est plus longue.

Nous rangeons la statistique $\frac{R}{S}$ dans les outils exploratoires car à notre connaissance, il n'y a actuellement aucun résultat sur la convergence en loi de cette statistique. En effet, pour une série temporelle $(x_t, t = 1, ..., T)$, la relation $\frac{R}{S} \approx T^H$, appelée loi de Hurst par certains auteurs, n'a été établie pour T suffisamment grand que de façon empirique par Hurst (1951). Par ailleurs, Mandelbrot (1965) montra que les accroissements du mouvement brownien fractionnaire sont auto-similaires, c'est à dire que pour tout t_0 arbitraire fixé, les deux processus $(B_H(t_0+T\tau) - B_H(t_0), \tau \in \mathbb{R})$ et $(2^{-1/2}T^H B_H(\tau), \tau \in \mathbb{R})$ ont la même distribution de probabilités. Ce résultat de Mandelbrot ne donne qu'une justification incomplète de la loi de Hurst pour le mouvement brownien fractionnaire.

Lardic & Mignon ont obtenu à partir de la statistique R/S des estimations du paramètre d de la longue dépendance pour certaines séries. Une question que l'on peut se poser est de savoir si les processus ARFIMA vérifient la loi de Hurst.

Comme en hydrologie, les modèles de mémoire longue sont aussi très étudiés dans le traitement du signal pour modéliser le bruit de scintillement, appelé souvent bruit de flicker, dans certaines composantes électroniques, en particulier dans les oscillateurs ultra-stables (OUS). L'outil utilisé ici pour la détection de la longue mémoire est formé des variances $\sigma^2_{Allan}(\delta)$ dites d'Allan pour différents pas δ. Nous donnons ci-dessous une adaptation de la définition originelle de la variance d'Allan au cas où le mouvement brownien fractionnaire représente les instabilités relatives en fréquence d'un OUS. Pour plus amples détails, nous référons le lecteur à Allan (1966), Rutman (1978), Truong-van & Drouilhet (1992b).

La variance $\sigma^2_{Allan}(\delta)$ d'Allan pour le mouvement brownien fractionnaire B_H est

$$\sigma^2_{Allan}(\delta) = \frac{1}{2}E\{b_{H,\delta}(2\delta) - b_{H,\delta}(\delta)\}^2 = \frac{1}{2}Var\{b_{H,\delta}(2\delta) - b_{H,\delta}(\delta)\},$$

ou de façon équivalente,

$$\sigma^2_{Allan}(\delta) = 2\int_{-\infty}^{\infty} \sin^2(\delta\lambda/2) S_{H,\delta}(\lambda) d\lambda. \tag{3}$$

Il s'ensuit de la relation (3) que l'on a

$$\sigma^2_{Allan}(\delta) = c_0 \delta^{2H-2} \tag{4}$$

où c_0 est une constante.

Rutman (1978) affirma que si la densité spectrale $S_{H,\delta}(\lambda) = c_1|\lambda|^{-1} I_{[0,\lambda_c]}(\lambda)$, où λ_c est une fréquence de coupure et c_1 est une constante, alors

$$\sigma^2_{Allan}(\delta) = c_1(2\log 2).$$

Cette invariance de $\sigma^2_{Allan}(\delta)$ par rapport à δ, est appelée le palier de flicker. Certes, sur le plan théorique, il n'existe pas de processus stationnaires au sens classique ou généralisé ayant pour densité spectrale $|\lambda|^{-1} I_{[0,\lambda_c]}(\lambda)$, cependant ne pourrait-on pas utiliser la relation (4) pour une détection exploratoire de la longue dépendance ? Le petit avantage que nous voyons pour les variances $\sigma^2_{Allan}(\delta)$ par rapport à loi de Hurst est leur justification théorique simple et leur similarité avec le corrélogramme.

2) Pour l'analyse confirmatoire, les auteurs Lardic & Mignon ont utilisé essentiellement la technique de Geweke & Porter-Hudak (1983) ou une méthode similaire pour estimer le paramètre d de la longue mémoire. Pourquoi les méthodes plus récentes d'estimation du paramètre d de longue dépendance, par exemple celles de Robinson (1994, 1995a, 1995b) et d'Azais & Lang (1993), ne sont-elles pas utilisées ? Alors qu'au vu des études de simulation rapportées dans la littérature, elles semblent donner des résultats meilleurs que la méthode de Geweke & Porter-Hudak.

La partie de l'article, où Lardic & Mignon préconisent et discutent des apports conceptuels éventuels de la longue mémoire à l'étude de l'efficience de marché financier (efficience faible, co-intégration, volatilité avec une évolution de longue dépendance) est particulièrement intéressante. Sans doute, le concept de l'évolution à longue mémoire pourrait donner un éclairage supplémentaire sur ces questions. Cependant, les séries financières considérées ayant une longueur sérielle entre 100 et 300, ne sont-elles pas trop courtes pour la validité des conclusions tirées des statistiques obtenues sur la longue dépendance ? En effet, la précision statistique des estimations, ainsi que les tests sur le paramètre d de la longue dépendance s'appuient sur des résultats asymptotiques, ceux-ci pour être applicables exigent de grandes longueurs sérielles de 1000 au minimum (voir par exemple, l'étude de simulation dans Azais & Lang (1993)). L'explication en est simple : L'estimation de d est d'autant plus présise que l'on est plus proche de la fréquence nulle, donc des grandes périodes. Ne serait-il pas intéressant de refaire une nouvelle analyse statistique de ces séries dès que de nouvelles observations sont disponibles et que leur longueur serait suffisante ?

RÉFÉRENCES

ALLAN D.W. (1966) Statistics of atomic frequency standards. Special issue on frequency stability. Proceeding I.E.E.E. 54 pp. 221-230

AZAIS J.M. & LANG G. (1993) Estimation de l'exposant de longue dépendance dans un cadre semi-paramétrique. C.R. Acad. Sci. Paris série 1, math. 6, pp. 611-614

BARTON J.A. & POOR H.V. (1988) Signal detection in fractional gaussian noise. I.E.E.E. Trans. Information Theory, 34, pp. 943-959

GEWEKE J. & PORTER HUDAK S. (1983) The estimation and application of long-memory time series model. J. Time Series Anal. 4, p. 221-238.

HUNT G.A. (1951) Random Fourier transforms. Trans. Amer. Math. Soc. 71, pp. 38-69

HURST H.E. (1951) Long-term storage of reservoirs. Trans. Amer. Soc. Civil engineers, 116, pp. 770-808

KAHANE J.P., Some random series of functions. Cambridge university press (1985)

KOLMOGOROV A.N. (1940) Wienersche Spiralen und einige andere interessante kurven im Hilbertschen raum. C.R. (Doklady) Acad.Sci. URSS, 26, pp. 115-118

LAMPERTI J. (1962) Semi-stable stochastic process. Trans. Amer. Math. Soc. 104, pp. 62-78

LÉVY P. (1953) Random functions : General theory with special reference to Laplacian random functions. California University Publication, Statistics, 1, pp. 331-390

MANDELBROT B. (1965) Une classe de processus stochastiques homothétiques à soi, application à la loi climatologique de H.E. Hurst. C. R. Acad. Sci. Paris, 260, pp. 3274-3277

MANDELBROT B. & VAN NESS J.W. (1968) Fractional Brownian motions, fractional noises and Applications. SIAM review, 10, pp. 422-437

ROBINSON P.M. (1994) Semiparametric analysis of long memory time series. Ann. Statist. 22, pp. 515-539

ROBINSON P.M. (1995a) Log periodogram regression of time series with long range dependence. Ann. Statist. 23, pp. 1048-1072

ROBINSON P.M. (1995b) Gaussian semiparametric estimation of long range dependence. Ann. Statist. 23, pp. 1630-1661

RUTMAN J. (1978) Characterization of phase and frequency instabilities in precision frequency sources. Proceeding I.E.E.E. 66, pp. 1048-1074

TRUONG-VAN B. & DROUILHET R. (1992a) Dérivée de mouvement H-fractionnaire généralisé et processus à densité spectrale en $1/\lambda^{\alpha}$. Publication n° 92/6 du Laboratoire de Mathématiques Appliquées CNRS UA 1204 Université de Pau et des Pays de l'Adour. France

TRUONG-VAN B. & DROUILHET R. (1992b) Etude de quelques modèles de bruits de flicker en fréquence pour les oscillateurs ultra-stables. Publication n° 90/15 du Laboratoire de Mathématiques Appliquées CNRS UA 1204 Université de Pau et des Pays de l'Adour. France

YAGLOM A.M. (1958) Correlation theory of processes with random stationary nth increments. Amer. Math. Soc. Transl. (2), 8, pp. 87-141