

FRANÇOIS QUITTARD-PINON

Formules fermées pour caps, floors et options asiatiques sur taux d'intérêt

Journal de la société statistique de Paris, tome 136, n° 4 (1995),
p. 39-56

http://www.numdam.org/item?id=JSFS_1995__136_4_39_0

© Société de statistique de Paris, 1995, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Journal de la société statistique de Paris » (<http://publications-sfds.math.cnrs.fr/index.php/J-SFdS>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

II

ARTICLES

FORMULES FERMÉES POUR CAPS, FLOORS ET OPTIONS ASIATIQUES SUR TAUX D'INTÉRÊT

François QUITTARD-PINON¹

Université de Lyon I, Institut de Science Financière et d'Assurances

Résumé

Dans cet article nous montrons comment une approche particulière de l'évaluation d'actifs financiers par arbitrage, celle par martingale, permet d'obtenir très rapidement le prix d'équilibre de certains produits contingents aux taux d'intérêt. A l'aide du modèle à un aléa, nous donnons des formules d'évaluation d'options sur obligation, de caps de floor, de collars et d'options sur moyennes de taux d'intérêt. Nous utilisons systématiquement les univers d'évaluation risque-neutre et forward-neutre, découvertes majeures de la théorie financière contemporaine.

Mots clés : finance en temps continu, arbitrage, martingale, probabilités risque-neutre et forward-neutre, option asiatique, option sur taux d'intérêt, cap, floor, collar, produits dérivés.

1. L'auteur remercie très vivement Hélyette GEMAN pour ses commentaires à propos d'une version antérieure de ce papier présentée aux congrès de micro-économie à Clermont-Ferrand et de l'AFFI à Bordeaux (1995).

Introduction

Les marchés de produits dérivés de taux d'intérêt : futures, options, swaps, se sont développés à partir des années 1980 pour atteindre aujourd'hui une dimension sans précédent. Quelques chiffres, qui constituent aujourd'hui des records pour ces marchés, suffiront à illustrer ce propos : le 2 mars 1994 cinq cent mille contrats sur le notionnel se sont échangés sur le MATIF à Paris, ce qui représente 250 milliards de francs, la semaine précédente la position ouverte au CBOT à Chicago sur les contrats à terme sur les bons du Trésor américain à dix ans était de 54 milliards de dollars américains. Cette taille est devenue assez grande pour retenir l'attention à la fois des gouvernements et des responsables de très grandes entreprises. Le 25 avril 1994, le groupe des dix pays les plus industrialisés réuni à Washington, après avoir estimé que les marchés financiers ont jusqu'à présent bien fonctionné, n'en a pas moins souligné la nécessité d'améliorer la connaissance des nouveaux instruments financiers. Les gains mais aussi les pertes considérables des "hedge funds", grands intervenants sur ces marchés conduisent à s'interroger sur le rôle profond joué par ces nouveaux produits. La perte, à la même époque, de 157 millions de dollars par la firme PROCTER AND GAMBLE, dans une opération de swaps de taux d'intérêt ne peut qu'inciter à la réflexion sur l'usage de l'ensemble de ces instruments. Comme tout produit financier, les dérivés servent à spéculer, se couvrir et arbitrer. Un problème important à résoudre est celui de l'évaluation de ces produits. Dans cet article, nous montrons que l'analyse par arbitrage en temps continu reposant sur l'approche par martingale constitue un outil particulièrement bien adapté pour étudier ce problème. Après avoir présenté un cadre de modélisation des taux dans le paragraphe I, nous montrons ensuite comment valoriser divers contrats conditionnels. Le paragraphe II traite des options européennes sur obligations, le paragraphe III des caps, floors et collars, et le paragraphe IV des options sur moyenne de taux ou options asiatiques sur taux.

I. Modélisation choisie pour la structure des taux

Dans ce paragraphe, nous précisons le modèle de taux que nous considérons et nous rappelons quelques définitions. Ce modèle très fréquemment rencontré dans les études sur les taux est celui qu'utilisent N. EL KAROUÏ et H. GEMAN dans leurs articles sur les obligations à taux variables et sur les swaps (1991, 1993) et représente un cas particulier du modèle de HEATH JARROW et MORTON (1992).

Définitions

Une obligation coupon-zéro est un titre financier versant sûrement, à une échéance fixée au début de la vie de ce titre, un seul flux monétaire, normalisé,

par convention à une unité monétaire. Avec le passage du temps, l'échéance se rapproche et on appelle maturité la durée de vie résiduelle. Nous notons $P(t, s)$ (avec $s \geq t$) la valeur à la date t d'un coupon-zéro d'échéance s . On définit le rendement à l'échéance, $Y(t, s)$ par : $Y(t, s) = -\frac{1}{s-t} \ln(P(t, s))$. Pour t fixé et T variable, $Y(t, T)$ décrit une courbe appelée courbe des taux. On parle également de structure par terme des taux d'intérêt (STTI). On définit aussi les taux $R(t, T)$, au comptant pour l'échéance T , encore appelés taux actuariels, par :

$$P(t, T) = \frac{1}{(1 + R(t, T))^{T-t}}.$$

On définit aussi un taux proportionnel ρ pour la période $[t, T]$ par :

$$\rho(t, T) = \frac{1}{T-t} [\exp\{(T-t)Y(t, T)\} - 1].$$

Le taux à terme implicite, à l'instant t , pour la période $[T_1, T_2]$ noté $\phi(t; T_1, T_2)$ est défini par :

$$\phi(t; T_1, T_2) = \frac{(T_2 - t)Y(t, T_2) - (T_1 - t)Y(t, T_1)}{T_2 - T_1};$$

notons que :

$$\phi(0; t, T) = \frac{TY(0, T) - tY(0, t)}{T-t}$$

et

$$\phi(0; t, T) = \frac{1}{T-t} \ln \frac{P(0, t)}{P(0, T)}.$$

Le taux à terme instantané est défini, lorsque la limite existe, par :

$$f(t, T) = \lim_{T_2 \downarrow T} \phi(t, T, T_2).$$

On obtient facilement les résultats importants suivants :

$$f(t, T) = -\left. \frac{\delta \ln P(t, s)}{\delta s} \right|_{s=T}$$

$$Y(t, T) = \ln(1 + R(t, T)) \quad \text{ou} : \quad R(t, T) = e^{Y(t, T)} - 1$$

$$Y(t, T) = \frac{1}{T-t} \int_t^T f(t, u) du$$

$$f(t, T) = Y(t, T) + (T-t) \frac{\delta Y(t, T)}{\delta T}$$

$$P(t, T) = \exp \left\{ -\int_t^T f(t, u) du \right\}$$

Ainsi la connaissance du prix des zéro-coupon, des taux de rendement, ainsi que des taux à terme peuvent se déduire les uns des autres et permettent l'étude de la STTI.

On définit le taux instantané, ou taux sans risque, noté $r(t)$ par :

$$r(t) \triangleq \lim_{T \rightarrow t} \left[-\frac{1}{T-t} \ln P(t, T) \right] = \lim_{T \rightarrow t} Y(t, T).$$

On notera que cette définition implique que $r(t)$, défini comme limite de taux, n'est pas strictement observable. Nous notons $\delta(t)$ la fonction :

$$\delta(t) \triangleq \exp\left\{-\int_0^t r(u) du\right\}.$$

que nous appelons parfois et abusivement fonction d'actualisation et de façon plus générale nous notons :

$$\delta(t, s) \triangleq \exp\left\{-\int_t^s r(u) du\right\}.$$

Modèle de taux

Nous rappelons ici brièvement le modèle gaussien à un facteur. De façon classique, nous considérons que l'incertitude est représentée par l'espace filtré :

$(\Omega, \{F_t\}, \Pi)$ où Ω est l'espace fondamental usuel, $\{F_t\}(t \geq 0)$ est la filtration représentant, en pratique, l'information disponible en t , Π désigne la probabilité historique. Parmi les approches possibles de l'étude de l'équilibre des taux, nous retenons le modèle à un aléa avec une structure de volatilité déterministe, i.e, nous supposons que le prix du coupon-zéro vérifie l'équation différentielle stochastique :

$$\frac{dP}{P} = \mu(t, T)dt - \sigma(t, T)dz.$$

$\mu(t, T)$ est le rendement instantané espéré du coupon-zéro sous Π , $\sigma(t, T)$ est la structure de volatilité sous Π et z est un $\Pi - F_t$ mouvement brownien. En l'absence d'opportunité d'arbitrage, on sait qu'il existe un processus adapté $\lambda(t)$, appelé prime de risque, qui est tel que :

$$\mu(t, T) = r(t) + \lambda(t)\sigma(t, T).$$

En utilisant le théorème de GIRSANOV, on introduit une nouvelle mesure de probabilité Q , qui conduit à changer la dérive μ de l'EDS, de telle sorte que l'on puisse écrire :

$$\frac{dP}{P} = r(t) dt - \sigma(t, T)d\hat{z} \tag{1}$$

où \hat{z} est un brownien sous Q défini par : $\hat{z}(t) = z(t) - \int_0^t \lambda(u) du$.

Ce théorème permet de changer d'univers : on passe de l'univers historique $(\Omega, \{F_t\}, \Pi)$ à l'univers d'évaluation $(\Omega, \{F_t\}, Q)$ où Q est la nouvelle mesure de probabilité, définie techniquement dans le théorème de GIRSANOV. Plus précisément, la mesure Q est définie sur F_T par :

$$\frac{dQ}{d\Pi} = \exp\left\{\int_0^T \lambda(t) dz - \frac{1}{2}\int_0^T \lambda^2(t) dt\right\}.$$

Elle contient de façon implicite les primes de risque, ce qui fait qu'en espérance le rendement instantané de tout coupon zéro est égal au taux de l'actif

sans risque ($E_Q(dP/P) = r dt$). Ceci justifie le nom de probabilité risque-neutre. Un résultat fondamental de théorie financière assure que dans l'univers risque-neutre, et en absence d'opportunité d'arbitrage, (AOA), les processus de gain d'un actif financier (cours plus revenu) actualisés au taux de l'actif sans risque, sont des Q -martingales. C'est l'un des résultats que nous allons systématiquement utiliser dans cet exposé. On a donc, en particulier, la très importante relation :

$$P(t, T) = E_Q \left[\exp - \int_t^T r(u) du / F_t \right] = E_Q[\delta(t, T) / F_t].$$

C'est $P(t, T)$ qui constitue en fait la véritable fonction d'actualisation. Nous supposons dans cet article que la structure de volatilité, $\sigma(t, T)$, est déterministe, ce qui entraîne que nous nous situons dans un contexte gaussien de taux d'intérêt. Cette hypothèse gênante en théorie s'avère, toutefois, assez robuste en pratique. $P(0, T)$ étant connu, on obtient après intégration :

$$P(t, T) = P(0, T) \exp \left\{ \int_0^t r(u) du - \int_0^t \sigma(u, T) d\hat{z}(u) - \frac{1}{2} \int_0^t \sigma^2(u, T) du \right\}.$$

Compte tenu du fait que $P(t, t) = 1$ et en écrivant $P(t, t) = P(0, t) \exp\{\dots\}$, il vient :

$$P(t, T) = \frac{P(0, T)}{P(0, t)} \exp \left\{ \int_0^t -(\sigma(u, T) - \sigma(u, t)) d\hat{z}(u) - \frac{1}{2} \int_0^t (\sigma^2(u, T) - \sigma^2(u, t)) du \right\}. \quad (2)$$

En faisant intervenir un instant v non nécessairement calé sur l'origine, on a également :

$$P(t, T) = \frac{P(v, T)}{P(v, t)} \exp \left\{ - \int_v^t (\sigma(u, T) - \sigma(u, t)) d\hat{z}(u) - \frac{1}{2} \int_v^t (\sigma^2(u, T) - \sigma^2(u, t)) du \right\}.$$

Il est donc clair qu'avec ce modèle deux éléments sont nécessaires et suffisants pour étudier la structure par échéance des taux d'intérêt : la connaissance de la courbe des taux à l'instant initial (ou à l'instant courant d'évaluation) et la structure de volatilité. Le rendement à l'échéance s'écrit, après avoir posé $\tau = T - t$:

$$Y(t, T) = \phi(0; t, T) + \frac{1}{\tau} \int_0^t (\sigma(u, T) - \sigma(u, t)) d\hat{z}(u) + \frac{1}{2\tau} \int_0^t (\sigma^2(u, T) - \sigma^2(u, t)) du ;$$

on montre également que :

$$f(t, T) = f(0, T) + \int_0^t \frac{\delta\sigma(u, T)}{\delta T} d\hat{z}(u) + \int_0^t \sigma(u, T) \left[\frac{\delta\sigma(u, T)}{\delta T} \right] du$$

et :

$$r(t) = f(0, t) + \int_0^t \frac{\delta\sigma(s, t)}{\delta t} d\hat{z} + \frac{1}{2} \int_0^t \frac{\delta\sigma^2(s, t)}{\delta t} ds. \quad (3)$$

Un nouveau changement d'univers permet d'étudier de façon remarquablement simple les produits dérivés de taux d'intérêt. Ce changement de référentiel constitue un résultat majeur de la finance contemporaine. Sa découverte a été faite simultanément par J. JAMSHIDIAN (1989) et H. GEMAN (1989). La nouvelle mesure appelée mesure forward-neutre d'échéance t , notée Q_t , est définie sur F_t , par :

$$\frac{dQ_t}{dQ} = \frac{\exp\left\{-\int_0^t r(u) du\right\}}{P(0, t)}.$$

Compte tenu du modèle de taux choisi; nous pouvons écrire :

$$\frac{dQ_t}{dQ} = \exp\left\{-\int_0^t \sigma(u, t)d\hat{z}(u) - \frac{1}{2} \int_0^t \sigma^2(u, t)du\right\}.$$

En utilisant à nouveau le théorème de GIRSANOV, on s'aperçoit que les probabilités t -forward-neutre sont associées à de nouveaux browniens \hat{z}_t , tels que $d\hat{z}_t = \sigma(u, t) du + d\hat{z}$.

La valeur d'un coupon-zéro se réécrit dans l'univers forward-neutre :

$$P(t, T) = \frac{P(0, T)}{P(0, t)} \exp\left\{\int_0^t -(\sigma(u, T) - \sigma(u, t))d\hat{z}_t(u) - \frac{1}{2} \int_0^t [\sigma(u, T) - \sigma(u, t)]^2 du\right\},$$

$$\begin{aligned} \text{d'où : } Y(t, T) &= \phi(0; t, T) + \frac{1}{T-t} \int_0^t [\sigma(u, T) - \sigma(u, t)]d\hat{z}_t(u) \\ &+ \frac{1}{2(T-t)} \int_0^t [\sigma(u, T) - \sigma(u, t)]^2 du. \end{aligned} \quad (4)$$

Compte tenu du choix d'une structure de volatilité déterminante, on obtient :

$$E_Q[Y(t, T)] = \phi(0; t, T) + \frac{1}{2(T-t)} \int_0^t [\sigma(u, T) - \sigma(u, t)]^2 du \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \text{Var}_Q[Y(t, T)] &= \frac{1}{(T-t)^2} \int_0^t [\sigma(u, T) - \sigma(u, t)]^2 du \\ &= \text{Var}_Q[Y(t, T)] = \text{Var}_\Pi[Y(t, T)]. \end{aligned} \quad (6)$$

Les variances sont identiques dans les univers, historique, risque-neutre et forward-neutre. Dans le cas de l'évaluation de produits sur taux flottants, il est fréquent de prendre en considération le décalage entre la date de paiement des coupons et la date de révision du taux. Appelons h ce décalage. On a, par exemple, en t le paiement de la somme : $Y(t-h, t-h+\theta)$ où θ désigne le terme (la maturité) du taux de référence. Il est donc naturel d'introduire le Brownien \hat{z}_{t-h} défini par $d\hat{z}_{t-h} = d\hat{z} + \sigma(u, t-h) du$.

Un calcul évident conduit à :

$$\begin{aligned}
 Y(t-h, t-h+\theta) &= \phi(0; t-h, t-h+\theta) \\
 &+ \frac{1}{\theta} \int_0^t [\sigma(u, t-h+\theta) - \sigma(u, t-h)] d\hat{z}_t(u) \\
 &- \frac{1}{\theta} \int_0^{t-h} [\sigma(u, t-h+\theta) - \sigma(u, t-h)] [\sigma(u, t) - \sigma(u, t-h)] du \\
 &+ \frac{1}{2\theta} \int_0^{t-h} [\sigma(u, t-h+\theta) - \sigma(u, t-h)]^2 du. \tag{7}
 \end{aligned}$$

Le très grand intérêt de cette expression due à EL KAROUI et GEMAN (1991, 1993) est d'exprimer le rendement à l'échéance $Y(t-h, t-h+\theta)$ à l'aide du brownien \hat{z}_t . Ceci permet d'évaluer facilement et rapidement certains produits financiers à paiement différé. Avec une structure déterministe, il vient :

$$\begin{aligned}
 E_{Q_t} [Y(t-h, t-h+\theta)] &= \phi(0; t-h, t-h+\theta) \\
 &+ \frac{\theta}{2} \text{Var} [Y(t-h, t-h+\theta)] \\
 &- h \text{Cov} [Y(t-h, t-h+\theta), Y(t-h, t)]. \tag{8}
 \end{aligned}$$

Ce résultat est à la base de l'évaluation des obligations à taux variable avec lags dans EL KAROUI et GEMAN (1991, 1993). Notons que l'on peut aussi introduire des probabilités forward-neutre à l'aide de :

$$\frac{dQ_u}{dQ} = \frac{\exp\left\{-\int_t^u r(s) ds\right\}}{P(t, u)}.$$

Un autre résultat fondamental de théorie financière est que le prix forward- u : $F(t; T, u) = P(t, T)/P(t, u)$ est une Q_u martingale et que l'on peut écrire pour tout actif financier ne versant pas de dividende et de prix S :

$$E_Q [S(T)\delta(T)/F_t] = E_{QT} [S(T)/F_t] E_Q [\delta(T)/F_t]. \tag{9}$$

Nous utiliserons systématiquement les résultats (7), (8) et (9) dans cet article. Nous disposons désormais du cadre nécessaire pour évaluer de nombreux produits dérivés, en particulier les options sur obligations, qui font l'objet du paragraphe suivant.

II. Options sur obligations

Dans ce paragraphe, nous examinons le cas des options européennes sur obligations à coupon-zéro. Leur évaluation constitue un préalable pour l'évaluation des caps et des floors. Nous supposons ces titres sans risque de défaut. Nous allons montrer que l'approche martingale permet d'évaluer très rapidement ces contrats conditionnels.

Evaluation d'un call sur coupon zéro

Le principe fondamental de l'arbitrage permet d'écrire la valeur, notée $C(0, T)$ en date zéro d'une option d'achat européenne d'échéance T , de prix d'exercice K et portant sur un coupon-zéro d'échéance s , ($s > T$) sous la forme :

$$C(0, T) = E_Q \left[(P(T, s) - K) \delta(T) \right]^+.$$

En utilisant la mesure de probabilité T-forward-neutre, $\left(\frac{dQ_T}{dQ} = \frac{\delta(T)}{P(0, T)} \right)$, il vient :

$$C(0, T) = P(0, T) E_{Q_T} [P(T, s) - K]^+.$$

Le call exercé est l'événement noté ε , défini par : $\varepsilon = \{P(T, s) \geq K\}$. La valeur du call est donc :

$$C(0, T) = P(0, T) E_{Q_T} (P(T, s) 1_\varepsilon) - K Q_T(\varepsilon).$$

Posons :

$$W \triangleq \int_0^T -(\sigma(u, s) - \sigma(u, T)) d\hat{z}_T(u) - \frac{1}{2} \int_0^T [\sigma(u, s) - \sigma(u, T)]^2 du$$

$$H^2 \triangleq \int_0^T [\sigma(u, s) - \sigma(u, T)]^2 du.$$

W est distribuée sous Q_T selon la loi normale $N\left[-\frac{1}{2} H^2, H\right]$.

L'événement ε s'écrit $\left\{ \exp W \geq K \frac{P(0, T)}{P(0, s)} \right\}$.

Il vient après calculs :

$$C(0, T) = P(0, s) N(d_l) - K P(0, T) N(d_l - H) \quad (10)$$

avec $d_l = \frac{1}{H} \ln \frac{P(0, s)}{P(0, T)K} + \frac{1}{2} H$.

- Lorsque la volatilité est linéaire :

$$\sigma(u, v) = \sigma * (v - u), \quad H^2, \text{ notée } H_l^2, \text{ s'écrit } H_l^2 = T\sigma^2(s - T)^2.$$

FORMULES FERMÉES POUR CAPS, FLOORS ET OPTIONS ASIATIQUES

- Lorsque la structure de volatilité est exponentielle, on trouve pour H^2 , noté : H_e^2 ,

$$H_e^2 = \frac{\sigma^2}{a^2} \left[\frac{1 - e^{-2a\tau}}{2a} \right] \left[1 - e^{-a(s-T)} \right]^2 \text{ avec } \tau = T.$$

En se plaçant à un instant t d'évaluation, on obtient [cf JAMSHIDIAN (1989)] :

$$C(t, T) = P(t, s)N(h+) - KP(t, T)N(h-)$$

$$h_{\pm} = \frac{1}{V^s(t, T)} \ln \left[\frac{P(t, s)}{P(t, T)K} \right] \pm \frac{1}{2} V^S(t, T)$$

et

$$V^S(t, T)^2 = \int_t^T [\sigma(u, s) - \sigma(u, T)]^2 du.$$

Notons que : $H^2 = V^S(0, T)^2$.

Lorsque l'on utilise une structure de volatilité exponentielle, il vient :

$$V^2(t, T)^2 = H_e^2 \text{ avec } \tau = T - t.$$

En utilisant la relation de parité entre Call et Put où nous écrivons $IP(t, T)$ la valeur d'un put européen à l'instant t d'échéance T de prix d'exercice K sur un coupon-zéro :

$$C(t, T) - IP(t, T) = P(t, s) - KP(t, T).$$

Il vient pour la valeur d'un put sur coupon-zéro :

$$IP(t, T) = KP(t, T)N(-h^-) - P(t, s)N(-h^+).$$

F. JAMSHIDIAN (1989), N. EL KAROUI et J.-C. ROCHET (1989) ont étendu ce résultat au cas des options sur obligations à coupons.

III. Evaluation des caps, des floors et des collars

Les caps et les floors sont des contrats de gré à gré sur taux d'intérêt qui constituent un des véhicules privilégiés de la gestion du risque de taux. Les collars sont obtenus par achat et vente simultanés de caps et de floors. Pour résoudre le problème de valorisation de ces produits, il suffit de savoir évaluer un cap ou un floor. Un cap permet de limiter le coût d'un emprunt tout en conservant la possibilité de bénéficier d'une baisse des taux. Appartenant à la catégorie des instruments conditionnels, ce contrat est défini à partir des éléments suivants :

- un montant notionnel L , sur lequel sont calculés les intérêts ;

- un taux de référence variable. Il peut s'agir d'une référence monétaire, comme le *TAM*, le *T4M*, le *Libor* ou le *Pibor* ou d'une référence obligataire comme le *TMO* ou le *TME* ;
- un taux fixe maximum garanti noté tg ;
- une période de garantie de taux ;
- la fréquence f des règlements entre les deux contractants et la durée totale du contrat. La fréquence f dépend du taux de référence choisi (par exemple $f = 12$ pour le *PIBOR* 1 mois et $f = 1$ pour le *TMO* ;
- la prime, exprimée en général en taux, est payée par l'acheteur au vendeur, soit en totalité à la date initiale du contrat, soit par fractions aux dates de règlement. Ces éléments sont également présents dans le cas des floors.

Evaluation des caps

Soit $[0, T]$ l'intervalle de temps où un taux tg est garanti et appelons t_k les dates de références, confondues avec les dates de règlements. Elles définissent des sous-périodes d'isodurée. Si τ est la durée d'une sous-période, on a : $t_k = k\tau$ et $t_{k+1} = (k+1)\tau$ avec : $t_0 = 0$ et $t_N = T$, s'il y a N sous-périodes. Nous supposons, pour simplifier, que le taux variable de référence est identique en date t_k au taux au comptant d'échéance t_{k+1} . C'est le taux pratiqué en t_k pour des opérations de durée τ . Nous notons ρ_k , le taux proportionnel. Le flux que reçoit le détenteur du cap, en t_{k+1} est : $\tau L[\rho_k - tg]^+$, ce qui est équivalent à percevoir :

$$\Psi_k = \frac{\tau L}{1 + \tau \rho_k} [\rho_k - tg]^+ \text{ en } k\tau \text{ noté aussi } t_k.$$

Il est clair que le possesseur du cap s'assure un taux d'emprunt maximal de tg , compte non tenu de la prime. En effet un emprunteur à taux variable qui se couvre par un cap paie en t_{k+1} : $L(1 + \tau \rho_k) - L\tau[\rho_k - tg]^+$.

Un simple calcul permet de vérifier cette assertion. Il est également très important de remarquer que, pour le propriétaire du cap, il est aussi équivalent de recevoir :

$$\Psi_k = \left[L - L \frac{1 + \tau tg}{1 + \tau \rho_k} \right]^+ \quad (11)$$

ou encore :

$$\Psi_k = L(1 + \tau tg) \left[\frac{1}{1 + \tau tg} - \frac{1}{1 + \tau \rho_k} \right]^+ \text{ en } k\tau. \quad (12)$$

Sous cette dernière forme, on reconnaît² le solde d'une option européenne de vente d'échéance t_k sur coupon-zéro d'échéance t_{k+1} et de prix d'exercice $\frac{1}{1 + \tau tg}$.

2. Au facteur multiplicatif $L(1 + \tau tg)$ près.

• *Un cap peut donc s'évaluer comme un portefeuille d'options de vente européennes sur coupon-zéro.* La relation (12) est très générale et indépendante du modèle de taux retenu. On peut donc l'utiliser pour évaluer des caps et des floors dans un contexte de taux non gaussiens, notamment en se servant du modèle de Cox INGERSOLL et ROSS (1985). Nous pouvons utiliser, en particulier les résultats du paragraphe précédent pour obtenir une formule explicite d'évaluation des caps dans le cas du modèle gaussien à un aléa. Notons π_k la valeur d'équilibre d'un actif versant Ψ_k en $k\tau$. La formule d'évaluation d'une option sur coupon-zéro permet d'écrire :

$$\pi_k = L [P(0, t_k)N(-d_2) - (1 + \tau tg)P(0, t_{k+1})N(-d_1)] \quad (13)$$

où

$$d_1 = \frac{1}{H_k} \ln \frac{P(0, t_{k+1})(1 + \tau tg)}{P(0, t_k)} + \frac{1}{2} H_k$$

$$d_2 = d_1 - H_k$$

$$H_k = V^{t_{k+1}}(0, t_k).$$

On obtient la formule d'évaluation : $\text{cap} = \sum_k \pi_k$

• On peut aussi utiliser directement l'équation (11). Les principes fondamentaux de l'arbitrage permettent d'écrire :

$$\begin{aligned} \pi_k &= E_Q \{ [L - L(1 + \tau tg)P(t_k, t_{k+1})]^+ \delta(t_k) \} \\ \pi_k &= LE_Q [\delta(t_k)1_\varepsilon] - L(1 + \tau tg)E_Q [P(t_k, t_{k+1})\delta(t_k)1_\varepsilon] \end{aligned} \quad (14)$$

avec :

$$\varepsilon = \{L - L(1 + \tau tg)P(t_k, t_{k+1}) > 0\}.$$

Le premier terme de (11) peut s'évaluer en utilisant la probabilité Q_{t_k} - forward-neutre :

$$E_Q [\delta(t_k)1_\varepsilon] = E_Q \left[\frac{\delta(t_k)}{P(0, t_k)} 1_\varepsilon \right] P(0, t_k) = P(0, t_k)Q_{t_k}(\varepsilon).$$

Posons :

$$-W_k \triangleq \int_0^{t_k} [\sigma(u, t_{k+1}) - \sigma(u, t_k)] d\hat{z}_{t_k} + \frac{1}{2} \int_0^{t_k} [\sigma(u, t_{k+1}) - \sigma(u, t_k)]^2 du$$

$$H_k^2 \triangleq \int_0^{t_k} [\sigma(u, t_{k+1}) - \sigma(u, t_k)]^2 du.$$

Compte tenu du choix d'une structure de volatilité déterministe, nous sommes dans un contexte gaussien :

$$W_k \sim N\left(-\frac{1}{2} H_k^2, H_k\right) \text{ sous } Q_{t_k}.$$

ε s'écrit :

$$\varepsilon : \left\{ \exp W_k < \frac{P(0, t_k)}{P(0, t_{k+1})(1 + \tau t g)} \right\}.$$

Le calcul de $Q_{t_k}(\varepsilon)$ se ramène au calcul de la probabilité :

$$Q_{t_k} \left[W_k < \ln \frac{P(0, t_k)}{P(0, t_{k+1})(1 + \tau t g)} \right].$$

Le deuxième terme en espérance de (14) revient au calcul de l'intégrale

$$P(0, t_{k+1}) \int_{\Omega} (\exp W_k) 1_{\varepsilon} dQ_{t_k} \text{ qui est classique.}$$

• Une troisième façon de procéder consiste à poser : $1 + \rho\tau = \exp\{\tau Y(t_k, t_{k+1})\}$ et à calculer :

$$\pi_k = LE_Q \left\{ \left[\exp\{\tau Y(t_k, t_{k+1})\} - (1 + \tau t g) \right]^+ \delta(t_{k+1}) \right\}$$

$$\pi_k = LP(0, t_{k+1}) E_{Q_{k+1}} \left[\exp\{\tau Y(t_k, t_{k+1})\} - (1 + \tau t g) \right]^+.$$

Les formules (5) et (6) et le caractère gaussien du taux $Y(t_k, t_{k+1})$ permettent de calculer facilement ces expressions. Bien entendu, on obtient la même valeur pour le caplet (formule (13)). Il ne s'agit que de variations sur le thème de l'univers forward-neutre. Enfin, remarquons qu'en définissant

$$\widehat{\Phi}_k = \widehat{\Phi}(O; t_k, t_{k+1}) \text{ par :}$$

$$1 + \tau \widehat{\Phi}(0; t_k, t_{k+1}) = \exp\{\tau \widehat{\Phi}(0; t_k, t_{k+1})\},$$

on obtient, après calculs :

$$\pi_k = \frac{LP(0, t_k)}{1 + \tau \widehat{\Phi}_k} \left[(1 + \tau \widehat{\Phi}_k) N(-d_2) - (1 + \tau t g) N(-d_1) \right]. \quad (15)$$

Evaluation des floors et des collars

Les floors peuvent s'analyser de façon identique, puisque ce sont des contrats qui permettent de garantir un taux de prêt. Ils apparaissent comme des portefeuilles de calls européens sur coupon-zéros. Les collars permettent de diminuer le coût des caps et des floors par achat et vente simultanées de caps et floors. La diminution du coût provient de la vente de la prime. Leur évaluation ne pose pas de problème (dès lors que l'on sait) évaluer un cap. En utilisant l'une des méthodes analysées pour évaluer des caps, on obtient la formule de valorisation pour les floors : $\text{floor} = \sum_k \gamma_k$ avec :

$$\gamma_k = L \left[(1 + \tau t g) P(0, t_{k+1}) N(d_1) - P(0, t_k) N(d_2) \right]. \quad (15)'$$

Les paramètres d_1 et d_2 étant donnés par la formule (13).

Pour éviter l'apparition de taux négatifs, *a priori* possible dans le cas d'un contexte gaussien, BRIYS, CROUHY et SCHÖBEL (1991) ont proposé en utilisant

une méthode de résolution par EDP une solution explicite pour ces produits. Il est également intéressant de remarquer que la relation de parité entre cap, floor et swap et les formules (13) et (15)' permettent de valoriser ce dernier instrument. Nous détaillons ce calcul dans le paragraphe suivant.

IV. Options asiatiques sur taux

Les options asiatiques sur actions sont maintenant bien connues. Elles ont été analysées et valorisées de façon approchée par BOUAZIZ et *alii* (1991), KEMNA et VORST (1990), et pour la première fois de façon exacte dans les travaux de GEMAN et YOR (1993), complétés par GEMAN et EYDELAND (1995), mais celles sur taux n'ont pas fait l'objet de nombreuses études. En effet, ces produits ne sont pas traités, pour l'instant, sur des marchés, mais on peut supposer leur apparition dans un bref délai comme le souligne LIN JIA (1994) qui en a proposé une esquisse, N.EL KAROUI, C. LEPAGE, R. MYNENI, N. ROSEAU, R. VISWANATHAN (1992) donnent le principe d'évaluation que nous utilisons ici pour évaluer les quatre options asiatiques sur taux que nous définissons ci-après. Le cadre choisi ici pour représenter les taux se prête remarquablement bien à leur valorisation. La formule (9) et surtout les formules (7) et (8) de EL KAROUI et GEMAN simplifient de façon considérable les calculs. Soit T l'échéance de l'option, et $M[T_1, T_2]$ la moyenne des taux de maturité θ calculée sur l'intervalle de temps $[T_1, T_2]$ avec $T_2 \leq T$. Soit :

$$M[T_1, T_2] = \frac{1}{T_2 - T_1} \int_{T_2}^{T_1} Y(u, u + \theta) du$$

Introduisons un taux moyen proportionnel ρ_M défini par :

$$\exp\{\theta M[T_1, T_2]\} - 1 = \theta \rho_M.$$

On peut envisager des contrats de deux types : ceux avec prix d'exercice fixe et ceux avec prix d'exercice moyen, ce qui conduit à proposer les quatre contrats d'option suivants :

- Le premier est tel que le prix d'exercice est fixe et tel que le détenteur d'un call européen reçoit en $T + \theta$, le flux :

$$\theta[M(T_1, T_2) - K]^+$$

où K est le prix d'exercice fixé au moment de la signature du contrat.

- Le deuxième est tel que le propriétaire du call perçoit en $T + \theta$, le flux :

$$[\theta \rho_M - K]^+ = [\exp\{\theta M[T_1, T_2]\} - (1 + K)]^+$$

- Le troisième est tel que le possesseur du call perçoit en $T + \theta$, le flux :

$$\theta[Y(T, T + \theta) - M(T_1, T_2)]^+$$

- Le quatrième a pour paiement en $T + \theta$:

$$[\theta(\rho(T, T + \theta) - \rho_M)]^+ = [\exp\{\theta Y(T, T + \theta)\} - \exp\{\theta M[T_1, T_2]\}]^+$$

Le contexte gaussien permet une évaluation rapide de ces contrats, au moins dans les trois premiers cas. La définition de ces options conduit à étudier un produit dont le montant de son flux unique est connu à une date antérieure à celle de son paiement (respectivement à la date T et à la date $T + \theta$). A nouveau les formules (7) et (8) permettent l'évaluation de ces instruments. Envisageons successivement les deux types d'options :

Calls avec prix d'exercice fixe

- Notons $C_1(0, T)$ la valeur d'équilibre en date 0 du premier call. La formule fondamentale d'évaluation s'écrit :

$$\begin{aligned} C_1(0, T) &= E_Q [(M(T_1, T_2) - K)^+ \delta(T + \theta)\theta] \\ &= E_Q [\delta(T + \theta)] E_{Q_{T+\theta}} [(M(T_1, T_2) - K)^+] \theta \end{aligned}$$

$$C_1(0, T) = P(0, T + \theta) E_{Q_{T+\theta}} [(M(T_1, T_2) - K)^+] \theta$$

$$C_1(0, T) = P(0, T + \theta) \{E_{Q_{T+\theta}} [(M(T_1, T_2)1_\varepsilon) - K Q_{T+\theta}(\varepsilon)] \theta$$

avec $\varepsilon : \{M(T_1, T_2) \geq K\}$

$M(T_1, T_2)$ suit, sous $Q_{T+\theta}$, une loi normale $N(I_M, \delta_M)$. On trouve :

$$\begin{aligned} I_M &= \frac{1}{T_2 - T_1} \int_{T_1}^{T_2} \left\{ \phi(0; u, u + \theta) + \frac{\theta}{2} \text{var} Y(u, u + \theta) \right. \\ &\quad \left. - (T + \theta - u) \text{cov} [Y(u, u + \theta), Y(u, T + \theta)] \right\} du \end{aligned}$$

$$\delta_M^2 = \frac{1}{(T_2 - T_1)^2} \int_{T_1}^{T_2} \int_{T_1}^{T_2} \text{cov} (Y(u, u + \theta), Y(v, v + \theta)) dudv$$

On obtient alors comme prix d'un call européen sur moyenne de taux d'intérêt de prix d'exercice K et d'échéance T :

$$C_1(0, T) = P(0, T + \theta) [\delta_M n(d) + (I_M - K) N(d)] \theta$$

avec n densité d'une loi $N(0, 1)$ et :

$$d = \frac{I_M - K}{\delta_M} \tag{16}$$

- Dans le cas d'une structure de volatilité linéaire, on a :

$$\begin{aligned} I_M &= \frac{1}{(T_2 - T_1)} \int_{T_1}^{T_2} \phi(0; u, u + \theta) du \\ &\quad - \sigma^2 \left[\frac{\theta}{4} + \frac{T}{2} \right] [T_1 + T_2] + \frac{\sigma^2 [T_2^2 + T_1^2 + T_2 T_1]}{3} \end{aligned}$$

et :

$$\delta_M^2 = \sigma^2 \left[\frac{T_2 + 2T_1}{3} \right]$$

- Dans le cas d'une structure de volatilité exponentielle, on a :

$$I_M = \frac{1}{(T_2 - T_1)} \int_{T_1}^{T_2} \phi(0; u, u + \theta) du$$

$$+ \frac{\sigma^2(1 - e^{-a\theta})}{8\theta a^4(T_2 - T_1)} \left[8e^{-a(T+\theta)}[\text{cha}T_2 - \text{cha}T_1] \right. \\ \left. - (1 + e^{-a\theta})[2a(T_2 - T_1) + e^{-2aT_2} - e^{-2aT_1}] \right]$$

et :

$$\delta_M^2 = \frac{1}{2(T_2 - T_1)^2} \frac{\sigma^2}{a^5\theta^2} (1 - e^{-a\theta})^2$$

$$\left[2a(T_2 - T_1) + 2[e^{-a(T_2-T_1)} - 1] - [e^{-aT_2} - e^{-aT_1}]^2 \right]$$

• Le deuxième call s'évalue selon le même principe :

$$C_2(0, T) = E_Q \left\{ [e^{\theta M} - (1 + K)]^+ \delta(T + \theta) \right\}$$

$$= P(0, T + \theta) E_{Q_{T+\theta}} [e^{\theta M} - (1 + K)]^+$$

Nous savons que $M[T, T_2]$ suit sous $Q_{T+\theta}$ une loi normale dont nous connaissons les caractéristiques dans le cas des structures de volatilités linéaire et exponentielles

$\exp\{\theta M[T_1, T_2]\}$ suit donc une loi log-normale, le calcul de C_2 est aisé, il vient :

$$C_2(0, T) = P(0, T + \theta) \left[\exp\left\{ \theta I_M + \frac{1}{2} (d_1 - d_2)^2 \right\} N(d_1) - (1 + K) N(d_2) \right]$$

avec :

$$d_1 = \frac{\theta I_M + \theta^2 \delta_M^2 - \ln(1 + K)}{\theta \delta_M} \tag{16}'$$

$$d_2 = d_1 - \theta \delta_M$$

Les valeurs I_M et δ_M trouvées précédemment permettent d'obtenir des formules explicites dans le cas de volatilité linéaire et exponentielle.

Calls avec prix d'exercice moyen

• Rappelons que, comme dans le cas précédent, l'échéance est T , mais que le paiement se fait en $T + \theta$. La valeur du troisième call en 0 notée $C_3(0, T)$ s'écrit :

$$C_3(0, T) = E_{Q_{T+\theta}} \left\{ [Y(T, T + \theta) - M(T_1, T_2)]^+ \delta(T + \theta) \right\} \theta$$

$$C_3(0, T) = E_Q [\delta(T + \theta)] E_{Q_{T+\theta}} [Y(T, T + \theta) - M(T_1, T_2)]^+ \theta$$

Compte tenu du modèle choisi, $(T, T + \theta) - M(T1, T2)$ a une distribution gaussienne $N(I, \delta)$ avec :

$$I \triangleq E_{Q_{T+\theta}}[Y(T, T + \theta)] - I_M$$

$$\delta^2 \triangleq \delta_M^2 + \text{var}Y(T, T + \theta) - 2\text{cov}[M(T1, T2), Y(T, T + \theta)]$$

compte tenu des définitions, il vient :

$$\text{cov}[M(T1, T2), Y(T, T + \theta)] = \frac{1}{T2 - T1} \int_{T2}^{T1} \text{cov}[Y(u, u + \theta), Y(T, T + \theta)] du$$

En posant $d = \frac{1}{\delta}$, le prix du call s'écrit :

$$C_3(0, T) = P(0, T + \theta)[\delta f(d) + IN(d)]\theta \quad (17)$$

• Enfin, dans le quatrième cas, on doit calculer :

$$\begin{aligned} C_4(0, T) &= E_Q \{ [e^{\theta Y(T, T+\theta)} - e^{\theta M[T1, T2]}] + \delta(T + \theta) \} \\ &= P(0, T + \theta) E_{Q_{T+\theta}} [e^{\theta Y(T, T+\theta)} - e^{\theta M[T1, T2]}] + \end{aligned} \quad (17)'$$

La résolution est plus difficile car on doit calculer une espérance d'une somme de lois log-normales. On retrouve le problème assez classique des options asiatiques avec un support dont le cours suit un brownien géométrique, pour lequel existe un éventail assez large d'approches, mais dont aucune n'est simple si elle est exacte (processus de BESSEL et changement de temps, utilisés par GEMAN et YOR, 1993).

Lorsque les calculs sont faits avec des moyennes arithmétiques, il faut remplacer les intégrales par de simples sommations et utiliser les formules d'évaluations (16), (16)' et 17.

Conclusion

Dans un cadre de modèle de taux avec un aléa et une structure de volatilité déterministe, nous avons montré que la méthode d'arbitrage par martingale conduit très rapidement et très facilement à des formules fermées d'évaluation, pour les options sur coupon-zéros, les options sur obligations à coupons, les caps, floors, collars ainsi que pour les options asiatiques sur taux. Il est très commode de pouvoir valoriser des actifs financiers à l'aide de formules explicites car les valeurs sont obtenues sur ordinateur quasi-instantanément, contrairement à ce que l'on obtient à l'aide d'algorithmes basés sur des arborescences comme dans le modèle de HO et LEE ou de HULL et WHITE, par exemple. La possibilité de déduire les paramètres "grecs" facilite la gestion de ces instruments. Néanmoins, il faut remarquer que l'hypothèse de structure de volatilité déterministe si elle facilite grandement les calculs n'est pas satisfaisante sur un plan théorique, car elle autorise des taux négatifs avec

une probabilité non rigoureusement nulle. Certains résultats sont cependant indépendants de cette particularité, une étude ultérieure pourrait les utiliser et examiner des solutions évitant cet écueil. Une solution alternative serait d'utiliser des processus en racine carrée ou des taux forward log-normaux.

BIBLIOGRAPHIE

- BOUAZIZ L., BRIYS E., CROUHY M. (1991) *The Pricing of Forward-starting Asian Options*, Groupe HEC, cahier de recherche, oct. 1991.
- BRACE A. and MUSIELA M. (1994) "A multifactor Gauss Markov Implementation of Heath, Jarrow and Morton", *Mathematical Finance* vol.4, n° 3.
- BRIYS E., CROUHY M. and SCHÖBEL R. (1991) "The Pricing of Default-free Interest Rate, Cap, Floor and Collar Agreements", *The Journal of Finance*.
- COX J., INGERSOLL J. and ROSS S. (1985) "A Theory of the Term Structure of Interest Rates", *Econometrica*.
- DANA R.-A. et JEANBLANC-PICQUE M. (1994) *Marchés financiers en Temps Continu, Valorisation et Equilibre*, Economica, Paris.
- HO T.S.Y. and LEE S.B. (december 1986) "Term Structure Movements and the Pricing of Interest Rate Contingent Claims", *Journal of Finance*.
- EL KAROUÏ N. and GEMAN H. (mars 1991) "A Stochastic Approach to the Pricing of FRNs", *Risk*.
- EL KAROUÏ N. and GEMAN H. (1991) "The Valuation of General Floating-Rate Notes and Swaps : A probabilistic Approach", *Working paper*, Université Paris IV et Essec. Publié dans *Advances in Futures and Options Research*, JAI Press Inc. 1993.
- EL KAROUÏ N. and ROCHET J.C. (1989) "A Pricing Formula for Options on Coupon-Bonds", *Papier de Recherche*, Université de Paris.
- GEMAN H. (1989) "The Importance of the Forward Neutral Probability in a Stochastic Approach of Interest Rates", *Working Paper*, Essec.
- GEMAN H. and EYDELAND A. (Avril 1995) "Domino Effect : Inverting the Laplace Transform", *Risk*.
- GEMAN H. and YOR M. (1993) "Asian Options, and Perpetuities", *Mathematical Finance*.
- HEATH D., JARROW R. and MORTON A. (1992) "Bond Pricing and the Term Structure of Interest Rates : a New Methodology for Contingent Claims Valuation", *Economica* n° 1, 60.

FORMULES FERMÉES POUR CAPS, FLOORS ET OPTIONS ASIATIQUES

- HULL J. (1993) *Options, Futures, and other Derivatives Securities*, second edition, Prentice-Hall.
- HULL J. and WHITE A. (1993) "One-Factor Interest Rate Models and the Valuation of Interest Rate Derivative Securities", *Journal of Financial and Quantitative Analysis* 28.
- JAMSHIDIAN F. (1989) "An Exact Bond Option Formula", *Journal of Finance*.
- KEMNA AG.Z and VORST A.C.F. (1990) "A Pricing Method for Options Based on Average Asset Values", *Journal of Banking and Finance*, 14.
- LIN JIA (1994) *Evaluation et couverture d'options sur moyenne et produits différentiels*, Thèse, Université de Paris I.
- QUITTARD-PINON F. (1993) *Marchés des capitaux et théorie financière*, Economica, Paris.