JOURNAL DE LA SOCIÉTÉ STATISTIQUE DE PARIS

MICHEL DESCHAMPS

PATRICK TUPSACALIAN

Duration et incertitude des flux : faut-il calculer l'espérance de duration ou la duration de l'espérance des flux ?

Journal de la société statistique de Paris, tome 136, nº 1 (1995), p. 99-106

<http://www.numdam.org/item?id=JSFS_1995__136_1_99_0>

IV

NOTE TECHNIQUE

DURATION ET INCERTITUDE DES FLUX :

Faut-il calculer l'espérance de duration ou la duration de l'espérance des flux ?

par Michel DESCHAMPS
Université de Montpellier I
et Patrick TUPSACALIAN
Ecole Supérieure de Commerce de Montpellier et E.I.A. de Marseille

L'incertitude de la structure des flux est souvent avancée comme un argument rendant moins fiable le concept de duration. A ce dernier, il est quelquefois préféré une approche en terme d'espérance. Ainsi Clark et Rousseau (1991) notent une différence sensible entre deux mesures que sont *la duration* calculée par l'émetteur et *l'espérance de duration* du souscripteur, différence qui s'accroît au fur et à mesure que le différentiel de taux entre le taux de marché et celui de l'obligation croit.

Le but de cet article est de rapprocher ces deux indicateurs afin de montrer qu'il s'agit en fait du même concept et de démontrer que les deux mesures sont équivalentes : la différence mise en évidence n'est liée qu'à un biais mathématique (le calcul, opéré par les auteurs sus-nommés, a été réalisé en terme d'espérance de duration et non à partir de la duration d'espérance de flux). Il ne s'agit pas ici de répondre à un article mais de rechercher les raisons des inégalités que l'on peut constater lorsque l'on se place du point de vue du souscripteur, entre un calcul d'espérance de duration et celui de **duration des espérances de flux** et *de montrer que ce dernier est le seul outil permettant une mesure correcte de l'exposition au risque de taux.*

La duration d'un emprunt obligataire

On peut considérer la duration comme une durée, définie par la formule :

$$D = \frac{\sum_{j=1}^{n} j\, a_j \frac{1}{(1+r)^j}}{\sum_{j=1}^{n} a_j \frac{1}{(1+r)^j}}$$

où :

a_j étant la $j^{\text{ème}}$ annuité,
r, le taux du marché.

C'est une moyenne des années (j) pondérée par les annuités actualisées $\left(a_j \frac{1}{(1+r)^j}\right)$

C'est mathématiquement un barycentre. Si l'on se place du point de vue de l'émetteur, la duration est une notion certaine (non aléatoire). Si l'on se place du point de vue de l'acheteur d'une obligation remboursable annuellement, il est en situation d'incertitude et les annuités qu'il recevra dépendront de l'année de remboursement de son obligation.

L'espérance de duration

On peut définir pour chaque obligation une espérance de duration en calculant pour chaque année de remboursement possible j, la duration de l'obligation d_j.

La duration est alors une variable aléatoire $\tilde{D}$ et en calculant pour chaque année de remboursement j la probabilité P_j que l'obligation soit remboursée à la date j, on obtient l'espérance mathématique de $\tilde{D}$:

$$E(\tilde{D}) = \sum_{j=1}^{n} P_j d_j$$

On remarque qu'en général $E(\tilde{D}) \neq D$
où D est la duration non aléatoire calculée par l'émetteur.

La démarche est donc fondée sur une comparaison de deux indicateurs "distincts" que sont la duration pour l'émetteur et l'espérance de duration pour le souscripteur. A partir d'une telle approche, on peut mettre en évidence les différences obtenues à partir de simulations et de ce fait constater, comme le font Clark et Rousseau, que la différence entre les deux approches est d'autant plus importante que l'écart entre le taux du marché et celui de l'obligation augmente et qu'elle est nulle lorsque les deux taux sont identiques.

Duration des flux aléatoires

Soient les variables aléatoires F_j représentant les valeurs des annuités perçues chaque année par l'acheteur d'une obligation, ces valeurs étant affectées d'une probabilité de les percevoir. F_j est en réalité une somme de deux variables aléatoires :

$$F_j = I_j + R_j$$

avec :

I_j représente l'intérêt prenant les valeurs $I_j = i\, V_N$ avec une probabilité P'_j (décroissante avec j) et si l'obligation est déjà remboursée $P'_j = 1$ et $I_j = 0$.
R_j est le remboursement égal au nominal de l'obligation ; $R_j = V_N$ si l'obligation est remboursée avec une probabilité P_j et $R_j = 0$ si l'obligation n'est pas remboursée.

On peut, pour chacune des variables aléatoires $I_j + R_j$, calculer son espérance mathématique :

$$E(I_j) = P'_j \text{ x } V_N \text{ x i} + (1-P'_j) \text{ x } 0$$
$$E(R_j) = P_j \text{ x } V_N + (1-P_j) \text{ x } 0$$

Sachant que :

$$E(F_j) = E(I_j) + E(R_j)$$

On peut alors calculer la duration de cette espérance de flux :

$$D(E(F)) = \frac{\sum_{j=1}^{n} j\, E(F_j) \frac{1}{(1+r)^j}}{\sum_{j=1}^{n} E(F_j) \frac{1}{(1+r)^j}}$$

On démontre alors que

$$D(E(F)) = D$$

La démonstration est indépendante du mode de remboursement de l'emprunt.

Ainsi, le problème se pose de la manière suivante : le calcul effectué par le souscripteur doit-il être une espérance de duration ou une duration d'espérance de flux ?

Comparaison des deux approches

Si l'on prend différents exemples[1] en considérant un emprunt obligataire de 20 ans, offrant un coupon de 10% et remboursable par annuité constante, on peut calculer la duration et l'espérance de duration quand le taux à maturité varie de 15% à 5% (ce qui semble quand même irréaliste). Le même test a été réalisé avec un coupon variant de 15 à 5% avec un taux à maturité variant de 22,5% à 2,5%.

1. Par simplification nous reprenons les exemples de Clark et Rousseau (1991).

Pour mémoire et comparaison, les tests seront également conduits à partir d'un amortissement constant du capital. Les résultats obtenus sont repris dans les tableaux 1 et 2.

Tableau 1. Calcul de la duration pour l'émetteur et de la duration des flux espérés pour le souscripteur.

Taux de coupon	15 %	15 %	10 %	10 %	5 %	5 %
Taux du marché	22,5 %	7,5 %	15 %	5 %	7,5 %	2,5 %
Maturité	20	20	20	20	20	20
Duration : annuité constante	5,093	8,175	6,635	8,903	8,175	9,682
Duration : amort. constant	4,338	6,635	5,415	7,467	7,260	8,633
Duration des flux espérés :						
– annuité constante	5,093	8,175	6,635	8,903	8,175	9,682
– amort. constant	4,338	6,635	5,415	7,467	7,260	8,633

Tableau 2. Calcul de la duration pour l'émetteur pour le souscripteur avec modification de la maturité et des taux.

Maturité	4	10	20	4	10	20
Taux du marché	15 %	15 %	15 %	5 %	5 %	5 %
Duration :						
- annuité constante	2,326	4,383	6,365	2,439	5,099	8,903
- amort. constant	2,229	3,932	5,416	2,340	4,586	7,467
Duration des flux espérés :						
– annuité constante	2,326	4,383	6,365	2,439	5,099	8,903
– amort. constant	2,229	3,932	5,416	2,340	4,586	7,467

On constate dans ces deux tableaux que la duration calculée par l'émetteur et celle calculée par le souscripteur à partir de l'espérance des flux sont identiques.

Si l'on reprend les calculs réalisés à partir de l'espérance de duration, (tableaux 3 et 4), et si on les rapproche de celui de la duration de l'espérance des flux, on a :

Tableau 3. Comparaison entre les différentes approches avec évolution des taux.

Taux de coupon	15 %	15 %	10 %	10 %	5 %	5 %
Taux du marché	22,5 %	7,5 %	15 %	5 %	7,5 %	2,5 %
Maturité	20	20	20	20	20	20
Duration d'espérance de flux – annuité constante – amort. constant	 5,093 4,338	 8,175 6,635	 6,365 5,416	 8,903 7,467	 8,175 7,260	 9,682 8,633
Espérance de duration : – annuité constante – amort. constant	 5,142 4,471	 7,995 6,272	 6,492 5,618	 8,628 7,073	 8,422 7,536	 9,,359 8,273

Tableau 4. Comparaison entre les différentes approches avec des maturités différentes.

Maturité	4	10	20	4	10	20
Duration d'espérance de flux – annuité constante – amort. constant	 2,326 2,229	 4,383 3,932	 6,365 5,416	 2,439 2,340	 5,099 4,586	 8,903 7,467
Espérance de duration : – annuité constante – amort. constant	 2,363 2,267	 4,503 4,065	 6,492 5,618	 2,399 2,299	 4,941 4,411	 8,628 7,073

Les constats :
– lorsque l'on calcule l'espérance de duration, si les résultats obtenus ne sont pas toujours identiques à ceux obtenus dans leur article par Clark et Rousseau, cela est dû au fait que ces auteurs calculent la duration sur un amortissement constant et non sur une annuité constante, comme il est dit.
– l'écart que l'on constate entre la duration d'espérance de flux et l'espérance de duration est en fait un biais lié au mode de calcul.

Conclusion

Si l'on admet (Sulzer, 1986) qu'il existe une durée de détention qui immunise le portefeuille contre une variation éventuelle des taux d'intérêt à long terme et que cette immunisation peut être réalisée en détenant les titres pendant leur duration, il est aisé de contrôler que cette immunisation ne peut pas avoir lieu à partir de l'espérance de duration. En effet, si l'on calcule pour n'importe quelle valeur des taux en t, la valeur de l'obligation à la période de la duration (dans le cadre d'un calcul à partir de l'espérance des flux), on constate que celle-ci reste identique (réinvestissement des coupons). *Dans le cadre d'une espérance de duration, on peut mesurer le biais mathématique qui est égale au non-réinvestissement des flux sur la différence de duration calculée.*

Comme le démontre l'annexe 1, *la duration des espérances de flux n'est pas égale à l'espérance de duration.*

Dans cet article, l'objet recherché était de mettre en avant les écarts de calcul pouvant intervenir entre d'une part une approche en terme d'espérance de duration et d'autre part de duration d'espérance des flux.

Au-delà d'une simple réponse à l'article de Clark 1 Rousseau (1991), il s'est agit de montrer que **la seule approche valide est en fait la duration d'espérance de flux.**

RÉFÉRENCES

CLARK E. et ROUSSEAU P. (1991) "Bond Duration with Uncertain Cash flows", *J. of International Securities Markets*, pp. 29-33, Spring.

SULZER J.R. "Immunisation et duration d'un portefeuille obligataire", *Cahiers de recherche du CRIEGE*, n° 103, (1986).

Annexe 1 : Généralisation du problème par l'approche mathématique.

Si l'on considère la k ième obligation de l'emprunt et F_j^k le flux de cette obligation à la date j, on a : $\sum_{k=1}^{N} F_j^k = a_j$

d'où : $$E\left(\sum_{k=1}^{N} F_j^k\right) = E(a_j)$$

Or pour l'émetteur, l'annuité a_j à la date j est certaine, donc E $(a_j) = a_j$

$$E\left(\sum_{k=1}^{N} F_j^k\right) = a_j$$

Or : $$E\left(\sum_{k=1}^{N} F_j^k\right) = \sum E(F_j^k)$$

donc : $$a_j = \sum_{k=1}^{N} E(F_j^k)$$

et on a : $$D = \frac{\sum_{j=1}^{n} j\, a_j \frac{1}{(1+r)^j}}{\sum_{j=1}^{n} a_j \frac{1}{(1+r)^j}}$$

$$D = \frac{\sum_{j=1}^{n} j\left(\sum_{k=1}^{N} E(F_j^k)\right) \frac{1}{(1+r)^j}}{\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{N} E(F_j^k)\right) \frac{1}{(1+r)^j}}$$

Or $E(F_j^k)$ est indépendante de k (c'est une variable aléatoire identique pour chaque obligation).

$$E(F_j^k) = E(F_j)$$

donc : $$\sum_{k=1}^{N} E(F_j^k) = NE(F_j)$$

$$D = \frac{\sum_{j=1}^{N} j\, N\, E(F_j) \frac{1}{(1+r)^j}}{\sum_{j=1}^{N} N\, E(F_j) \frac{1}{(1+r)^j}}$$

en simplifiant par N :

$$D = \frac{\sum_{j=1}^{N} j\, E(F_j) \frac{1}{(1+r)^j}}{\sum_{j=1}^{N} E(F_j) \frac{1}{(1+r)^j}}$$

d'où :

$$D = D\,(E(\tilde{F}))$$

et :

$$E\,(\tilde{D}) \neq D\,(E(\tilde{F}_j))$$

La raison de la non égalité provient du fait que la duration D n'est pas une fonction linéaire des flux.