JOURNAL DE LA SOCIÉTÉ STATISTIQUE DE PARIS

JÉRÔME PAGÈS

Approche par estimation de l'essai triangulaire

Journal de la société statistique de Paris, tome 135, nº 3 (1994), p. 21-44

<http://www.numdam.org/item?id=JSFS_1994__135_3_21_0>

III

ARTICLES

APPROCHE PAR ESTIMATION DE L'ESSAI TRIANGULAIRE

par Jérome PAGÈS
École Nationale Supérieure Agronomique de Rennes (ENSAR)*

Résumé

L'essai triangulaire est sans doute la plus connue des épreuves d'évaluation sensorielle. Ses résultats sont habituellement analysés au travers d'un test statistique.

Nous étudions ici une approche par estimation des résultats de cet essai, dans le cadre d'un modèle simple, en distinguant deux niveaux d'inférence (celui du jury et celui de la population dont ce dernier est éventuellement extrait).

Summary

Triangle test is the most known of the sensory evaluation techniques. Its results are usually analysed through a statistical test.

We investigate the analysis of triangle test results by the way of estimation. We use a classic model and distinguish two inference levels (subjects and population from it is eventually extracted).

We point out the danger in interpretation of triangle test results in the case of a small number of subjects.

* ENSAR : 65, rue de Saint-Brieux, 35042 Rennes Cedex.
Exposé réalisé aux journées technologiques sur l'évaluation et la gestion de la qualité dans l'industrie agro-alimentaire de Vannes les 13-14 juin 1994.

1. Présentation classique de l'essai triangulaire

L'essai triangulaire est une méthodologie qui vise à évaluer la différence sensorielle entre deux produits. La question que se pose classiquement l'utilisateur est : existe-t-il une différence perçue entre les deux produits ?

Pour cela on met en œuvre le schéma expérimental suivant :

- On présente à chaque membre d'un jury de dégustateurs trois échantillons dont deux correspondent à l'un des produits étudiés et le troisième à l'autre produit.

- Ces trois échantillons sont présentés à chaque dégustateur indépendamment et de façon anonyme : chaque dégustateur doit indiquer quel échantillon est, selon lui, différent des deux autres. Le choix est forcé : le dégustateur est tenu de fournir une réponse même s'il ne perçoit pas de différence ; dans ce dernier cas il répond au hasard.

- On totalise pour l'ensemble du jury le nombre d'identifications correctes observées. L'interprétation de ce nombre d'identifications correctes s'effectue selon une procédure de test, décrite ci-après, empruntée à la statistique inférentielle.

- On se place dans le cadre de l'hypothèse H_0 selon laquelle aucun dégustateur ne perçoit la différence entre les produits (autrement dit tous les dégustateurs répondent au hasard). Il est clair que, même dans ce cas, le nombre d'identifications correctes observées est généralement différent de 0 (concrètement, un dégustateur qui répond au hasard a une chance sur trois de fournir une identification correcte).

- À l'aide d'un calcul de probabilité, on détermine un seuil S au-delà duquel un nombre d'identifications correctes observées est peu vraisemblable dans le cadre de l'hypothèse H_0. La quantification de « peu vraisemblable » pose problème : en pratique on calcule S tel que la probabilité d'observer un nombre d'identifications correctes supérieur à S (alors que tous les dégustateurs répondent au hasard) est inférieure ou égale à .05 (cette probabilité étant fixée, la valeur de S ne dépend que de la taille du jury : il existe une table qui donne la valeur de S en fonction de la taille du jury).

- Connaissant le seuil S et le nombre d'identifications correctes observées X, la règle de décision est la suivante :
  $X \geq S$: on considère qu'il existe une différence perçue entre les produits ;
  $X < S$: on considère qu'il n'y a pas de différence perçue entre les produits.

Selon une autre façon de procéder, on calcule la probabilité P d'observer au moins X identifications correctes dans le cadre de H_0 ; la décision découle alors de la comparaison entre P et le seuil fixé (.05) ; cette démarche est équivalente à la précédente, mais la connaissance de P permet éventuellement de nuancer la conclusion.

2. Modèle et inférence

2.1. Trois modèles

Plusieurs modèles sont possibles pour appréhender un essai triangulaire. Nous en mentionnons trois.

Modèle 1 : uniformité des individus

La probabilité $\mathcal{P}$ de fournir une bonne réponse est identique pour chaque individu. L'utilisateur attend de l'essai une estimation de $\mathcal{P}$ et une aide pour décider ou non de considérer $\mathcal{P}$ comme assimilable à $\mathcal{P}_0 = 1/3$ (absence de reconnaissance réelle). Ce modèle est intéressant par la prise en compte d'une forme de variabilité intra-individuelle (le même individu est capable de différencier à certains moments et non à d'autres) ; il est irréaliste par l'absence de prise en compte d'une variabilité inter--individuelle (il suppose que tous les individus ont les même aptitudes sensorielles).

Attention : dans ce modèle, $\mathcal{P}$ est non seulement constant d'un individu à l'autre mais aussi constant d'une épreuve à l'autre pour un même individu. Le fait de considérer $\mathcal{P}$ comme une sorte d'espérance pour un juge constitue un autre modèle, qui ne correspond pas au traitement usuel, et que nous ne faisons que mentionner ici.

Modèle 2 : savoir ou ne pas savoir

Chaque individu sait ou ne sait pas distinguer les produits étudiés. L'utilisateur attend de l'essai une estimation de la proportion p d'individus qui savent différencier les deux produits et une aide pour décider ou non de considérer cette proportion p comme égale à 0. À la différence du précédent, ce modèle prend en compte une variabilité inter-individuelle mais n'intègre pas de variabilité intra-individuelle.

Ce modèle rend compte d'une situation instantanée : à un instant donné, face à une épreuve triangulaire, un dégustateur perçoit ou non la différence entre les deux produits.

Modèle 3 : probabilités individuelles

Chaque individu i sait différencier avec la probabilité $\mathcal{P}_i$. L'utilisateur attend de l'essai une estimation de la distribution des $\mathcal{P}_i$ et une aide pour décider ou non de considérer cette distribution comme uniforme avec $\mathcal{P}_i = 1/3$.

S'intéresser à la distribution des $\mathcal{P}_i$ nécessite de réaliser plusieurs essais triangulaires identiques avec le même jury. Dans le cadre d'un seul essai on se restreint à estimer la moyenne des p_i.

Le modèle 1 est un cas particulier du modèle 3 dans lequel $\mathcal{P}_i = \mathcal{P}$ quel que soit i. Le modèle 2 est un cas particulier du modèle 3 dans lequel $\mathcal{P}_i$ vaut 1/3 ou 1.

Discussion

Dans les présentations courantes de l'analyse statistique des résultats d'un essai triangulaire au moyen d'un test, le modèle utilisé n'est pas précisé. Cette omission est rendue possible car l'hypothèse H_0 est identique dans les 3 modèles. Il en est différemment dès que l'on aborde le problème sous l'angle de la puissance du test ou de l'estimation.

Le modèle 1, qui ne prend pas en compte de variabilité intra-individuelle, (dont la réalité est établie), est trop peu réaliste pour être adopté.

Le modèle 3, est le plus séduisant. Mais sa prise en compte de la variabilité intra-individuelle n'est opérationnelle que si l'on sait aborder la distribution des $\mathcal{P}_i$:

- soit de façon théorique, ce qui semble difficile dans l'état des connaissances actuelles ;
- soit de façon empirique, ce qui nécessite un recueil d'information très lourd.

Aussi l'exposé est-il centré sur le modèle 2, les deux autres n'étant mentionnés qu'à l'occasion.

2.2. Deux niveaux d'inférence

Du fait du choix forcé, qui engendre des réponses au hasard, un jury d'essai triangulaire ne doit pas être considéré comme un échantillon au sens usuel des sondages. Dans le cas usuel d'un sondage, les réponses recueillies présentent un caractère certain vis-à-vis des individus échantillonnés et l'on essaie de généraliser ces réponses à une population plus vaste. Dans le cas de l'essai triangulaire, les réponses ne présentent pas ce caractère certain en ce sens que l'on ne sait pas si une réponse correcte a été le fruit du hasard ou non.

Le *premier niveau d'inférence* est donc celui du jury lui-même. À partir d'un ensemble de réponses, on souhaite connaître le jury. Le problème de la représentativité du jury ne se pose pas ici : les calculs de risques proposés par l'inférence classique sont licites.

Le *second niveau d'inférence* consiste à généraliser les résultats du jury à une population plus vaste. Dès lors se pose le problème de la représentativité du jury. Les calculs de risques de l'inférence classique, qui supposent un tirage aléatoire de l'échantillon, ne s'appliquent généralement pas aux situations réelles. En toute rigueur, l'inférence à ce niveau ne peut pas être formalisée.

Remarques

A. Selon l'hypothèse H_0, tous les juges sont identiques : si le jury est tiré au hasard, la règle de décision est la même pour les deux niveaux d'inférence. En revanche, les calculs d'estimation et de puissance diffèrent dans les deux cas, ce qui est étudié par la suite.

B. Lorsque l'on adopte le modèle 2 et que le jury est tiré au hasard, on considère la probabilité d'obtenir une réponse correcte en tirant un juge au hasard. Cette probabilité, combine le hasard dû au tirage du juge et celui dû à la réponse du juge. Elle vaut : $(1 + 2p)/3$.

3. Nécessité d'une approche par estimation

La question posée usuellement « existe-t-il une différence perçue entre les deux produits ? » n'est en fait adaptée qu'à un nombre restreint de situations concrètes. En effet les produits étudiés diffèrent toujours physiquement (différence due à la composition des matières premières, au procédé de fabrication...). Le problème n'est donc pas tant l'existence d'une différence perçue que celui de l'appréciation de son importance. Ainsi, dans le cadre du modèle 1 (ou 3) on cherche à apprécier dans quelle mesure $\mathcal{P}$ (ou les $\mathcal{P}_i$) diffère(nt) de 1/3. Dans le cadre du modèle 2, on cherche à apprécier le nombre (ou la proportion) de personnes qui perçoivent une différence entre les produits.

En termes statistiques, on dira que la problématique de la comparaison entre produits relève de l'estimation et non du test.

Il n'en reste pas moins qu'une comparaison de produits doit conduire généralement à une décision. Dans cette approche, l'alternative n'est plus l'*existence* ou non d'une différence mais sa *prise en compte* ou non. Autrement dit, on peut décider de tenir compte du pourcentage d'individus percevant la différence entre les deux produits, ou au contraire de le négliger. À ce niveau la décision est entre les mains de l'utilisateur qui peut faire intervenir dans son raisonnement toute donnée extérieure au test proprement dit mais liée au problème (coûts de production, parts de marché...). Concrètement, cela revient à déterminer un seuil P_s en deçà duquel on décide de négliger le pourcentage d'individus percevant la différence étudiée.

L'empirisme dans le choix de P_s peut gêner ; on peut réduire cet empirisme en calculant les coûts associés aux différents types d'erreur que l'on peut commettre mais ce genre de calcul n'est réalisable que dans des cas très particuliers. En fait il faut bien voir que tout problème de décision dans l'incertain comporte des risques (par exemple même si tous les dégustateurs répondent au hasard, il est possible, quoique peu probable, que toutes les identifications observées soient correctes). Le choix d'une règle de décision équivaut à l'acceptation d'un risque : la théorie de la décision enseigne que ce risque peut prendre deux formes (les risques de première et de seconde espèce). Dans l'approche classique de l'essai triangulaire, le choix des risques se fait par l'intermédiaire de la probabilité associée au seuil S. Dans l'approche par estimation il se fait en déterminant P_s.

4. Estimation du nombre d'individus sachant distinguer les deux produits

4.1. Problème

À partir du nombre X d'identifications correctes observées, on souhaite distinguer :

- le nombre de celles dues à une aptitude du dégustateur ;
- le nombre de celles dues au hasard.

D'un point de vue très schématique, le problème revient à retrancher du nombre d'identifications correctes observées le nombre le plus probable de celles dues au hasard.

Pour fixer les idées, considérons un essai triangulaire réalisé à l'aide d'un jury de $I = 40$ dégustateurs parmi lesquels $N = 10$ dégustateurs savent effectivement différencier les deux produits. L'espérance du nombre d'identifications correctes observées est :

$$N + (I - N)\,(1/3)$$

soit numériquement :

$$10 + (40 - 10)\,(1/3) = 20.$$

Ainsi, dans ce cas, bien que seulement dix dégustateurs savent effectivement différencier les produits, on observe en moyenne vingt bonnes réponses.

4.2. Estimations fournies par la méthode des moments

Cette espérance suggère une première méthode d'estimation du nombre N dans laquelle on identifie le nombre de réponses correctes observées (noté X) avec son espérance (cette procédure se réfère à la méthode générale d'estimation connue sous le nom de méthode des moments).

De l'égalité :

$$N + (I - N)\,(1/3) = X$$

il résulte une première estimation de N :

$$N_1 = (3X - I)/2.$$

L'estimateur associé de la proportion p ($= N/I$) est : $P_1 = N_1/I$.

En fait, si $X < I/3$, N_1 est négatif ce qui n'est évidemment pas admissible. On utilise donc plutôt un estimateur borné :

$$N_2 = \max\,(N_1, 0).$$

L'estimateur associé de la proportion p ($= N/I$) est : $P_2 = N_2/I$.

4.3. Estimation fournie par la méthode du maximum de vraisemblance

Pour chaque valeur de N possible, $(0 \leq N \leq X)$, on calcule la probabilité d'observer X. Cette probabilité est appelée vraisemblance de X. On retient comme estimation de N la valeur associée à la plus forte probabilité. Cette procédure se réfère à la méthode générale d'estimation connue sous le nom de méthode du maximum de vraisemblance (MMV).

On note N_3 cet estimateur et $P_3 = N_3/I$ l'estimateur associé de la proportion p.

Remarques

Pour cet estimateur le problème des estimations négatives ne se pose pas.

On justifie plus loin (cf. § 11.1) que, lorsque plusieurs valeurs présentent la même vraisemblance, il convient de choisir la plus petite.

Exemple numérique illustrant la MMV

$I = 5$ dégustateurs ; $X = 2$ bonnes réponses observées.

- Si $N = 0$, les 5 dégustateurs répondent au hasard et la probabilité d'observer 2 bonnes réponses vaut $B\,(2\,;\,5,\ 1/3)$, probabilité de la valeur 2 pour la loi binomiale de paramètre 5 et 1/3. Soit : $P\,(X = 2 \mid N = 0) = .329$.
- Si $N = 1$, une seule bonne réponse est due au hasard et sa probabilité d'apparition vaut $B\,(1\,;\,4,\ 1/3)$ (on a éliminé du calcul de probabilité le dégustateur apte à différencier les produits ainsi que sa bonne réponse). Soit :
$$P\,(X = 2 \mid N = 1) = .395.$$
- Si $N = 2$, aucune bonne réponse est due au hasard. Les trois dégustateurs qui répondent au hasard ont tous fourni une mauvaise réponse, événement dont la probabilité vaut $B\,(0\,;\,3,\ 1/3)$. Soit :
$$P\,(X = 2 \mid N = 2) = .296.$$

Dans cette exemple, la méthode du maximum de vraisemblance conduit à choisir la valeur de 1 comme estimation de N.

4.4. Relations entre les deux estimations

Dans l'exemple numérique précédent, l'estimation fournie par la méthode des moments vaut 0.5 et est donc très proche de celle fournie par la MMV.

Ce résultat est général : dans le cas de l'essai triangulaire, on peut montrer que l'estimation du maximum de vraisemblance est égale au nombre entier égal ou immédiatement supérieur à l'estimation bornée de la méthode des moments (cf. § 11.1).

En pratique on dispose donc d'une seule estimation. Le fait que cette estimation puisse être obtenue selon deux méthodes lui confère plusieurs avantages. La première méthode fournit une formule de calcul ayant une grande simplicité. La seconde méthode, apporte une meilleure justification théorique (et les propriétés techniques qui en résultent), ainsi que la fonction de vraisemblance.

4.5. Biais associé aux estimations

On montre que l'estimateur N_1 (et donc P_1) est sans biais (cf. § 11.2).

Ainsi, les estimateurs N_2 et N_3 (et donc P_2 et P_3) sont biaisés. La formulation analytique du biais semble difficile à obtenir. À défaut on peut obtenir ces valeurs cas par cas à l'aide d'un calcul direct explicité au paragraphe 11.3. Le tableau 1 met en évidence les biais de P_2 et P_3 dans quelques cas de référence.

Tableau 1. Quelques valeurs de l'espérance des estimateurs P_2 et P_3 pour les deux niveaux d'inférence, trois tailles de jury (10, 20 et 100 juges) et six proportions réelles.

	Niveau jury						Niveau population					
	10 juges		20 juges		100 juges		10 juges		20 juges		100 juges	
p	P_2	P_3	P_2	P_3	P_2	P_3	P_2	P_3	P_2	P_3	P_2	P_3
0.0	.091	.099	.064	.071	.028	.029	.091	.099	.064	.071	.028	.029
0.1	.144	.156	.122	.133	.102	.104	.152	.164	.127	.138	.103	.105
0.2	.216	.233	.204	.216	.200	.202	.227	.244	.209	.221	.200	.203
0.5	.500	.525	.500	.512	.500	.502	.501	.526	.500	.513	.500	.502
0.8	.800	.822	.800	.812	.800	.802	.800	.824	.800	.812	.800	.802
0.9	.900	.933	.900	.911	.900	.902	.900	.919	.900	.912	.900	.902

Ainsi, par exemple, lorsqu'un jury de vingt personnes comporte quatre juges réellement aptes à différencier les produits ($p = .2$), l'estimateur P_3 conduit à une valeur de .216 en moyenne.

Les valeurs du biais sont suffisamment faibles pour être négligées. Tout au plus, elles incitent à être méfiants à l'égard des estimations très faibles.

5. Exemple réel : trois crèmes de Cognac

5.1. Données

Ces données ont été fournies par J. J. Maugas (COLARENA) et M. Roignant (ENSAR). Trois crèmes de Cognac, notées *A*, *B*, *C* sont comparées. Les crèmes *A* et *B* diffèrent par le procédé de fabrication ; les crèmes *A* et *C* diffèrent par la durée de vieillissement. On a comparé *A* et *B* d'une part, *A* et *C* d'autre part. Les résultats bruts sont les suivants :

Produits comparés	*A* / *B*	*A* / *C*
Nombres de juges	46	39
Nb. identifications correctes	13	17

5.2. Comparaison entre les produits *A* et *B* (influence du procédé de fabrication)

Sur quarante six juges, on a observé treize identifications correctes. L'estimation du nombre d'individus sachant effectivement distinguer les deux produits est 0 (cf. figure 1 § 11.4).

Ce résultat est en accord avec la démarche classique. Pour quarante six juges répondant au hasard (hypothèse H_0), la probabilité d'observer au moins treize bonnes réponses est .811 (cf. table § 11.5) ; cette probabilité conduit à accepter l'hypothèse H_0 (selon laquelle toutes les réponses sont dues au hasard) lorsque l'on se fixe un risque de première espèce de 0.05.

5.3. Comparaison entre les produits A et C (influence du vieillissement)

Sur trente neuf juges on a observé dix-sept identifications correctes. L'estimation du nombre d'individus sachant effectivement distinguer les deux produits est 6 (cf. figure 2 § 11.4).

Ce résultat est en désaccord avec la démarche classique. Pour trente neuf juges répondant au hasard (hypothèse H_0), la probabilité d'observer au moins dix-sept bonnes réponses est .118 (cf. table § 11.5) ; cette probabilité conduit à accepter l'hypothèse H_0 (selon laquelle toutes les réponses sont dues au hasard) lorsque l'on se fixe un risque de première espèce de 0.05.

Remarquons que la vraisemblance de la valeur $N = 0$ est trois fois plus petite (.053 contre .146) que celle de la valeur $N = 6$. Autrement dit, la valeur observée 17 est trois fois plus probable sous l'hypothèse $N = 6$ que sous l'hypothèse $N = 0$. Ceci justifie le choix de $N = 6$ plutôt que $N = 0$. Signalons que les valeurs 7, 5 et 8 ont une vraisemblance égale ou comparable à celle de $N = 6$: en ce sens ces valeurs constituent aussi des estimations acceptables.

6. Essai triangulaire couplé avec un classement

6.1. Prise en compte de l'estimation des vraies bonnes réponses

Dans certains cas on souhaite associer un classement à un essai triangulaire. Ce classement peut correspondre à une particularité des produits – par exemple on demande quel est le produit le plus salé – ou à une appréciation hédonique globale.

Pour simplifier l'exposé nous nous plaçons dans ce dernier cas. Autrement dit, s'il apparaît une différence perceptible entre les deux produits, on peut désirer connaître si un produit est préféré à l'autre. Il n'est pas discuté ici de l'intérêt et de la portée des questions de préférence, en général ou couplées avec un essai triangulaire : nous examinons seulement en quoi l'approche par estimation de l'essai triangulaire modifie la façon de prendre en compte les classements lorsqu'ils sont associés à cet essai.

Soit :

- A et B — les deux produits comparés ;
- X — le nombre d'identifications correctes observées ;
- Y — le nombre d'identifications correctes dues au hasard ($Y < X$; le cas $Y = X$ est sans intérêt du point de vue des préférences) ;

R_a (resp. R_b) le nombre de préférences exprimées pour A (resp. B) ; $R_a + R_b = X$: on ne prend en compte que les préférences exprimées par les individus ayant identifié correctement les produits ;

P_a (resp. P_b) la proportion de préférences pour A (resp. B)

Parmi les individus ayant identifié correctement les produits, certains ont donné une identification correcte par hasard. Le raisonnement suivant vise à extraire de l'ensemble des préférences la part associée aux identifications correctes dues au hasard. Si un individu ne sait pas différencier (même s'il croit le contraire) les produits A et B, il attribue sa préférence au hasard, c'est-à-dire avec une probabilité 1/2 pour chaque produit (le fait que l'un des produits est en double n'intervient pas ici puisque l'on se limite aux identifications correctes, dues au hasard ou non).

Le nombre corrigé de préférences pour A s'obtient en retirant de R_a la part due au hasard (en espérance), soit : $Rc_a = R_a - Y/2$.

Cet estimateur, étant fondé sur une espérance, peut conduire à des estimations extérieures à l'intervalle $(0, X - Y)$. Lorsque c'est le cas, on se ramène à cet intervalle en remplaçant $(Rc_a - Y/2)$ par la borne de l'intervalle $(0, X - Y)$ qui est franchie. Soit, formellement :

$$Rc_a = \min\left(\max\left(Rc_a - Y/2,\ 0\right),\ X - Y\right)$$

La proportion corrigée de préférence pour A s'écrit donc :

$$Pc_a = Rc_a/(X - Y) \quad \text{(rappel : } Y < X\text{).}$$

6.2. Exemple des crèmes de Cognac

Comparaison entre les produits A et B

Parmi les treize dégustateurs ayant identifié correctement les deux produits, six ont déclaré préférer le produit A.

La conclusion précédente, selon laquelle toutes les réponses sont dues au hasard – qui implique une équirépartition des préférences exprimées – n'est pas contredite par les préférences équilibrées entre les deux produits.

Comparaison entre les produits A et C

Parmi les dix-sept personnes ayant identifié correctement les deux produits, quatorze ont déclaré préférer C. La conclusion précédente, selon laquelle une minorité d'individus est capable de distinguer les produits, est renforcée par le bilan des préférences. En effet, parmi les dégustateurs ayant correctement identifié les produits, il se dégage, après correction, un consensus parfait en faveur du produit C.

$$X = 17 \,;\ Y = 11 \,;\ R_a = 3 \,;\ R_c = 14$$

$$Rc_a = 0 \,;\ \text{car } (3 - 11/2) < 0)$$

$$Rc_c = 6 \,;\ \text{car } (14 - 11/2) > (17 - 11)$$

d'où :

$$Pc_a = 0 \,;\ Pc_c = 1.$$

7. Incertitude liée à l'essai triangulaire

Comme tout problème de décision dans lequel l'aléatoire intervient, les résultats d'un essai triangulaire sont empreints d'incertitude. Nous donnons ici quelques points de repère pour évaluer cette incertitude en adoptant successivement les points de vue de l'estimation et du test.

7.1. Précision de l'estimation

Le problème consiste à estimer, dans le cadre du modèle 2, la proportion d'individus sachant différencier les produits.

Cas de P_1

La variance de P_1 dépend de la valeur de la proportion p que l'on cherche à estimer et du niveau d'inférence auquel on se place (détail du calcul : cf. § 11.2).

Niveau 1 : estimation pour le jury

$$V_1(P_1) = (1-p)/(2I).$$

Niveau 2 : estimation pour une population dont le jury est extrait aléatoirement

$$V_2(P_1) = (1+p-2p^2)/(2I) = V_1(P_1)(1+2p) = V_1(P_1) + p(1-p)/I$$

Remarques

- La variance est plus grande dans le cas du niveau 2 que dans le cas du niveau 1 ; l'écart brut $V_1(P_1) - V_2(P_1)$ entre les variances est surtout sensible lorsque l'on estime des proportions voisines de .5 ; l'écart en pourcentage
$$\big(V_1(P_1) - V_2(P_1)\big)/V_1(P_1)$$
est surtout sensible lorsque l'on estime de fortes proportions.
- Dans les deux cas, lorsque p se rapproche de 1, la variance se rapproche de 0. À la limite, si $p = 1$, l'estimateur ne peut prendre qu'une seule valeur et sa variance est nulle.
- Dans les deux cas la variance est proportionnelle à $1/I$: l'incertitude liée à l'estimation est d'autant plus petite que le jury est grand. L'incertitude étant proportionnelle à l'écart-type, pour diviser cette incertitude par k il faut multiplier l'effectif par k^2.

Cas de P_2

Le calcul de variance ne peut être réalisé de façon analytique simple pour P_2. En revanche les valeurs peuvent être calculées de façon directe dans chaque cas (cf. annexe 11.3). C'est ce qui est fait dans le tableau 2 qui donne le double de l'écart type de P_2 dans quelques cas de figure. Ce calcul se réfère à celui d'un intervalle de confiance associé à une probabilité de .95 dans le cas d'une loi normale. Naturellement la loi exacte des estimateurs n'est pas une loi normale : en particulier cette loi est bornée par 0 et 1 lorsque l'on souhaite réaliser l'inférence au niveau de la population et par 0 et X/I lorsque l'on se limite au niveau du jury. Toutefois ce calcul est suffisant pour donner quelques ordres de grandeur.

Tableau 2. Valeurs du double de l'écart type des estimateurs de p, pour les deux niveaux d'inférence, trois tailles de jury (10, 20 et 100 juges) et six proportions réelles.

	Niveau jury						Niveau population					
	10 juges		20 juges		100 juges		10 juges		20 juges		100 juges	
p	P_2	P_3	P_2	P_3	P_2	P_3	P_2	P_3	P_2	P_3	P_2	P_3
0.0	.271	.294	.189	.197	.084	.086	.271	.293	.189	.197	.084	.086
0.1	.321	.345	.242	.246	.127	.128	.341	.365	.257	.262	.137	.137
0.2	.355	.377	.268	.270	.126	.127	.395	.417	.303	.306	.149	.149
0.5	.316	.319	.224	.225	.100	.100	.439	.446	.316	.317	.141	.141
0.8	.200	.227	.141	.145	.063	.063	.322	.320	.228	.230	.102	.102
0.9	.141	.094	.100	.113	.045	.045	.237	.219	.167	.166	.075	.075

Ainsi, pour un jury comportant vingt personnes, et une proportion estimée de l'ordre de 50 %, le demi intervalle de confiance dans l'estimation P_2 au niveau du jury vaut .224 ; par exemple, à une estimation ponctuelle de 50 %, l'estimation par intervalle est (27.6 %, 72.4 %).

Remarque

Avec les tailles de jury usuelles, l'incertitude sur l'estimation est très grande, sauf si la quasi-totalité des juges sait réellement différencier les produits. Le tableau 3 montre dans quelle mesure, lorsque la quasi-totalité des réponses est correcte, on peut considérer comme très vraisemblable, même avec un jury de dix personnes, que la quasi-totalité des juges sait effectivement différencier les produits.

Tableau 3. Probabilité d'obtenir X, sachant I et N.

	$I = 10$		
N	$X = 10$	$X = 9$	$X = 8$
4	.001	.026	.082
5	.004	.041	.165
6	.012	.099	.296
7	.037	.222	.444
8	.111	.444	.444
9	.333	.667	
10	1		

I : nombre total de juges ; X : nombre de réponses correctes observées ; N : nombre de juges sachant réellement différencier les deux produits.

7.2. Puissance du test usuel

Problème

Comme toujours pour ce type de test, la règle de décision est construite en se plaçant dans le cadre de l'hypothèse H_0 (tous les individus répondent au hasard). Comment se comporte-t-elle lorsque H_0 n'est pas vraie ? Rappelons que l'hypothèse alternative à H_0, notée H_1, est dans le cas du modèle 2 : il existe au moins un individu dont la probabilité de bonne réponse est 1. Dans quelle mesure la règle conduit à une bonne décision dans le cas H_1 ? Telles sont les questions abordées sous le terme de puissance du test.

Si l'on adopte le cadre du modèle 1, il n'y a pas de problème de tirage au hasard du jury puisque tous les juges sont identiques. Le niveau d'inférence du test ne dépend que de la façon dont les juges ont été choisis et n'a pas d'incidence sur les calculs.

Si l'on adopte le cadre du modèle 2, les calculs de puissance, comme ceux relatifs à l'estimation, dépendent du niveau d'inférence choisi. Le niveau de la population a déjà été étudié par Schlich dont les tables mettent en évidence la très faible puissance du test triangulaire. Le jury n'étant en général pas tiré au hasard, on peut se demander si la puissance n'est pas sensiblement meilleure lorsque le niveau d'inférence est celui du jury.

Exemples de calculs de puissance lorsque le niveau d'inférence est le jury

Par définition la puissance d'un test est : P[accepter H_1 alors que H_1 est vraie] ; elle est le complément à 1 du risque de seconde espèce. Le calcul de la puissance se heurte au caractère composite de H_1 ; ce calcul doit donc être réalisé pour chaque spécification de H_1.

Est détaillé ci-après le cas d'un jury de dix personnes et d'un risque de première espèce de .05.

Règle de décision fournie par la table usuelle :

$X \geq 7$: rejet de H_0

$X < 7$: acceptation de H_0

α vaut ici .020, probabilité d'observer une valeur supérieure à 7 dans le cadre d'une loi binomiale $B(10, 1/3)$. Cette valeur est sensiblement inférieure à .05 mais le seuil de 6 conduit à une valeur de .077 pour α.

Calcul de la puissance pour l'hypothèse H_1 suivante : 20 % du jury sait réellement différencier les produits.

Dans le cadre de H_1 :

2 juges fournissent toujours une bonne réponse ;

8 répondent au hasard.

La probabilité d'observer au moins sept bonnes réponses est celle d'observer au moins 5 (i.e. 7-2) bonnes réponses parmi les 8 juges qui réponsent au hasard soit celle de dépasser 5 dans le cadre d'une loi binomiale $B(8, 1/3)$. Soit : .088.

Ainsi, avec un jury de dix personnes, si 20 % d'entre elles savent différencier les produits, la règle usuelle conduit à une bonne décision dans 8.8 % des cas. Le risque de seconde espèce vaut ici $1 - 0.088 = .912$! ! Le moins que l'on puisse dire est que dans ce cas les risques sont loin d'être équilibrés.

Le tableau 4 récapitule quelques cas : avec les tailles usuelles de jury, les risques α et β sont loin d'être équilibrés lorsque l'on considère des hypothèses alternatives voisines de .20.

Tableau 4. Valeur de la puissance du test usuel dans quelques cas.

I	α	seuil	H_1	β	η
10	.020	7	.40 .20	.680 .912	.320 .088
20	.038	11	.40 .20	.181 .737	.819 .263
30	.043	15	.40 .20	.033 .594	.967 .406

I nombre de juges ;

α risque de première espèce (est rarement égal exactement à 0.05 du fait de la discontinuité de la loi binomiale) ;

seuil valeur (associée à α) à partir de laquelle on rejette H_0 ;

H_1 hypothèse alternative spécifiée par la proportion de juges sachant réellement différencier les produits ;

β risque de seconde espèce (dépend de H_1) ;

η puissance (dépend de H_1 ; $\eta = 1 - \beta$) ;

Comparaison des deux niveaux d'inférence

Le tableau 5 donne quelques exemples de calculs de puissance. Par rapport au niveau de la population, le fait de se placer au niveau du jury n'est pas associé à une puissance très différente. Il ne semble pas utile d'établir des tables spéciales.

Tableau 5. Puissance du test usuel aux deux niveaux d'inférence ; H_1 : .25 ; notations identiques à celles du tableau 4.

		Jury		Population	
I	seuil	η	β	η	β
28	14	.581	.419	.575	.425
32	16	.576	.424	.570	.430
48	22	.810	.190	.765	.235

7.3. Comment diminuer l'incertitude

Les jurys utilisés en entreprise sont souvent restreints. Il en résulte une grande incertitude. Deux voies sont possibles pour diminuer cette incertitude.

Augmenter la taille du jury

Pour diviser l'incertitude par k, il faut multiplier la taille du jury par k^2. Les exigences en terme d'incertitude se heurtent rapidement à des impossibilités pratiques.

Diminuer la probabilité de bien répondre au hasard

Cette probabilité est la seule source d'incertitude lorsque l'on se place au niveau du jury ; pour la modifier il faut mettre en œuvre une autre épreuve discriminative que l'essai triangulaire simple. On peut songer à une épreuve du type 2 parmi 5 (face à 5 produits le juge doit indiquer quelle est le couple de produits qui est différent des trois autres) : la probabilité de bien répondre au hasard est 1/10. On peut aussi songer à un *essai triangulaire composé* : chaque juge subit plusieurs fois la même épreuve.

Pour apprécier l'influence de la probabilité de bien répondre au hasard sur l'incertitude, il convient de refaire les calculs précédents en remplaçant la valeur 1/3 de l'essai triangulaire par le paramètre π, probabilité de bien répondre au hasard au cours de l'épreuve.

Les résultats suivants ont été obtenus dans le cadre du modèle 2 (cf. annexe 11.2), en notant p la proportion d'individus réellement aptes (dans le jury ou dans la population selon le cas).

La variance de l'estimateur P_1 vaut :

au niveau du jury :

$$V_1(P_1) = (1/I)(1-p)\,\pi/(1-\pi)$$

au niveau de la population

$$V_2(P_1) = (1/I)(1-p)\big(\pi/(1-\pi)\big) + p(1-p)/I$$

Ces deux variances diminuent avec π.

8. Épreuve 2 parmi 5 ou essai triangulaire composé ?

8.1. Épreuve 2 parmi 5

Elle présente l'avantage de ne déranger le jury qu'une seule fois.

Pour le dégustateur, elle est beaucoup plus difficile que l'essai triangulaire. Formellement ce ne sont pas les mêmes proportions (ou probabilité) qui sont estimées dans les deux cas : un même juge peut être capable de différencier les produits dans le cadre d'un essai triangulaire et non dans le cadre d'une épreuve 2 parmi 5.

On peut discuter à perte de vue sur l'adéquation plus ou moins bonne de telle ou telle proportion. Le seul point important est de ne pas oublier que l'aptitude à différencier 2 produits ne présente pas de caractère absolu mais se réfère à un contexte. Le contexte de l'essai triangulaire est plus facile que celui de l'épreuve 2 parmi 5 mais est plus difficile que celui de l'épreuve duo-trio (apparier un produit à l'un des deux autres, ces deux autres étant donnés comme différents) associée à π = 1/2. L'essai triangulaire est un compromis entre une épreuve pas trop difficile pour les dégustateurs et une probabilité π assez petite.

L'ensemble de l'analyse statistique des résultats d'essais triangulaires peuvent être transposés à l'épreuve 2 parmi 5 en modifiant la valeur de π assez petite.

8.2. Essai triangulaire composé

Chaque juge subit plusieurs fois la même épreuve. Par rapport à l'épreuve 2 parmi 5 l'intérêt de cet essai réside dans sa simplicité pour les juges et dans la possibilité de séparer les épreuves dans le temps.

Dans cette méthodologie les trois modèles ne sont pas équivalents. L'analyse la plus simple consiste à adopter le modèle 2. On comptabilise comme ayant bien répondu les juges qui ont toujours fourni une bonne réponse. Corrélativement on ne distingue pas les juges qui répondent rarement bien et ceux qui répondent souvent bien. On peut alors appliquer l'analyse statistique de l'essai triangulaire simple en utilisant $\pi = (1/3)^m$, en notant m le nombre d'essais triangulaires par juge. Dans cette approche m doit être constant pour chaque juge ; cela étant, dès que m est supérieur ou égal à 3, on peut considérer π équivalent à 0 ($\pi = 1/27 = .037$ si $m = 3$).

Remarquons que dès que π peut être considéré comme égal à 0, l'inférence ne se pose plus au niveau du jury, pour lequel il y a certitude. Pour le niveau de la population on est ramené à l'estimation classique d'une proportion dans le cadre d'un sondage usuel.

L'analyse de l'essai triangulaire composé au travers d'autres modèles dépasse le cadre de cette présentation.

9. Conclusions

Dans l'analyse statistique de résultats d'essais triangulaires, le point de vue de l'estimation est toujours plus adéquat que celui du test.

Il est important de préciser le modèle que l'on adopte et le niveau d'inférence que l'on vise si l'on souhaite évaluer l'incertitude liée à la procédure statistique.

L'inférence au-delà du jury nécessite un tirage au hasard du jury, situation dont on est toujours très loin en pratique.

Lorsque le jury est restreint (de l'ordre de 10 ou 20 personnes), les résultats sont entachés d'une forte incertitude sauf si le quasi totalité du jury a fourni une bonne réponse.

Pour diminuer l'incertitude on est placé devant l'alternative :

- augmenter la taille du jury ;
- compliquer l'épreuve, ce qui modifie la nature de l'aptitude étudiée.

La solution la plus simple du point de vue de l'interprétation consiste à modifier l'épreuve (en la compliquant ou en la dupliquant) de façon à rendre π proche de 0. Le jury est alors connu avec une quasi certitude ; on est alors ramené au problème de l'inférence usuelle sur une proportion réalisée à partir d'un sondage.

10. Bibliographie

PIGGOTT J. R., 1986 *Statistical Procedures in Food Research.* Elsevier Applied Science Ltd, London.

SCHLICH P., 1992 *Power Tables for Discrimination Tests.* INRA, 21034 Dijon Cedex France.

SZTRYGLER F. *et al.*, 1990 *Évaluation sensorielle ; manuel méthodologique.* Lavoisier, Paris.

11. Annexes

11.1 Relation entre les estimateurs N_1 et N_3 (cf. § 4.2. et 4.3)

I nombre de juges (fixe et connu)

N nombre de juges aptes (fixe et inconnu)

X nombre de bonnes réponses observées (aléatoire)

π probabilité de bien répondre au hasard (fixe et connue)

La vraisemblance de $N = n$, notée $f(n)$, est la probabilité d'observer X bonnes réponses lorsqu'il y a n juges aptes. Soit :

$$f(n) = P(X \mid N = n).$$

Elle est égale à la probabilité d'observer $X = n$ bonnes réponses venant des $I = n$ juges qui répondent au hasard, soit la probabilité d'observer $X = n$ dans le cadre d'une loi binomiale $B(I - n, \pi)$, soit :

$$f(n) = C_{I-n}^{X-n}\, \pi^{X-n} (1-\pi)^{I-X}$$

L'étude de $f(n)$ peut se faire à l'aide du rapport : $r = f(n+1)/f(n)$, avec $n \geq 0$.

$$r = f(n+1)/f(n) = (X-n)/\big((I-n)\,\pi\big)$$

On distingue 3 cas :

$$r > 1 \Leftrightarrow n > (X - I\pi)/(1-\pi) = N_1$$

$$r < 1 \Leftrightarrow n < (X - I\pi)/(1-\pi) = N_1$$

$$r = 1 \Leftrightarrow n = (X - I\pi)/(1-\pi) = N_1$$

Si N_1 n'est pas un nombre entier, N_3 est le nombre entier immédiatement supérieur à N_1.

Si N_1 est un nombre entier, alors deux valeurs consécutives de n sont possibles pour N_3. Compte tenu du biais de N_3, il est alors préférable de choisir la plus petite de ces deux valeurs.

11.2. Moments de l'estimateur N_1 (cf. § 4.5 et 7.1)

Premier niveau d'inférence : le jury

I nombre de juges (fixe et connu)

N nombre de juges aptes (fixe et inconnu) ; $p = N/I$

X nombre de bonnes réponses observées (aléatoire)

π probabilité de bien répondre au hasard (fixe et connue)

En espérance, X vaut :

$$X = (I - N)\,\pi + N$$

D'où :

$$N_1 = (X - I\pi)/(1-\pi)$$

Espérance et variance de N_1

$$E(N_1) = E(X)/(1-\pi) - I\pi/(1-\pi)$$

Or $X - N$ suit une loi binomiale de paramètres $(I - N)$ et π :

$$E(X) = N + (I-N)\,\pi$$

d'où :

$$E(N_1) = N$$

L'estimateur N_1 est sans biais.

$$V(N_1) = \big(1/(1-\pi)^2\big)\, V(X)$$

$$V(N_1) = (I-N)\,\pi/(1-\pi)$$

On estime la proportion N/I par $P_1 = N_1/I$

$$E(P_1) = N/I = p$$

$$V(P_1) = V(N_1)/I^2 = (I-N)\,\pi/\big((1-\pi)\,I^2\big) = (1/I)\,(1-p)\,\pi/(1-\pi)$$

Second niveau d'inférence : la population dont est issu le jury

I nombre de juges (fixe et connu)

N nombre de juges aptes dans le jury (aléatoire)

X nombre de bonnes réponses observées (aléatoire)

π probabilité de bien répondre au hasard (fixe et connue)

p proportion de juges aptes dans la population (fixe et inconnue)

On utilise le même estimateur que précédemment : $P_1 = N_1/I$.

Seuls les calculs d'espérance et de variance diffèrent

$$E(P_1) = E\left[E(P_1 \mid N)\right]$$

$E(P_1 \mid N) = N/I$ (au niveau du jury l'estimateur est sans biais).

Si le jury est tiré aléatoirement, N suit une loi binomiale $B(I, p)$

$$E(P_1) = E(N)/I = p$$

$$V(P_1) = E\left[(P_1 - p)^2\right] = E\left\{E\left[(P_1-p)^2 \mid N\right]\right\}$$

On utilise la décomposition $P_1 - p = (P_1 - N/I) + (N/I - p)$

$$V(P_1) = E\left[(P_1 - N/I)^2\right] + E\left[(N/I-p)^2\right] + 2E\left[(P_1 - N/I)\,(N/I - p)\right]$$

$$V(P_1) = E\left\{E\left[(P_1 - N/I)^2 \mid N\right]\right\} + V(N/I) + 0$$

$$V(P_1) = E\left[V(P_1 \mid N)\right] + V(N/I)$$

Or : $$E\left[(I-N)\,\pi/\big((1-\pi)\,I^2\big)\right] = (1-p)\,\pi/\big((1-\pi)\,I\big)$$

$$V(P_1) + (1-p)\,\pi/\big((1-\pi)\,I\big) + p\,(1-p)/I$$

Cette écriture fait apparaître la variabilité totale comme une somme de la variabilité due aux réponses faites au hasard (déjà rencontrée au niveau du jury) et de celle due au tirage du jury.

11.3. Calcul direct dans des cas fixés des moments des autres estimateurs

Les étapes du calcul sont présentées sur un exemple. Programmées, elles ont servi à la construction des tableaux 1 et 2.

Premier niveau d'inférence : le jury

$I = 5$ nombre de juges (fixe et connu)

$N = 1$ nombre de juges aptes (fixe et inconnu)

X nombre de bonnes réponses observées (aléatoire)

$\pi = 1/3$ probabilité de bien répondre au hasard (fixe et connue)

$X - 1$ nombre de bonnes réponses dues au hasard

La loi de $X - 1$ est la loi binomiale $B(4, 1/3)$. D'où la loi de X :

Tableau 6. Loi de X.

r	0	1	2	3	4	5
$P(X = r)$	0	.1975	.3951	.2663	.0988	.0123

Tableau 7. Pour chaque nombre de bonnes réponses observées, on trouve pour chaque estimateur, sa valeur, son espérance (E), sa variance (Var) et son Erreur Quadratique Moyenne (EQM).

	$X=0$	$X=1$	$X=2$	$X=3$	$X=4$	$X=5$	E	Var	EQM
P_1	−.5	−.2	.1	.4	.7	1.	.2000	.0800	.0800
P_2	0	0	.1	.4	.7	1.	.2395	.0547	.0563
P_3	0	0	.2	.4	.8	1.	.2889	.0553	.0632

Remarque : en remplaçant par 0 les valeurs négatives (remplacement de P_1 par P_2) on diminue la variance et aussi, malgré le biais, l'erreur quadratique moyenne.

Second niveau d'inférence : la population dont est issu le jury

$I = 5$ nombre de juges (fixe et connu)

N nombre de juges aptes dans le jury (aléatoire)

X nombre de bonnes réponses observées (aléatoire)

$\pi = 1/3$ probabilité de bien répondre au hasard (fixe et connue)

$p = .1$ proportion de juges aptes dans la population (fixe et inconnue)

N suit une loi binomiale $B(5, .1)$. Soit :

Tableau 8. Loi de N.

r	0	1	2	3	4	5
$P(X = r)$	.3277	.4096	.2048	.0512	.0064	.0003

Pour chaque valeur de N, on calcule la probabilité de chaque valeur de X : $P(X = r \mid N)$. Ces lois conditionnelles de X, conduisent aux espérances, variances et EQM conditionnelles.

Tableau 9. Lois conditionnelles de X.

	$X=0$	$X=1$	$X=2$	$X=3$	$X=4$	$X=5$
$N=0$	.1317	.3292	.3292	.1646	.0412	.0041
$N=1$	0.	.1975	.3951	.2963	.0988	.0123
$N=2$	0.	0.	.2963	.4444	.2222	.0370
$N=3$	0.	0.	0.	.4444	.4444	.1111
$N=4$	0.	0.	0.	0.	.6667	.3333
$N=5$	0.	0.	0.	0.	0.	1.

Pour chaque valeur de X on connaît les valeurs des 3 estimateurs ; ce sont les mêmes que dans le premier niveau.

Pour chaque valeur de N on peut calculer l'espérance et la variance conditionnelles de chaque estimateur.

Tableau 10. Espérances et variances conditionnelles des estimateurs P_1, P_2 et P_3.

		Espérance condit.			Variance condit.		
N	p	P_1	P_2	P_3	P_1	P_2	P_3
0	.0000	.0000	.1317	.1687	.1000	.0366	.0415
1	.2000	.2000	.2395	.2889	.0800	.0547	.0553
2	.4000	.4000	.4000	.4518	.0600	.0600	.0581
3	.6000	.6000	.6000	.6444	.0400	.0400	.0514
4	.8000	.8000	.8000	.8667	.0200	.0200	.0089
5	1.	1.	1.	1.	0.	0.	0.

Pour $N = 1$, on retrouve les valeurs du cas du niveau du jury.

L'espérance « totale » est la moyenne pondérée (par les probabilités de N) des espérances conditionnelles. De même on calcule la variance et l'EQM « totales ».

Tableau 11. Moments des estimateurs P_1, P_2 et P_3.

	P_1	P_2	P_3
Espérance	.2000	.2593	.3050
Variance	.1120	.0664	.0695
EQM	.1120	.0699	.0805

En passant du niveau du jury à celui de la population le biais et la variance croissent.

Dans cet exemple les estimateurs P_2 et P_3 sont sensiblement meilleurs que P_1 malgré leur biais : ceci a été observé dans tous les cas étudiés.

Dans cet exemple P_2 est légèrement meilleur que P_3 ; ceci a été observé dans la plupart des cas étudiés.

11.4. Deux exemples de fonction de vraisemblance

I	nombre total de juges
X	nombre de réponses correctes observées
N	nombre de juges sachant réellement différencier les deux produits
Vrais.	vraisemblance de N

Figure 1. $I = 46$; $X = 13$

```
N    Vrais.  Diagramme
0    .099    ************************************
1    .084    *********************************
2    .067    ***************************
3    .050    ********************
4    .035    **************
5    .023    *********
6    .013    *****
7    .007    ***
8    .003    *
9    .001
10   .000
11   .000
12   .000
13   .000
```

Figure 2. $I = 39$; $X = 17$

N	Vrais.	Diagramme
0	.053	**************
1	.069	******************
2	.087	***********************
3	.106	*****************************
4	.124	*********************************
5	.138	************************************
6	.146	************************************
7	.137	************************************
8	.119	************************************
9	.095	********************************
10	.069	*************************
11	.044	*****************
12	.025	************
13	.011	******
14	.004	***
15	.001	*
16	.000	
17	.000	

11.5. Probabilités cumulées de la loi binomiale $B(N, 1/3)$ pour $1 \le n \le 50$

À l'intersection de la ligne i et de la colonne n se trouve la probabilité d'observer une valeur supérieure ou égale à i pour une loi binomiale $B(n, 1/3)$.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
0	1.	1.	1	1.	1.	1	1.	1.	1	1	1.	1.	1.	1.	1	1.	1.	1.	1.	1.	1	1.	1.	1.	1.
1	.333	556	704	802	868	912	.941	961	974	.983	988	.992	.995	997	.998	.998	999	.999	.999	.999	.999	.999	.999	999	.999
2		111	259	407	.539	.649	.737	.805	.857	.896	.925	.946	.961	.973	.981	.986	.990	.993	.995	.997	998	.998	.999	.999	.999
3			.037	.111	210	.320	.429	.532	.623	.701	766	.819	.861	.895	.921	.941	.956	.967	.976	.982	.987	.991	.993	.995	996
4				.012	.045	.100	173	.259	.350	.441	.527	.607	.678	.739	.791	.834	.870	.898	.921	.940	.954	965	.974	.980	985
5					004	.018	.045	.088	.145	.213	.289	.368	.448	.524	.596	.661	.719	.769	.812	.848	.879	.904	.924	941	.954
6						001	007	.020	042	.077	.122	.178	.241	.310	.382	.453	.522	.588	.648	703	.751	.794	.831	862	888
7							000	.003	.008	.020	.039	066	104	.149	.203	.263	.326	.391	.457	521	581	.638	690	737	778
8								000	001	003	009	019	035	058	088	127	172	.223	.279	339	399	460	519	576	630
9									.000	.000	.001	.004	009	017	031	.050	075	.108	146	191	240	.293	.349	406	462
10										.000	.000	.001	002	004	.009	.016	027	043	.065	092	125	163	.206	254	304
11											.000	.000	000	.001	.002	.004	.008	.014	.024	.038	056	079	.107	140	178
12												.000	.000	000	.000	001	002	.004	.007	.013	.021	033	.048	.068	092
13													.000	.000	.000	.000	.000	001	.002	.004	007	.012	019	028	042
14														.000	.000	.000	.000	000	.000	.001	002	.003	.006	010	016
15															.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	001	.002	003	006
16																.000	.000	.000	.000	.000	000	000	000	001	002
17																	000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	000	.000
18																		.000	.000	.000	.000	000	.000	.000	.000
19																			.000	.000	.000	.000	000	000	000
20																				.000	.000	.000	.000	.000	.000
21																					000	000	000	000	000
22																						.000	.000	000	000
23																							000	000	000
24																								.000	000
25																									.000

	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
0	1.	1.	1.	1.	1.	1.	1.	1.	1.	1.	1.	1.	1.	1.	1.	1.	1.	1.	1.	1.	1.	1.	1.	1.	1.
1	999	.999	999	999	.999	999	.999	.999	999	999	999	999	.999	999	.999	.999	.999	999	.999	999	999	.999	.999	999	999
2	.999	999	.999	.999	999	.999	999	.999	999	.999	999	.999	.999	.999	.999	.999	.999	999	999	.999	.999	999	999	999	999
3	997	.998	.999	999	.999	999	.999	.999	999	.999	999	999	.999	.999	.999	.999	.999	.999	.999	999	999	999	999	999	999
4	.989	.992	.994	.996	.997	.998	.998	.999	999	.999	.999	999	.999	.999	.999	999	.999	.999	.999	.999	.999	.999	999	999	999
5	.964	.972	.979	.984	.988	.991	993	.995	.996	.997	.998	.998	.999	.999	.999	.999	.999	.999	.999	.999	999	999	.999	999	999
6	910	.928	943	955	.965	.972	.978	983	.987	.990	.992	.994	.996	.997	.997	.998	.999	999	999	.999	999	999	.999	999	999
7	.815	847	.874	.897	.916	.932	946	957	.965	.973	978	.983	987	990	.992	.994	.995	.996	.997	.998	.998	999	999	999	999
8	.679	.725	.765	.801	.833	861	885	.905	922	937	.949	959	.967	.973	.979	.983	.987	.990	.992	994	.995	.996	997	998	998
9	518	.572	.623	.670	.714	.754	789	821	.849	.873	.895	.913	928	941	.952	.961	.968	974	.980	984	987	990	992	994	.995
10	357	.411	464	.517	568	617	662	705	744	779	.810	.838	863	885	.903	.920	.933	.945	.955	963	.970	976	980	984	987
11	220	.266	314	.364	415	.466	516	565	.612	656	697	.735	769	800	.829	854	876	895	911	.926	938	949	958	965	972
12	.121	.154	.191	232	.276	323	.370	419	468	.516	.562	607	.650	689	726	.761	.792	820	.845	.867	887	904	919	932	943
13	.058	.079	.104	.133	166	.203	.243	.285	.330	.376	422	.469	.515	560	603	644	.683	719	753	.783	811	836	859	879	896
14	.025	036	050	.068	.090	.115	.144	177	213	.252	293	336	.381	.425	.470	515	.558	.600	.639	677	713	.745	776	803	829
15	009	.014	.022	.031	.043	059	.078	.100	126	155	.187	.223	261	301	.342	.385	.428	471	514	556	596	.635	672	706	739
16	003	.005	008	013	019	027	.038	051	067	087	109	135	164	.196	231	.268	307	.347	.389	430	472	514	554	593	631
17	001	002	003	.005	.007	011	.016	.023	033	.044	.058	075	.095	118	144	.173	.205	.239	275	313	352	392	433	473	.513
18	.000	.000	001	.001	.002	004	.006	010	014	.020	.028	.038	051	066	083	.104	.127	.153	.182	.213	.246	.282	318	356	395
19	000	000	.000	.000	.001	001	002	.004	.006	.009	.012	018	025	.033	.044	.057	.073	.091	.111	135	.161	189	220	253	287
20	.000	000	000	.000	.000	000	.001	.001	002	.003	005	.007	.011	.015	.021	.029	.038	050	.063	079	098	.119	.142	168	196
21	.000	.000	000	.000	.000	.000	000	.000	.001	.001	002	003	.004	.007	.010	014	.019	.025	.033	043	.055	070	086	105	126
22	000	.000	000	000	000	000	000	000	000	.000	.001	.001	002	003	004	.006	.008	012	.016	022	029	.038	048	061	076
23	000	000	000	000	.000	000	.000	000	000	000	000	000	001	.001	.001	002	003	005	007	010	014	019	025	033	042
24	000	000	000	000	.000	000	000	000	000	.000	000	.000	.000	000	.000	.001	.001	.002	.003	004	.006	009	012	017	022
25	.000	.000	000	000	.000	.000	.000	000	.000	000	.000	.000	000	.000	.000	.000	.000	.00	001	002	.003	004	006	008	011
26	.000	.000	.000	000	000	000	.000	000	.000	.000	.000	.000	.000	000	000	.000	000	000	.000	001	.001	002	.002	003	005
27		.000	.000	.000	.000	000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	000	000	.000	.000	000	.000	001	001	001	002
28			000	.000	000	.000	.000	.000	.000	000	.000	000	000	000	.000	000	000	000	000	.000	.000	000	000	001	001
29				.000	000	000	000	000	.000	.000	000	000	000	.000	.000	.000	.000	.000	000	000	.000	.000	000	000	000
30					.000	000	.000	.000	000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	000	.000	000	.000	000	000	000	.000
31						.000	000	000	000	000	000	.000	.000	000	000	000	.000	.000	.000	000	000	000	000	000	000
32							.000	000	.000	000	000	000	.000	.000	.000	000	.000	000	.000	000	000	000	000	000	000
33								.000	000	000	000	000	.000	000	.000	000	000	.000	000	000	.000	000	000	000	000
34									000	.000	000	000	000	000	.000	.000	000	.000	000	000	.000	000	000	000	000
35										000	.000	000	000	.000	000	000	000	000	.000	000	.000	000	000	000	000