

MICHEL TERRAZA

ALI ZATOUT

Modélisation de l'hétéroscédasticité conditionnelle du prix spot du marché pétrolier de l'O.C.D.E.

Journal de la société statistique de Paris, tome 134, n° 3 (1993), p. 21-39

http://www.numdam.org/item?id=JSFS_1993__134_3_21_0

© Société de statistique de Paris, 1993, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Journal de la société statistique de Paris » (<http://publications-sfds.math.cnrs.fr/index.php/J-SFdS>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

II

ARTICLES

MODÉLISATION DE L'HÉTÉROSCÉDASTICITÉ CONDITIONNELLE DU PRIX SPOT DU MARCHÉ PÉTROLIER DE L'O.C.D.E.

par Michel TERRAZA¹ et Ali ZATOUT²

Résumé

Ce travail procède à l'investigation empirique du marché pétrolier de l'O.C.D.E. La modélisation de l'évolution du prix spot au cours du temps dans le but d'extraire une mesure de volatilité est effectuée à l'aide du modèle ARCH (R.F. Engle, 1982) puis GARCH (T. Bollerslev, 1986).

Mots clefs :

Prix spot, modèles : ARCH, GARCH, modèle autorégressif, séries temporelles.

Abstract

This paper proceeds to an empirical investigation of Oil Market in O.C.D.E. countries. ARCH (R. Engle, 1982) and GARCH (T. Bollerslev, 1986) models have been applied in modelling evolution of spot price over time with an aim to extract a volatility measurement.

Key words :

Spot price, ARCH model, Autoregressive model, GARCH model, Time series.

INTRODUCTION

Les méthodes classiques de prévision basées sur les processus ARMA supposent des séries temporelles à volatilité constante. Cette modélisation n'est pas toujours conforme à la réalité. Elle néglige l'information contenue dans la partie non expliquée du processus d'évolution des séries temporelles. Il est alors nécessaire de remettre

1. Maître de conférence en sciences économiques, C.E.P.E., Université de Montpellier I.

2. C.E.P.E., Université de Montpellier I.

MODÉLISATION DE L'HÉTÉROSCÉDASTICITÉ CONDITIONNELLE

en cause la formalisation économétrique traditionnelle des aléas basée sur l'homoscédasticité. L'analyse de la série temporelle univariée du prix spot du marché pétrolier de l'O.C.D.E. montre des propriétés non traditionnelles de l'hétéroscédasticité, de leptokurtosis. En effet, le prix spot étant un prix au jour le jour, il est beaucoup moins stable dans le temps que le prix officiel fixé à partir de contrats à long terme¹.

Les résidus obtenus après estimation des paramètres du modèle ARMA générateur de la régression finale représentent la partie purement aléatoire (non expliquée) de l'évolution du prix spot. Ils sont la source d'aléas non contrôlés par le modèle, et donc de volatilité. En présence de l'hétéroscédasticité, les modèles ARCH (R.F. Engle, 1982) apportent une réponse au problème de changement de régime observé sur le graphique des résidus. Ils permettent d'introduire une volatilité aléatoire.

Leur principe consiste à poser la variance conditionnelle d'un processus comme une moyenne pondérée des carrés des résidus passés de ce processus. Ils fournissent une bonne représentation de la leptokurtosis et de l'hétéroscédasticité dépendante du temps, améliorent la qualité de l'estimation ainsi que la précision en matière de prévision.

Nous présentons dans cette étude successivement²

- La représentation ARMA du prix spot (I).
- La modélisation ARCH (II).
- L'identification et l'estimation du processus générateur GARCH (III).

On étudie alors les aspects prévisionnels découlant de cette dernière modélisation.

1. Représentation ARMA du prix spot (P)

Nous disposons de la série trimestrielle (65 observations du prix spot du pétrole brut exprimé en Dollars US par baril) extraite des bulletins statistiques annuels de l'OPEP couvrant la période : Janvier 1974 à Décembre 1990.

Le test de Dickey-Fuller augmenté (ADF)³ montre la présence d'une racine unité dans le processus générateur de la chronique : ($|t| = 0,3818$ inférieure aux valeurs critiques de MacKinnon pour un seuil de 1, 5 et 10 %). Le processus P_t est intégré d'ordre un : $I(1)$. La série échantillon est alors différenciée à l'ordre un afin de la stationnariser. Le test ADF appliqué aux différences premières (DP_t) donne

1. Ces caractéristiques du prix spot ont été perçues lors de l'essai de modélisation VAR du marché du pétrole (cf. Labys W., Murcia V., Terraza M., 1992).

2. Nous remercions le référant anonyme pour les remarques qu'il a formulées sur ce texte et plus particulièrement celles concernant la modélisation ARMA ARCH que nous avons modifiées en conséquence.

Nos remerciements iront également à L. Bauwens (CORE, Louvain la Neuve, Belgique) pour ses orientations ainsi qu'à A. Louichi (CEPE) pour son aide en informatique.

3. La recherche des racines unités de la série des prix a été effectuée selon la technique de Perron (1988). Un seul retard a été retenu pour les modèles de base du test, une identification sommaire du processus des prix indiquant un modèle autoregressif d'ordre deux.

MODÉLISATION DE L'HÉTÉROSCÉDASTICITÉ CONDITIONNELLE

$|t| = 4,2028$ supérieure aux valeurs de MacKinnon de 1, 5 et 10 %. Le processus DP_t est alors intégré d'ordre zéro : $I(0)$.

La démarche a donc un aspect dynamique dans le sens où on modélise des évolutions de prix plutôt que des variables en niveaux. La régression de la série DP_t sur elle-même met en évidence des retards significatifs. L'estimation par les MCO permet de sélectionner les variables retardées d'ordre un et quatre (leurs t de Student sont supérieurs à la valeur théorique requise au seuil de 5 % : 1,96) du prix comme le montre le tableau suivant :

Tableau 1. Estimation par MCO de $DP_t = \phi_1 DP_{t-1} + \phi_4 DP_{t-4} + U_t$

Variables	DP_{t-1}	DP_{t-4}	ω
Coefficients	0,479 8	-0,237 1	2,373 7
t -Student	4,278 5	-2,10	2,856
$DW = 1,88$		$R^2 = 0,273 6$	
$Vraisemblance = -115,678$			

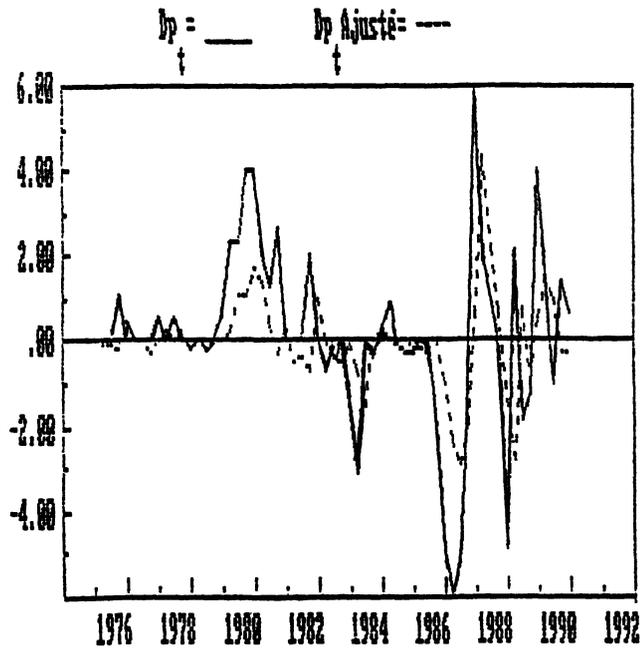
Les coefficients de l'AR(4) avec restrictions sur les paramètres ϕ_i , $i = 2, 3$ sont correctement estimés et significativement différents de zéro ; la variation trimestrielle du prix est explicable par son passé. La variance conditionnelle autonome ω est non-nulle et significativement différente de zéro.

Les tests de spécification montrent :

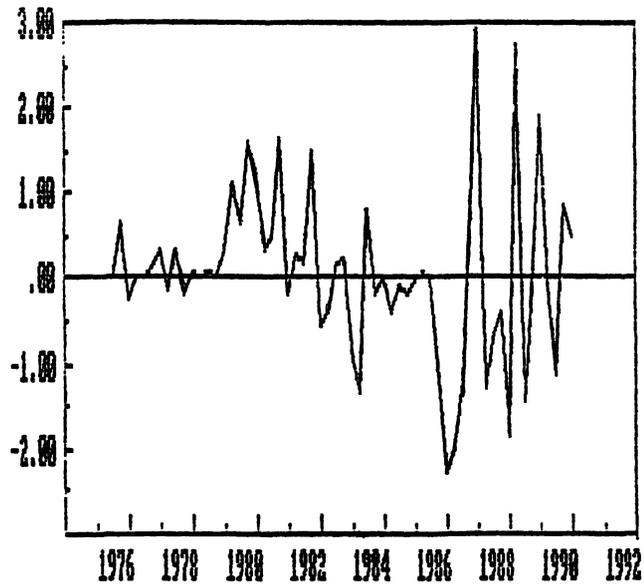
- Une présence d'hétéroscédasticité des résidus (cf. graphique 1) : la statistique du test de White ($TR^2 \rightarrow \chi^2(5) = 20,57$ pour une valeur critique au seuil de 5 % de 11,07) rejette donc l'hypothèse d'homoscédasticité.
- Une dépendance sérielle des résidus : la statistique de Ljung-Box calculée sur les résidus au carré est de 34,181 pour une valeur critique au seuil de 5 % de 31,41.
- Une non-normalité des résidus qui peut provenir de la variabilité temporelle de la variance ; la statistique du test de Jarque & Bera : $\chi^2(2) = 9,537$ (valeur critique 5,88 à 5 %) permet de rejeter l'hypothèse de normalité des résidus ; leur distribution présente une queue plus épaisse que celle de la loi Normale comme le montre le résumé statistique suivant :

Taille de l'échantillon	60
Moyenne	0,048 7
Écart-type	1,121 0
Skewness	0,632 9
Excess Kurtosis	3,531 0

GRAPHIQUE 1



Résidus du modèle non corrigé de l'effet ARCH



MODÉLISATION DE L'HÉTÉROSCÉDASTICITÉ CONDITIONNELLE

L'excès de Kurtosis est supérieur à la valeur zéro correspondant à la loi Normale, par contre l'hypothèse de symétrie est acceptée (skewness = 0,63). La constance des paramètres est testée, en présence d'hétéroscédasticité, en s'inspirant des résultats de Goldfeld et Quandt « symptotic test for the constancy of regression in the heteroscedastic case » (1978), qui préconisent une transformation des variables sur une moitié de l'échantillon. La statistique du test de Fisher $F(2,56) = 8,084$ dépasse le seuil théorique de 3,17 (à 5 %) et permet de rejeter l'hypothèse de constance des paramètres. Une prévision correcte du prix du pétrole avec ce modèle n'est pas réalisable.

Le modèle de prix que nous venons d'étudier présente donc des propriétés non-traditionnelles d'hétéroscédasticité et de normalité qui justifient le recours à une modélisation de type ARCH. Elle devrait conduire à une expression de la volatilité des prix et une amélioration du pouvoir prédictif du modèle.

2. La modélisation ARCH

L'intérêt de l'approche ARCH réside dans l'introduction d'une dynamique endogène au niveau de la définition de la variance. Les modèles ARCH fournissent une spécification originale de l'hétéroscédasticité dont les causes sont inconnues. Contrairement aux solutions traditionnelles qui la spécifient uniquement en fonction de variables exogènes observables, les modèles ARCH prennent en compte directement la variation temporelle de la variance du processus de prix. Cette variance est en général une fonction de sa valeur décalée et d'une combinaison linéaire d'ordre p des carrés des erreurs. Comme l'a noté Mandelbrot (1963), « ...de grandes variations tendent à être suivies par de grandes variations – quel qu'en soit le signe – et de petites variations tendent à être suivies par de petites variations... » ; c'est cette intuition qui est à la base de ce type de modèles. L'environnement considéré garde par conséquent en mémoire la nature de la volatilité des périodes antérieures.

2.1. Le modèle ARCH univarié

Présentation

Nous adoptons les notations de T. Bollerslev, Chou, Jayaraman et Kroner (1992, pp. 5-59).

Considérons un processus univarié $\{\varepsilon_t, t = 1 \dots T\}$ ayant la forme :

$$\varepsilon_t = Z_t \sigma_t \quad \text{où } Z_t \text{ est iid} \quad (1)$$

avec $E(Z_t) = 0$ et $V(Z_t) = 1$

σ_t est fonction du temps, il représente la variance conditionnelle de ε_t (conditionnellement à l'ensemble de l'information disponible à la date $t - 1$). Par définition ε_t est sériellement non corrélé avec une moyenne nulle, mais une variance conditionnelle égale à σ_t^2 .

MODÉLISATION DE L'HÉTÉROSCÉDASTICITÉ CONDITIONNELLE

Considérons un autre processus $\{y_t, t = 1 \dots T\}$ défini par :

$$y_t = g(x_{t-1}, b) + \varepsilon_t \quad (2)$$

avec $g(x_{t-1}, b)$ fonction de x_{t-1} et du paramètre inconnu b ; où x_{t-1} est l'ensemble de l'information disponible à l'instant $t - 1$.

Une paramétrisation possible de σ_t est donnée par :

$$\begin{aligned} \sigma_t^2 &= \omega + \sum_{i=1}^p \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 \\ &= \omega + \alpha(L) \varepsilon_t^2 \end{aligned} \quad (3)$$

où $\omega > 0$ et $\alpha_i \geq 0$, L est l'opérateur retard. ω représente la variance conditionnelle autonome et les ε_{t-i}^2 matérialisent les effets de surprise.

On montre que la variance conditionnelle est finie si :

$$\sum_{i=1}^p \alpha_i < 1$$

Le modèle défini par (2) et (3) est appelé modèle ARCH linéaire univarié d'ordre p .

Test du modèle ARCH

Il s'agit d'un test d'hypothèses emboîtées :

$$H_0 : \alpha_i = 0, i = 1 \dots p$$

dans (3), l'hypothèse d'homoscédasticité contre

$$H_1 : \alpha_i \neq 0, i = 1 \dots p$$

Si H_0 est acceptée, $\sigma_t^2 = \omega$, alors la variance est constante. Dans le cas contraire, les termes de l'erreur suivent un ARCH d'ordre à déterminer. Le test de H_0 contre H_1 se construit de la façon suivante.

Soit \hat{u}_t les résidus de la régression initiale (par les MCO)

$$\hat{u}_t^2 = \omega + a_1 \hat{u}_{t-1}^2 + \dots + a_p \hat{u}_{t-p}^2 + \text{résidus}$$

Seuls les retards significatifs sont gardés. On teste alors l'hypothèse que : $a_1 = a_2 = \dots = a_p = 0$:

- Soit par le test du multiplicateur de Lagrange (LM) : $TR^2 \rightarrow \chi^2(p)$ où T est la taille de l'échantillon et R^2 le coefficient de détermination.
- Soit par un test de Fisher (F).

H_0 est acceptée pour des valeurs de TR^2 inférieures au quantile de la distribution théorique dépendant du seuil de signification que l'on s'est fixé.

Estimation du modèle ARCH

On considère le modèle suivant pour le prix spot P_t :

$$DP_t = \phi_1 DP_{t-1} + \phi_4 DP_{t-4} + \varepsilon_t$$

$$\varepsilon_t \rightarrow N(0, \sigma_t^2)$$

$$\sigma_t^2 = \omega + \sum_{i=1}^p \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2$$

La log-vraisemblance conditionnelle à la date t vaut alors :

$$l_t = \text{Cte} - \frac{1}{2} \log \sigma_t^2 - \frac{1}{2} \varepsilon_t^2 \cdot \sigma_t^{-2}$$

et la log-vraisemblance totale vaut :

$$L = \text{Cte} - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \log (\sigma_t^2) - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \varepsilon_t^2 \cdot \sigma_t^{-2}$$

La technique du maximum de vraisemblance, peut être utilisée pour estimer les coefficients ϕ_1, ϕ_4, ω et $\alpha_i, i = 1 \dots p$. (Notons que la technique des moindres carrés pondérés convient aussi dans ce cas.)

Résultats empiriques

Afin de corriger l'effet ARCH dans l'équation de prix, nous utiliserons une modélisation AR avec erreurs ARCH proposée par Weiss (1984). Le test de sélection ARCH et l'examen de la fonction d'autocorrélation empirique des résidus au carré permettent de sélectionner un effet ARCH linéaire d'ordre quatre¹ avec restrictions sur certains paramètres : $a_i = 0$ pour $i = 1, 2, 3$.

Le test du multiplicateur de Lagrange pour un effet ARCH linéaire d'ordre quatre est hautement significatif : $\chi^2(4) = 19,95$ et \widehat{u}_t^2 suit donc un ARCH linéaire d'ordre 4.

Tableau 2. Valeurs critiques

Seuil	0,05	0,02	0,01	0,001
$\chi^2(4)$	9,488	11,668	13,277	18,42

Nous avons donc un modèle AR(4) avec restriction sur les paramètres ϕ_i pour $i = 2, 3$, avec des erreurs suivant un ARCH(4) «troué». Quatre coefficients sont à estimer avant d'appliquer la méthode du maximum de vraisemblance. Le choix de

1. Le test LM pour un effet ARCH linéaire du premier ordre est significatif : $\chi^2(1) = 17,209$ (valeur critique = 3,841 à 5 %).

MODÉLISATION DE L'HÉTÉROSCÉDASTICITÉ CONDITIONNELLE

valeurs initiales cohérentes est nécessaire afin d'obtenir un résultat stable. On utilise les résultats de la régression par les MCO du modèle

$$DP_t = \phi_1 DP_{t-1} + \phi_4 DP_{t-4} + \varepsilon_t$$

et les résidus s'écrivent : $\hat{\varepsilon}_t = DP_t - \hat{\phi}_1 DP_{t-1} - \hat{\phi}_4 DP_{t-4}$

De même, par les MCO on obtient les estimateurs de ω et a_4 dans l'équation :

$$\sigma_t^2 = \omega + a_4 \varepsilon_{t-4}^2$$

Les résultats du maximum de vraisemblance sont donnés par le tableau suivant :

Tableau 3. Estimation par maximum de vraisemblance du modèle ARCH, après 21 itérations de l'algorithme du Score

Variables	DP_{t-1}	DP_{t-4}	ω	a_4
Coefficients	0,508 70	-0,267 8	0,159 6	0,013 5
t-Student	2,427 9	-2,360 1	4,693 2	1,876
Vraisemblance : - 125,714 7			$R^2 = 0,497 5$	

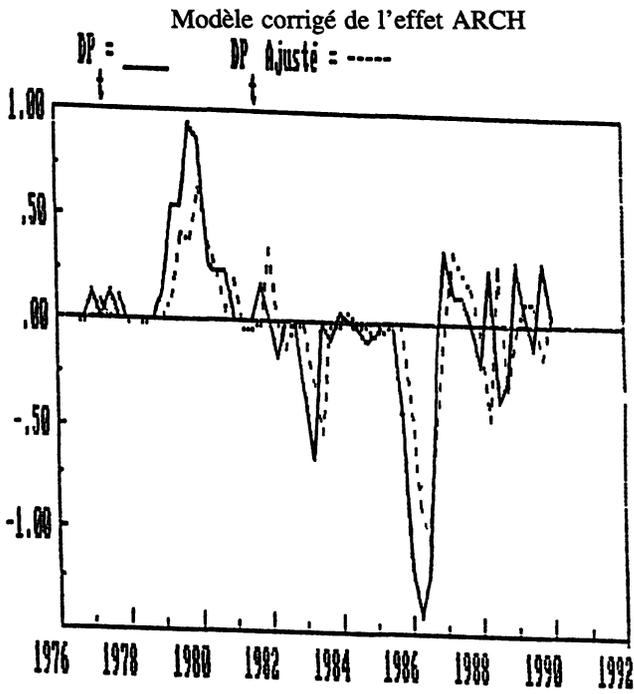
Les coefficients de la partie AR sont significativement différents de zéro, mais ils ne sont pas stables par rapport aux coefficients initiaux. Les coefficients de la partie ARCH sont aussi significatifs ; si cela est naturel pour le coefficient ω (dont le poids s'est réduit par la prise en compte de l'effet de surprise ε_{t-4}^2) qui représente le niveau minimum de volatilité, le coefficient a_4 montre qu'il y a clairement un rapport avec le niveau de la volatilité du prix observé sur le quatrième trimestre précédent. La contrainte de positivité est respectée, le coefficient a_4 est inférieur à un ce qui garantit une variance conditionnelle finie. Le rapport des vraisemblances des deux modèles montre que le modèle ARCH domine le modèle initial, et la comparaison des deux coefficients de corrélation indique que cette seconde procédure est relativement plus efficace.

Cependant comme le montre le tableau des tests suivant, hormis les hypothèses de normalité des résidus et de corrélation sérielle, l'effet ARCH mis en valeur est très robuste. En effet, le modèle continue d'exhiber des problèmes d'hétéroscédasticité et surtout d'effet ARCH.

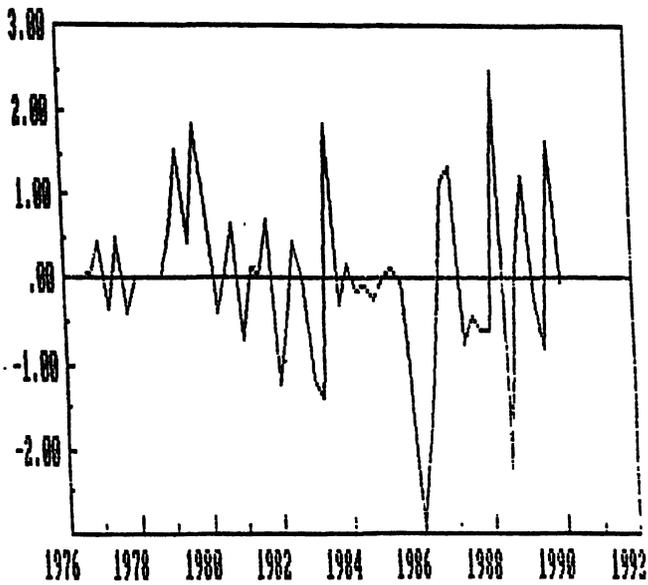
Tableau 4. Tests et Diagnostics (à 5 %)

	Statistiques de test	Valeurs critiques
Corrélation sérielle	$\chi^2(4) = 5,717 9$	9,488
Forme fonctionnelle	$\chi^2(1) = 0,866 3$	3,841
Normalité	$\chi^2(2) = 2,978 8$	5,990
Hétéroscédasticité	$\chi^2(4) = 17,644 9$	9,488
ARCH	$\chi^2(4) = 11,329 7$	9,488
Stabilité	$F(2,48) = 3,672 2$	3,190

GRAPHIQUE 2



Résidus du modèle de l'effet ARCH



MODÉLISATION DE L'HÉTÉROSCÉDASTICITÉ CONDITIONNELLE

Le graphique des résidus du modèle corrigé de l'effet ARCH (graphique 2) ne confirme pas l'hypothèse du bruit blanc. La robustesse de l'effet ARCH nous incite à sortir du cadre gaussien en remplaçant la loi normale par une loi à queue plus épaisse : la loi de Student (T. Bollerslev, 1987). Nous n'avons pas procédé à une recherche systématique de la loi réalisant le meilleur ajustement à la loi empirique mais une démarche *ad hoc*.

La densité de la loi de Student (T. Bollerslev, 1987) s'écrit :

$$f_{\nu}(\varepsilon_t / \psi_{t-1}) = \Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)^{-1} ((\nu-2) \sigma_{\varepsilon_t/t-1}^2)^{-1/2} \\ \times [1 + \varepsilon_t^2 (\sigma_{\varepsilon_t/t-1}^2)^{-1} (\nu-2)]^{-(\nu+1)/2} \\ \nu > 2$$

où :

- ψ_{t-1} représente l'ensemble d'information disponible à l'instant $t-1$.
- $\sigma_{\varepsilon_t/t-1}^2$ est la variance conditionnelle par rapport à l'ensemble d'information ψ_{t-1}
- $\Gamma(\cdot)$ est la loi gamma.
- ν est le degré de liberté de la loi de Student.

La condition d'existence du moment d'ordre quatre, c'est-à-dire que la variance est finie est $\nu > 4$.

Les résultats du maximum de vraisemblance sont donnés par le tableau suivant :

Tableau 5. Estimation du maximum de vraisemblance et tests

Variables	DP_{t-1}	DP_{t-4}	ω	a_4	$1/\nu$
Coefficients	0,394 1	-0,367 6	1,495 0	$0,790\ 8 \times 10^{-3}$	0,249 3
t -Student	11,876	-9,940 2	23,421	0,066	9,162 3
$LR_{1/\nu=0} = 533,92$ $SK = -0,731\ 8$ $EK = -0,915\ 53$ $JB = 6,831$					

L'estimation est obtenue à l'aide de l'algorithme de Berndt, Hall, Hall et Hausman (1974) utilisant les dérivées numériques.

Les coefficients de l'équation de moyenne ont baissé mais restent proches de ceux du tableau 1. La variance autonome est pratiquement la même dans les estimations des modèles du tableau 3 et 4.

Le coefficient de l'ARCH n'est plus significativement différent de zéro tandis que le paramètre ν de la loi de Student est très significatif et supérieur à quatre. Le moment d'ordre quatre est donc fini, la distribution des résidus n'a pas une variance infinie. La contrainte de positivité de a_4 est respectée. En outre, une spécification en IARCH n'est pas nécessaire puisque le coefficient ARCH est très inférieur à un.

La statistique de Ljung-Box pour les résidus standardisés $\widehat{\varepsilon}_t / \widehat{\sigma}_{t/t-1}^{1/2}$, les résidus au carré standardisés $\widehat{\varepsilon}_t^2 / \widehat{\sigma}_{t/t-1}$ de l'estimation du modèle ARCH(4) « troué », sont respectivement : $Q(10) = 8,694$ et $Q^2(10) = 41,76$ (valeur critique : 18,707). Ils indiquent une absence de corrélation sérielle des résidus standardisés et une dépendance sérielle des résidus au carré. Il est intéressant de noter que la kurtosis conditionnelle égale à $3(\widehat{\nu} - 2)(\widehat{\nu} - 4)^{-1} = 618,38$ n'est pas conforme avec son homologue de l'échantillon pour $\widehat{\varepsilon}_t^4(\widehat{\sigma}_{t/t-1})^{-2}$, $k = 4,85$. La kurtosis conditionnelle estimée diffère significativement de la valeur trois de la loi normale comme le montre le test $LR_{1/\nu=0}$ pour le modèle ARCH(4) « troué » avec des erreurs conditionnellement normales égales à 533,92 (valeur critique : 18,307 à 5 %). La statistique de test $LR_{\alpha=0}$ égale à 2,36 (valeur critique : 5,99 à 5 %) n'est pas significative. L'effet ARCH mis en valeur n'apparaît pas très robuste puisqu'il disparaît dès que l'on suppose que la distribution des résidus ne suit pas une loi normale.

3. Identification et estimation du processus généralisé GARCH (P, Q) linéaire

Approche théorique

Pour remédier à la longueur importante des retards nécessités par l'approche ARCH linéaire d'ordre p , T. Bollerslev (1986, pp. 307-327) proposait une généralisation très simple de l'équation de la variance conditionnelle en y incluant les valeurs passées de la variance. L'équation de la variance devient alors :

$$\begin{aligned} \sigma_t^2 &= \omega + \sum_{i=1}^p a_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^q b_j \sigma_{t-j}^2 \\ &= \omega + a(L) \varepsilon_t^2 + b(L) \sigma_t^2 \end{aligned}$$

où L est l'opérateur retard. Les coefficients a et b sont contraints à être positifs.

L'extention du processus ARCH au processus GARCH montre beaucoup de similitudes avec l'extension du processus MA au processus ARMA dans les séries temporelles. Comme le processus MA d'ordre élevé peut être approximé par un processus ARMA d'ordre plus bas, T. Bollerslev (1986) montrait que le processus GARCH d'ordre faible peut être vu comme une approximation d'un processus ARCH d'ordre plus élevé. En pratique, les modèles ARCH(p) linéaires se ramènent à des modèles GARCH(1,1). Dans ce cas, la variance n'est stationnaire que si $a(1) + b(1) < 1$. Ainsi, la variance du prix spot (qu'on peut interpréter comme la volatilité de ce prix) est paramétrisée par un modèle GARCH(1,1).

Dans ce cas aussi, l'existence d'une racine unitaire dans la distribution des retards indique une persistance de la volatilité de la chronique impliquant une étude complexe des modèles IGARCH (qui présentent quelques analogies avec les ARIMA, voir

MODÉLISATION DE L'HÉTÉROSCÉDASTICITÉ CONDITIONNELLE

B.E. Hansen (1990), des modèles d'espérances conditionnelles (voir R.F. Engle et T. Bollerslev, 1986).

Résultats empiriques

La statistique du test LM est égale à 2,57. Elle est significative au seuil de 5 % et conduit à retenir la variable σ_{t-1}^2 . Pour un GARCH(1,2) (qui est équivalent à un GARCH(2,1)), cette statistique vaut 4,96 et elle est non significative au même seuil. La spécification GARCH(1,1) donne alors :

$$DP_t = 0,45 DP_{t-1} - 0,23 DP_{t-4} + \varepsilon_t$$

(62,391 2) (- 51,641 7)

$$\sigma_t^2 = 0,463 7 + 0,429 \varepsilon_{t-1}^2 + 0,173 6 \sigma_{t-1}^2$$

(31,054) (34,669) (76,409)

$$R^2 = 0,878 9. \text{ Vraisemblance} = - 1 290,08.$$

Les nombres entre parenthèses sont les statistiques de Student.

D'après le théorème 2 (voir T. Bollerslev, 1986, page 311), le moment d'ordre 4 de ε_t existe et aucune des dix premières autocorrélations ou autocorrélations partielles de ε_t / σ_t ne dépasse (asymptotiquement) deux fois l'écart-type.

Les coefficients de l'équation de la moyenne sont très stables par rapport au modèle initial (le coefficient de DP_{t-4} est le même : - 0,23), ils sont significativement différents de zéro. Il en est même des coefficients de la variance, et ils sont tous positifs. La somme des effets ARCH est inférieure à 1 (0,429 + 0,173 = 0,602), ce qui garantit une variance conditionnelle finie. La volatilité minimale ω s'est considérablement réduite passant de 2,37 à 0,4637. La faiblesse du coefficient b ($b = 0,173$) montre que le choc de la volatilité n'est pas permanent. La comparaison des coefficients de corrélation et le rapport des vraisemblances, montrent que cette estimation est de meilleur qualité.

L'hypothèse de normalité des résidus standards (ε_t / σ_t) est acceptée, l'effet ARCH disparaît, ainsi que l'hétéroscédasticité comme le montre le tableau des tests suivant :

Tableau 6. Tests et diagnostics (à 5 %)

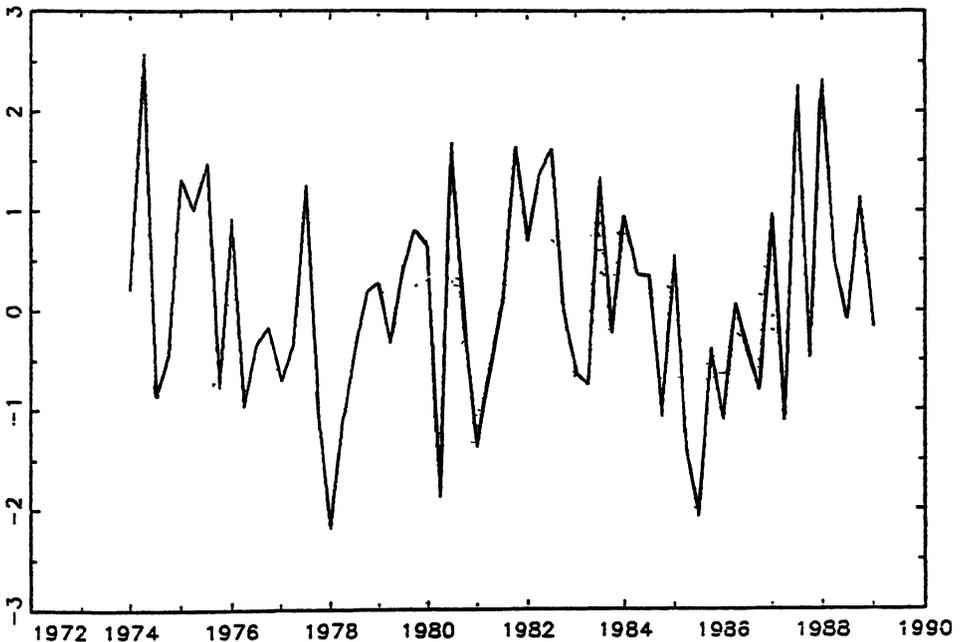
	Statistiques de test	Valeurs critiques
Corrélation sérielle	$\chi^2(1) = 1,887$	3,841
Forme fonctionnelle	$\chi^2(1) = 0,002 8$	3,841
Normalité	$\chi^2(2) = 1,616$	5,990
Hétéroscédasticité	$\chi^2(1) = 0,200 6$	3,841
ARCH	$\chi^2(1) = 1,702 1$	3,841
Stabilité	$F(2,54) = 2,622$	3,170

MODÉLISATION DE L'HÉTÉROSCÉDASTICITÉ CONDITIONNELLE

La dynamique endogène des changements de la variance mise en évidence par l'analyse du graphique des résidus du modèle initial (voir ci-dessus) est résorbée comme le montre l'allure purement aléatoire du graphique des résidus du modèle après correction GARCH(1,1), (graphique 3). Ainsi, tout régime a été éliminé, et il convient alors de considérer les résidus comme homoscédastiques.

GRAPHIQUE 3

Résidus après correction GARCH(1,1)

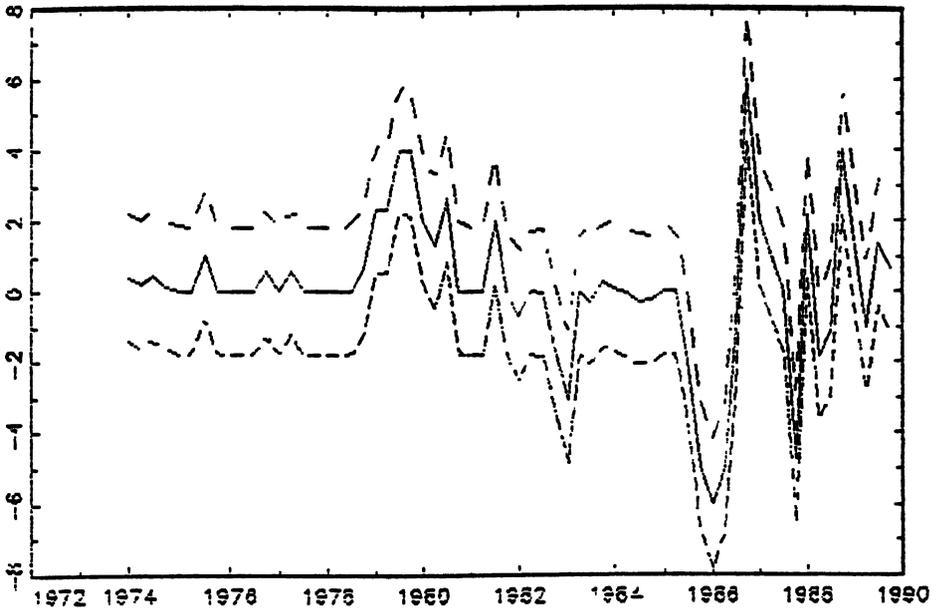


La variation des prix, DP_t , est représentée avec les intervalles de confiance asymptotiques à 95 % (voir graphique 4) pour des erreurs de prévision un pas en avant et pour les deux modèles MCO, GARCH(1,1). Les graphiques montrent :

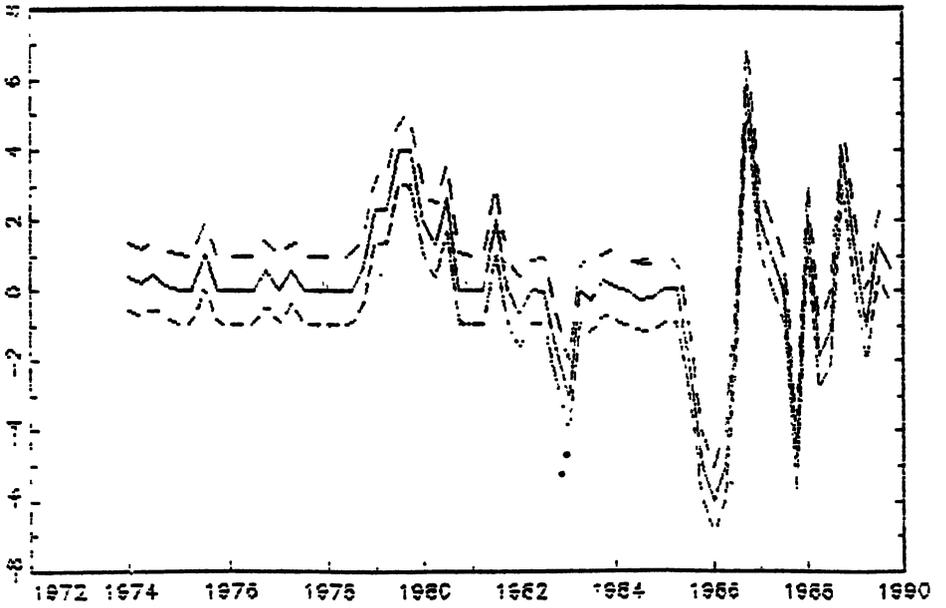
- Une volatilité des prix à partir du milieu des années 80, indiquant la difficulté à réaliser des prévisions convenables.
- Un resserrement important de l'intervalle de confiance dans le cas de la spécification GARCH(1,1).

GRAPHIQUE 4

Intervalle de confiance à 95 % pour DPt par les MCO



Intervalle de confiance à 95 % pour DPt par GARCH(1,1)



MODÉLISATION DE L'HÉTÉROSCÉDASTICITÉ CONDITIONNELLE

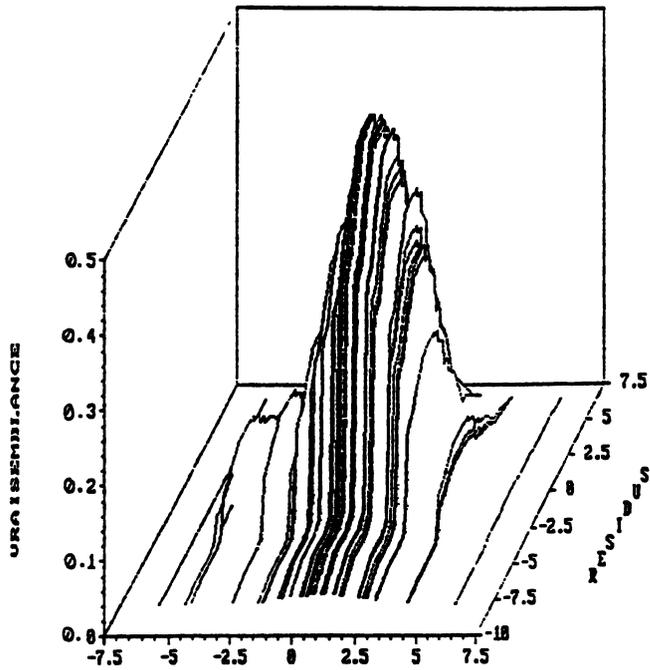
L'estimation de σ_t^2 ($\sigma_t^2 = 3,247$) calculée à partir de la formulation autorégressive s'interprète comme une variance non conditionnelle, elle doit être comparée à la variance non conditionnelle déduite de l'estimation autorégressive avec erreurs GARCH(1,1). Celle-ci est donnée par :

$$E(\sigma_t^2) \# 0,4637 + 0,429 E(\varepsilon_{t-1}^2) + 0,1736 E(\sigma_{t-1}^2)$$
$$\# \frac{0,4637}{1 - 0,429 - 0,1736} = 1,167$$

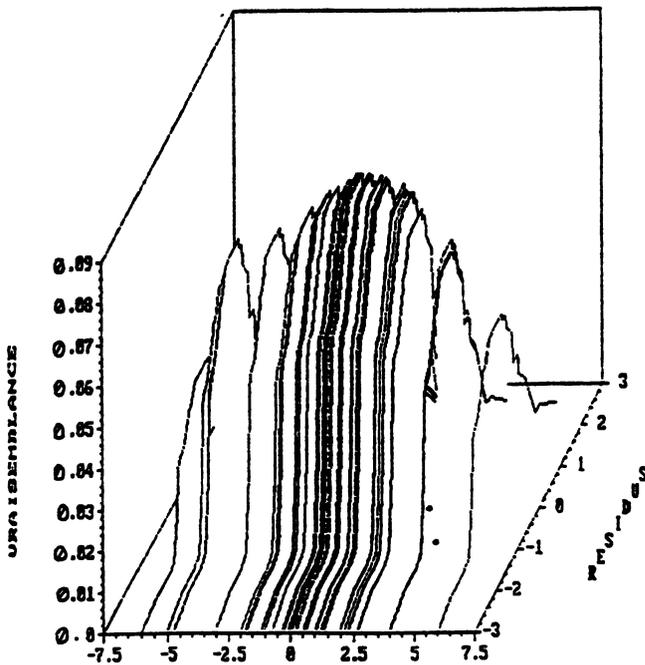
Elle illustre clairement dans ce cas la nécessité de recourir aux modèles de la famille ARCH pour améliorer les performances prévisionnelles du modèle estimé par les MCO et ce afin d'obtenir des variances prévues plus réalistes.

Les variations du prix spot sont caractérisées par des périodes calmes et des périodes volatiles. Elles présentent par conséquent des propriétés non traditionnelles de leptokurtosis et d'hétéroscédasticité variables au cours du temps. Les spécifications traditionnelles : stationnarité, corrélation sérielle, normalité, homoscedasticité, etc, sont rejetées par les tests usuels. Le recours à une modélisation autorégressive avec des erreurs suivant un processus ARCH univarié linéaire, améliore certains tests. Le remplacement de la loi normale par la loi de Student pour la distribution des résidus permet d'éliminer l'effet ARCH « troué ». L'épaisseur de la queue de cette distribution ne serait pas due aux variations de la variance conditionnelle de la loi normale. La modélisation du type GARCH(1,1) donne des résultats plus significatifs. Cette dernière spécification a permis d'enlever la dynamique endogène des changements de la variance et d'améliorer la qualité de l'estimation ainsi que la précision en matière de prévision.

ANNEXE 1



Prix en différence
vraisemblance après correction GARCH(1,1)



ANNEXE 2

Rappels sur les tests.

Statistique de Box-Pierce et Ljung-Box :

$$Q_H = T(T+2) \sum_{h=1}^H \frac{\widehat{\rho}^2(h)}{T-h} \rightarrow \chi^2(H-p-q)$$

où $\widehat{\rho}$ désigne les corrélations empiriques, T est la taille de l'échantillon.

Sous l'hypothèse H_0 d'un modèle ARMA avec bruit blanc H_0 est acceptée si Q_H est inférieure à $\chi^2_{\alpha\%}(H-p-q)$.

Statistique du test de Chow :

$$Ch = \frac{RSS_T - RSS_{T_1}}{RSS_{T_1}} \cdot \frac{T_1 - k}{T_2} \rightarrow F(T_2, T_1 - k)$$

où RSS est la somme des carrés des résidus et T est la taille de l'échantillon divisé en T_1 et T_2 .

Ce test permet de tester la constance des paramètres.

Test du multiplicateur de Lagrange noté LM :

$$\xi_{LM} = \frac{1}{T} S'(\theta_0) I^{-1}(\theta_0) S(\theta_0) \rightarrow \chi^2(k)$$

où S désigne le score, θ_0 le vecteur des paramètres sous H_0 et I est la matrice d'information.

On démontre qu'asymptotiquement ce test converge vers la statistique $TR^2 \rightarrow \chi^2(k)$ avec R^2 le coefficient de détermination.

Test de normalité de Jarque et Bera :

$$\xi_N = \frac{T}{6} \left(Sk^2 + \frac{1}{4} Ek^2 \right) \rightarrow \chi^2(2)$$

où Sk est le skewness, Ek l'excès de kurtosis.

L'hypothèse H_0 de normalité ($Sk = 0$ et $Ek = 0$) est rejetée si $\xi_N > \chi^2(2) = 5,99$ au seuil de 5 %.

BIBLIOGRAPHIE

- AVOUY-DOVIS S. (1992) *Les Modèles ARCH : Mythe ou Réalité ?*, Document de travail de la Caisse des Dépôts et Consignations, n° 1992-12T, Avril.
- BAILLIE R.T. et BOLLERSLEV T (1989) "The Message in Daily Exchange Rates : A Conditional Variance Tale", *Journal of Business and Economics Statistics*, 297-305.
- BERA R.A., JARQUE C.M., LEE F. (1984) "Testing the Normality Assumption in Limited Dependent Variable Models", *International Economic R.*, 563-578.
- BERA R. ANIL & SANGKYU LEE (1990) *On the Formulation of General Structure for Conditional Heteroskedasticity*, Colloque International sur les Modèles ARCH Paris.
- BOLLERSLEV T. (1986) "Generalized ARCH", *J Econometrics*, 307-327.
- BOLLERSLEV T. (1987) "A Conditional Heteroskedastic Time Series Model For Speculative", *R. Econometrics and Statistics*.
- BOLLERSLEV T. (1990) "Modeling the Coherence in Short-run Nominal Exchange Rates : A Multivariate Generalized ARCH Approach", *R. Economics and Statistics*, 498-505.
- BOLLERSLEV T. et R.F. ENGLE (1986) "Modelling the Persistence of Conditional Variance", *Econometric Review*.
- BOLLERSLEV T., CHOU R. et KRONER K.F. (1992) "ARCH Modelling in Finance", *J. Econometrics*, 5-59.
- BOUTILLIER M. (1990) *Approche patrimoniale du marché de changes*, Thèse de doctorat, Université d'Orléans.
- CROMWELL J.P., LABYS W., TERRAZA M. (1993) *Identification Tests for Time Series Models*, Sage publication, Beverly Hills.
- DAVIDSON R. (1991) *Modélisation du taux d'intervention de la Banque de France : Une approche économétrique*, Document de travail G.R.E.Q.E. Marseille.
- DIEBOLD F.X. (1988) *Empirical Modelling of Exchange Rate Dynamic*, Springer-Verlag, New-York.
- ELIE L., ELKAROUI N., JEANTHEAU T., PFERTZEL A. (1992) "Les modèles ARCH sur les cours de change", *R. Banque*, Mars.
- ENGLE R.F. (1982) "Autoregressive Conditional Heteroskedasticity with Estimates of the Variance of U.K. Inflation", *Econometrica*, 987-1008.
- ENGLE R.F., LILIE D. et ROBINS R. (1987) "Estimating Time Varying Risk Premia in Term Structure : The ARCH-M Model", *Econometrica*, 391-407.
- GEWEKE J. (1986) "Modelling the Pertinence of Conditional Variance : a comment", *Econometric Review*, 57-61.
- GEWEKE J. (1989) "Exact Predictive Densities for Linear Models with ARCH Disturbances", *J. Econometrics*, 63-86.
- GOLDFELD S.M. ans QUANDT R.E. (1978) *Symptotic Tests for the Constancy of Regressions in the Heteroscedastic Case*, Research Memorandum n° 229, Econometric Research Program, Princeton University.
- GOURIEROUX C. (1990) *Modèles ARCH : applications financières et monétaires*, Miméo CREST et CEPREMAP.
- HANSEN B.E. (1990) *Regression Theory when Variances are Non-Stationnary*, University of Rochester, NY.

MODÉLISATION DE L'HÉTÉROSCÉDASTICITÉ CONDITIONNELLE

- HARVEY A.C. et RUIZ E. (1990) *Unobserved Component Time Series Models with ARCH Disturbances*, Miméo, Département of statistical and mathematical sciences, London School of Economics.
- HENDRY D.F. (1983) "Econometric Modelling : The Consumption Function", *Scottish Journal of Political Economy*, n° 3.
- HSIEH D.A. (1988) "The Statistical Properties of Daily Foreign Rates", *J. International Economics*.
- HSIEH D.A. (1989a) "Modeling Heteroskedasticity in Daily Foreign Exchange Rates", *J. Business and Economic Statistics*, 307-317.
- LABYS W., MURCIA V., TERRAZA M. (1992) "Modeling the Petroleum Spot Market : a Vector Autoregressive Approach", in *Models for Energy Policy*, Chapman and Hall (à paraître 1993).
- MANDELBROT B. (1963) "The Variation of Certain Speculative Prices", *J. Business*, 394-419.
- Marchés Financiers et Gestion de Portefeuille Une mise en perspective des nouveaux outils, *J. Société de Statistique de Paris* (1992 n° 4).
- MAUREL F. (1989) "Modèles à correction d'erreur : l'apport de la théorie de la co-intégration", *Économie et Prévision* n° 88-89.
- MILHOJ A. (1985) "The Moment Structure of Arch Processes", *Scandinavian Journal of Statistics*, 281-292.
- NELSON D.B. (1990a) "Stationnarity and Persistence in the GARCH(1,1) Model", *Econometric Theory*, 318-334.
- NELSON D.B. (1990b) "Conditional Heteroskedasticity in Assets Returns : a new approach", *Econometrica*, 318-334.
- N'GAHANE P. (1991) "Efficacité des marchés à terme et d'options et marchés du pétrole brut", *Économies et Sociétés (Gestion SG)*, n° 17, avril, 7-36.
- TAMISIER & LEMERY C. (1990) *Dynamique des taux de change : estimation par un modèle ARCH*, Document de travail Caisse des Dépôts et Consignations, n° 1990-25T.
- TSAY R.S. (1987) "Conditional Heteroskedastic Time Series Models", *JASA*, n° 398, juin.
- WEISS A.A. (1984) "ARMA models with ARCH errors", *J. Time Series Analysis*.
- WEISS A.A. (1986) "ARCH and Bilinear Time Series Models : Comparison and Combination", *J. Business and Economic Statistics*, janvier.
- WHITE H. (1980) "A Heteroskedasticity Consistent Covariance Matrix Estimator and Direct Test for Heteroskedasticity", *Econometrica*, 817-838.
- ZAKOIAN J.M. (1992) "Modèles ARCH : Une revue de la littérature", *J. Société de Statistique de Paris*, n° 1.