

C. PIATECKI

A. SKALLI

Tests du MEDAF à deux facteurs : une analyse sur données françaises

Journal de la société statistique de Paris, tome 134, n° 2 (1993),
p. 57-89

http://www.numdam.org/item?id=JSFS_1993__134_2_57_0

© Société de statistique de Paris, 1993, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Journal de la société statistique de Paris » (<http://publications-sfds.math.cnrs.fr/index.php/J-SFdS>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

TESTS DU MEDAF À DEUX FACTEURS : Une analyse sur données françaises

par C. PIATECKI
CEFIB et CRESEP, Université d'Orléans
et A. SKALLI
CEFIB et Université de Paris 2

Résumé

Dans ce travail, les rentabilités des actifs composant le CAC 40 sont statistiquement analysées et leur non-normalité est mise en évidence. En supposant leur appartenance à la classe plus générale des distributions elliptiques, nous montrons que l'analyse moyenne-variance reste applicable. Dans ce contexte, l'inférence classique fondée sur la normalité des résidus peut être aisément étendue à leur ellipticité moyennant une réadaptation minimale de l'estimation des écarts-types. Une telle méthodologie est alors appliquée pour tester le MEDAF à l'aide de séries financières françaises.

Abstract

In this paper, a statistical analysis of the series composing the French CAC 40 index is performed in order to show that stock returns are not gaussian. Thus assuming they are elliptically distributed, we show that mean-variance analysis still remains applicable. Therefore the classical normality based statistical procedures can be easily extended to deal with elliptical residuals by means of a slight modification of the standard errors estimation process. Such a methodology is then applied for testing the CAPM using French data.

1. Introduction

Le *Modèle d'Équilibre des Actifs Financiers* – MEDAF –, dû à Sharpe (1964), Lintner (1965) et Mossin (1966), a été le point de départ d'une modification profonde de l'analyse des marchés financiers. En effet, plus restrictif, plus exigeant quant aux hypothèses sur lesquelles il repose que le modèle d'*Arrow-Debreu*¹, il est cependant apparu comme une structure adéquate pour analyser les relations complexes qui structurent les marchés financiers.

1. A l'exception de l'hypothèse d'existence et d'échangeabilité des actifs d'*Arrow-Debreu*, c'est-à-dire d'actifs qui garantissent de toucher une unité de compte dans un seul état de la nature et rien dans tous les autres états – voir Arrow (1964) et Debreu (1959).

TESTS DU MEDAF À DEUX FACTEURS

De nombreuses extensions, comme celle de Black (1972) qui prouva que le modèle demeurerait compatible avec l'absence d'un actif non risqué ou celle de Mayers (1972) qui l'étendit au cas où certains actifs ne pouvaient être échangés sur les marchés financiers, ont garanti sa popularité¹.

Cependant, dès l'origine, dans sa confrontation avec la réalité, de nombreuses difficultés sont apparues qui ont immédiatement contrebalancé les immenses qualités théoriques qu'il présentait et dont la plus évidente était son interprétation en termes *de moindres carrés*.

Ainsi, deux MEDAF distincts ont pu être mis en évidence² :

- un MEDAF *théorique* strictement conforme aux développements cités ci-dessus ;
- un MEDAF *empirique* n'invalidant pas complètement le précédent, mais soulevant des doutes assez importants pour inciter à la recherche d'un modèle plus général, pouvant englober dans certains cas le MEDAF *théorique* lui-même.

Ce modèle alternatif a été proposé par Ross (1976) et a été immédiatement soumis au crible des mêmes tests statistiques que le MEDAF.

Bien qu'il fut lui-même le sujet de vives controverses, il a semblé éclipser le MEDAF surtout après le choc de la *critique de Roll* (1977) qui concluait à l'impossibilité de réaliser un test du MEDAF qui soit indépendant d'un test de *l'efficience* des marchés financiers.

Contrairement à une impression répandue, cette *critique* n'a pas conduit à l'abandon du MEDAF. Bien au contraire, elle a incité un petit nombre de chercheurs qui, dans les quinze dernières années, ont voulu fonder la vérification empirique de la validité de cette théorie sur des bases économétriquement plus robustes que celles qui prévalaient avant 1977. De plus, l'apparition d'une théorie alternative a renforcé la crédibilité des tests, non pas parce que l'évidence empirique a toujours été en faveur du MEDAF, loin s'en faut, mais parce qu'elle a permis de lever l'ambiguïté sur ce que l'on cherchait réellement à tester – le MEDAF lui-même ou n'importe quelle autre théorie de marché.

Cependant, à la suite de Tobin (1958), on a longtemps pensé que, non seulement les rentabilités financières pouvaient être correctement décrites par une loi normale, mais que seules les distributions de probabilité à deux paramètres permettaient de développer une analyse des choix en incertain et, par conséquent, des marchés financiers en termes d'une rationalité individuelle de type moyenne-variance.

Aussi bien en théorie qu'en pratique, il n'en est rien. Les rentabilités financières refusent obstinément d'être ajustées par une loi normale. Cependant, la validité de l'analyse moyenne-variance peut être mise en évidence en s'appuyant sur un mélange d'arguments théoriques et empiriques qui seront présentés ici à partir de l'étude d'une base de rentabilités financières française.

1. Sans oublier, la facilité d'exposition pédagogique.

2. Pour une discussion détaillée de ce point, on peut se référer à Copeland & Weston (1988).

TESTS DU MEDAF À DEUX FACTEURS

A cette fin, la deuxième section rappellera les principes méthodologiques de base de l'analyse économétrique contemporaine du MEDAF. La troisième section discutera de l'irréalisme de l'hypothèse de normalité des rentabilités financières, introduira la notion de rentabilités elliptiques en mettant en évidence la comptabilité avec l'analyse moyenne-variance et les avantages par rapport à l'approche orthodoxe. Enfin, la quatrième et dernière section présentera les adaptations nécessaires pour tester le MEDAF sous l'hypothèse d'ellipticité des rentabilités, leur mise en œuvre pratique et les résultats empiriques qui en découlent.

2. Testabilité du MEDAF

Il existe maintenant de nombreuses présentations du MEDAF, depuis la plus accessible – voir, par exemple, Haugen (1987) – à la plus sophistiquée – voir, par exemple, Huang & Litzenberger (1988).

Pour obtenir l'équation du MEDAF, il est nécessaire de supposer qu'un certain nombre de propriétés afférentes aux marchés financiers sont respectées. En particulier, on suppose que l'espérance et la variance des rentabilités des portefeuilles sont les seules statistiques nécessaires pour permettre aux investisseurs de réaliser l'affectation optimale de leur richesse sur l'ensemble des actifs disponibles dans l'économie.

Dès lors, on montre aisément que, sous certaines conditions de régularité dans son comportement, tout investisseur rationnel choisira un portefeuille dans un sous-ensemble des portefeuilles accessibles appelé *Frontière Efficiente des Portefeuilles*¹. Si tous les investisseurs ont les mêmes anticipations, c'est-à-dire si l'espérance du vecteur des rentabilités des actifs financiers primaires disponibles dans l'économie et sa matrice des variances-covariances sont identiquement perçues par tous, chaque investisseur retient un portefeuille sur la frontière efficiente unique.

Le *Portefeuille de Marché* qui est le portefeuille détenu par l'économie dans son ensemble est donc, lui aussi, situé sur cette frontière. Or, on montre aisément – voir, par exemple, Huang & Litzenberger (1988) – que la rentabilité attendue de tout portefeuille – qu'il soit de frontière ou non – et/ou de tout actif, peut être représentée comme une combinaison linéaire des rentabilités de deux portefeuilles de frontière pourvu qu'il soient orthogonaux².

Deux situations aux implications très différentes peuvent se présenter³ :

1. Sous-ensemble des portefeuilles qui minimisent le risque – variance – pour une espérance donnée de rentabilité de la richesse.

2. Deux portefeuilles sont réputés orthogonaux si leur covariance est nulle.

3. L'existence ou l'absence d'un actif non risqué modifie profondément les perspectives dans lesquelles se trouvent les agents ; en particulier, s'il est incohérent de supposer que l'utilité marginale de la rentabilité attendue puisse être négative en présence d'un actif non risqué, ce n'est plus le cas quand aucun actif non risqué n'est disponible – voir Ingersoll Jr. (1988).

TESTS DU MEDAF À DEUX FACTEURS

- On peut trouver dans l'économie un actif non risqué de rentabilité i qui est, par définition, orthogonal au portefeuille de marché, dont nous noterons la rentabilité \tilde{r}_M . Le modèle nous propose alors la genèse suivante des rentabilités attendues des portefeuilles ou des actifs :

$$\mathbf{E}\tilde{r}_p \stackrel{\text{eq}}{=} (1 - \beta_p) i + \beta_p \mathbf{E}\tilde{r}_M \quad (1)$$

où $\beta_p = \text{COV}(\tilde{r}_p, \tilde{r}_M) / \sigma_M^2$, σ_M^2 étant la variance de \tilde{r}_M et \tilde{r}_p , la rentabilité d'un portefeuille ou de l'un quelconque des N actifs qui composent l'économie¹. Il s'agit ici du modèle de Sharpe (1964), encore appelé *modèle monofacteur*.

- Il n'existe pas dans l'économie d'actif non risqué, ou deux taux d'intérêt distincts sont appliqués aux prêteurs et aux emprunteurs, auquel cas le modèle nous propose la genèse des rentabilités attendues suivante :

$$\mathbf{E}\tilde{r}_p \stackrel{\text{eq}}{=} (1 - \beta_p) \mathbf{E}\tilde{r}_{\perp(M)} + \beta_p \mathbf{E}\tilde{r}_M \quad (2)$$

où $\tilde{r}_{\perp(M)}$ est la rentabilité du portefeuille de frontière qui est orthogonal au portefeuille de marché. Il s'agit ici du modèle de Black (1972) encore appelé *modèle à deux facteurs*.

Dans un cas comme dans l'autre, ceci lie la rentabilité des actifs financiers au modèle empirique suivant :

$$\tilde{r}_p = (1 - \beta_p) \tilde{r}_0 + \beta_p \tilde{r}_M + \tilde{\varepsilon}_p \quad (3)$$

modèle dans lequel \tilde{r}_0 est le taux sans risque s'il existe un actif non risqué, sinon $\tilde{r}_0 = \tilde{r}_{\perp(M)}$ et $\mathbf{E}\tilde{\varepsilon}_p = 0$, $\text{cov}(\tilde{r}_0, \tilde{r}_M) = 0$ et $\text{cov}(\tilde{r}_0, \tilde{\varepsilon}_p) = 0$.

Comme nous l'avons déjà remarqué, ce modèle a connu de nombreuses extensions que nous n'aborderons pas ici mais qui ont été, pour la plupart, remarquablement bien synthétisées par Elton & Gruber (1984).

Un dernier point important est que ce modèle, ou plutôt ces modèles, sont distincts de ce que les financiers appellent généralement le modèle de marché – voir Fama (1976) ou Jensen (1979). Ce dernier n'est en fait qu'un modèle statistique stipulant une relation affine entre la rentabilité de tout actif ou portefeuille et la rentabilité du portefeuille de marché² :

$$\tilde{r}_p = \alpha_p + \beta_p \tilde{r}_M + \tilde{\varepsilon}_p \quad (4)$$

Le modèle de marché est le modèle le plus généralement développé dans la littérature empirique. Contrairement au MEDAF, ce modèle n'est rattachable à aucune théorie – voir par exemple Copeland & Weston (1988). En fait, dans la littérature,

1. Le symbole $\stackrel{\text{eq}}{=}$ signifie que la relation est une relation d'équilibre.

2. Bien qu'il ne s'agisse pas d'un corps d'hypothèses d'essence économique susceptibles d'être validées ou non empiriquement, nous adopterons, dans la suite du texte, l'appellation courante de modèle de marché.

TESTS DU MEDAF À DEUX FACTEURS

on le retrouve comme produit dérivé d'une hypothèse de normalité des vecteurs de rentabilités d'actifs¹ – voir par exemple Fama (1976).

Tester les MEDAF est une opération très délicate car la puissance potentielle de chaque test est conditionnelle tout à la fois au respect de la théorie pure et aux adaptations nécessaires pour la confronter à la réalité empirique.

Dans la confrontation de la réalité empirique des rentabilités financières au modèle théorique, certains aspects primordiaux de la théorie ont été pendant longtemps laissés de côté, ce qui a permis, par une mauvaise interprétation de la *critique* de Roll (1977), de prétendre à la non-testabilité du MEDAF.

En effet, la première difficulté du modèle est que les relations d'équilibre – équations (1) et (2) – doivent, en toute rigueur, être appréhendées avec la plus grande attention. Ainsi, la forme du modèle est d'apparence linéaire avec comme paramètres α_p et β_p , comme variable endogène \tilde{r}_p et comme variable exogène \tilde{r}_M . Mais, en réalité, par définition, \tilde{r}_M est une combinaison linéaire des \tilde{r}_p . En outre, le paramètre β_p est, par définition, le rapport de la covariance entre la variable endogène \tilde{r}_p et la variable exogène \tilde{r}_M à la variance de cette dernière². Ce constat est à la base d'une première typologie des tests du MEDAF qui se distinguent selon que l'on considère statistiquement que le rôle de variable exogène est joué par \tilde{r}_M ou par la mesure du risque systématique β_p .

La deuxième difficulté est afférente à la critique de Roll (1977) et se développe comme suit : ne pouvant observer directement le portefeuille de marché – qui est constitué, en partie, d'actifs non observables ou même non échangeables –, l'économe est obligé de lui substituer un indice de marché.

Or, pour permettre d'évaluer les *vrais* betas, cet indice doit, au moins³, avoir un beta unitaire avec le portefeuille de marché. Bien sûr, en théorie, il est toujours possible de le construire à partir d'un échantillon de taille $N' \leq N$ – voir Huang & Litzenberger (1988). Cependant, dans la pratique, il est très difficile de vérifier que l'indice que l'on utilise possède les propriétés requises.

Ceci est d'autant plus gênant que Kandel (1984) a montré que l'efficienne *moyenne-variance* d'un indice est difficilement testable quand les rentabilités de certains des actifs qui composent le portefeuille de marché ne sont pas parfaitement observables. Il ne suffit pas que la part de marché et la rentabilité attendue des actifs manquants soient négligeables pour produire un test acceptable ; il faut de plus que

1. Si le vecteur des rentabilités est distribué normalement alors la rentabilité du portefeuille de marché est normale et l'espérance conditionnelle du portefeuille p sachant la rentabilité du portefeuille de marché est donnée par : $E\tilde{r}_p | \tilde{r}_M = \alpha_p + \beta_p \tilde{r}_M$ ce qui suppose que $E\varepsilon_p \tilde{r}_M = 0$ pour tout t .

2. En d'autres termes, si w_p' est le vecteur des poids de N actifs qui composent le portefeuille p , Ω la matrice des variances des rentabilités des actifs qui composent la sphère financière et w_M' le vecteur des poids que le *portefeuille de marché* distribue sur ces N actifs, alors $\beta_p = [w_M' \Omega w_M]^{-1} \cdot [w_p' \Omega w_M]$.

3. Une autre condition est aussi nécessaire, puisque le résidu dans les régressions $\tilde{r}_j = \alpha_j + \beta_j \tilde{r}_M + \tilde{\varepsilon}_j$, pour $j = 1, \dots, N$ – où \tilde{r}_M est l'indice substitué à l'indice de marché –, doit être non corrélé avec le portefeuille de marché.

TESTS DU MEDAF À DEUX FACTEURS

la variance des actifs manquants soit majorée et que la richesse qui s'est portée sur ces actifs soit négligeable.

En opposition à ce résultat théorique, Stambaugh (1982) a montré empiriquement, sur données américaines, que les résultats des tests étaient infiniment moins sensibles aux indices employés qu'à la composition des échantillons retenus pour réaliser les tests. Mais, cette insensibilité des tests aux indices employés n'est pas très rassurante dans la pratique, car elle peut être simplement le fruit d'une faible puissance des tests d'inférence construits autour du MEDAF.

Il doit être clair que le débat porte ici sur la possibilité de réaliser un test de l'efficacité *moyenne-variance* d'un indice donné à partir d'un sous-ensemble des actifs financiers disponibles dans l'économie, débat ouvert par Roll (1977) et dont les échos ont retenti tout au long de la dernière décennie, essentiellement dans les pages du *Journal of Financial Economics*.

Concernant les adaptations nécessaires pour une confrontation de la théorie à la réalité empirique, il faut remarquer que le MEDAF est un modèle qui se développe essentiellement dans un cadre de myopie des agents – il existe cependant des adaptations du modèle sous des hypothèses d'élargissement de leur horizon comme chez Merton (1973) qui l'a étendu au cas continu.

Pour le confronter à la réalité empirique, il est nécessaire de dater les équations et d'accepter un certain degré de stationnarité des rentabilités des actifs.

Ainsi, en postulant que les rentabilités des actifs sont stationnaires au second ordre sur la période de l'échantillonnage – i.e. : pour tout t $E\tilde{r}_t = E\tilde{r}$ et $\Omega_t = \Omega$ –, ce qui est l'hypothèse la plus couramment retenue, Cheng & Grauer (1980) ont pu montrer que la valeur de marché de n'importe quelle entreprise – v_k $k = 1, \dots, N$ – est une combinaison linéaire des valeurs de k autres entreprises quelconques¹ – $k \leq N - 1$.

Cette hypothèse n'est pas aussi contraignante qu'en apparence car il est couramment admis, sur données mensuelles, qu'une série de rentabilités sur cinq ans est stationnaire. Cependant, il n'existe pas de test permettant de statuer, a priori, sur la stationnarité d'un vecteur de rentabilités de grande dimension.

Cette précision faite, la famille des tests du MEDAF à deux facteurs qui est étudiée ici repose sur la méthodologie suivante : dans un premier temps, on choisit un indice représentatif du portefeuille de marché. Puis, on construit un indice qui lui est orthogonal, avec lequel on teste l'adéquation de l'équation d'équilibre exprimée en rentabilités excédentaires :

$$\tilde{r}_j - \tilde{r}_\perp(\hat{M}) = \alpha_j + \beta_j [\tilde{r}_{\hat{M}} - \tilde{r}_\perp(\hat{M})] + \tilde{\varepsilon}_j \quad j = 1, \dots, N \quad (5)$$

Si α_j est significativement égal à zéro et β_j significativement différent de zéro, on accepte l'efficacité *moyenne-variance*.

1. Si, sur la période de l'échantillonnage, aucune entreprise n'augmente son capital, alors cette relation est aussi vérifiée par les prix des actifs.

TESTS DU MEDAF À DEUX FACTEURS

Cette méthodologie est sujette à de très fortes critiques. Tout d'abord, si un actif n'accepte pas de se plier aux desiderata du modèle, quand tous les autres s'y plient, on ne peut pas conclure à l'efficacité *moyenne-variance* car cette dernière ne se partage pas.

De plus, même si \tilde{r}_M^{\wedge} est un *bon* représentant du portefeuille de marché, il existe une infinité de portefeuilles qui lui sont orthogonaux, un seul étant situé sur la vraie frontière efficiente – voir Roll (1980). Par conséquent, tout rejet de la relation risque-rentabilité impliquée par l'équation 5 peut soit provenir d'une violation de la théorie, soit refléter une mauvaise spécification du modèle – mauvais choix de l'indice et/ou de l'indice orthogonal.

Gibbons (1982) a été le premier à proposer une méthodologie originale qui permette de contourner les difficultés soulevées par Roll (1977). Puisque le modèle de marché – ci-après nommé M-M – fonctionne en général assez bien, supposons qu'il est convenablement spécifié :

$$\tilde{r}_{jt} = \alpha_j + \beta_j \tilde{r}_{Mt}^{\wedge} + \tilde{\varepsilon}_{jt} \quad j = 1, \dots, N \quad t = 1, \dots, T \quad (6)$$

avec¹ pour tout j et tout k :

$$\forall t, \quad \mathbf{E} \tilde{\varepsilon}_{jt} = 0 \quad \mathbf{E} \tilde{\varepsilon}_{jt} \tilde{\varepsilon}_{ks} = \begin{cases} \sigma_{jk}^2 & \forall s = t \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad \mathbf{E} \tilde{\varepsilon}_{jt} \tilde{r}_{Mt}^{\wedge} = 0$$

Exprimée en espérance, chacune des N équations devient :

$$\mathbf{E} \tilde{r}_{jt} = \alpha_j + \beta_j \mathbf{E} \tilde{r}_{Mt}^{\wedge} \quad (7)$$

Maintenant, puisque le modèle de *Black* s'écrit :

$$\mathbf{E} [\tilde{r}_{jt} - \tilde{r}_{\perp(\hat{M})t}] = \beta_j \mathbf{E} [\tilde{r}_{Mt}^{\wedge} - \tilde{r}_{\perp(\hat{M})t}] \quad t = 1, \dots, T \quad j = 1, \dots, N \quad (8)$$

ou encore, en notant $\gamma = \mathbf{E} \tilde{r}_{\perp(\hat{M})t}$:

$$\tilde{r}_{jt} = \gamma (1 - \beta_j) + \beta_j \mathbf{E} \tilde{r}_{Mt}^{\wedge} \quad (9)$$

pour qu'il décrive correctement la réalité financière, on doit de toute évidence avoir $\alpha_j = \gamma (1 - \beta_j)$ pour tout $j = 1, \dots, N$. De ce fait, un test joint du MEDAF et de l'efficacité de l'indice peut être effectué en confrontant les hypothèses suivantes :

$$\begin{aligned} H_0 : & \quad \alpha = \gamma (\mathbf{1}_N - \beta) \quad \text{M - M \& MEDAF} \\ H_A : & \quad \alpha \neq \gamma (\mathbf{1}_N - \beta) \quad \text{M - M seul} \end{aligned} \quad (10)$$

où les notations suivantes ont été adoptées :

$$\alpha = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_j \\ \vdots \\ \alpha_N \end{bmatrix} \quad \beta = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_j \\ \vdots \\ \beta_N \end{bmatrix} \quad \mathbf{1}_N = \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \quad (11)$$

1. On postule l'absence d'autocorrélation des résidus.

TESTS DU MEDAF À DEUX FACTEURS

En fait, la relation (6) peut aussi bien être écrite sous forme vectorielle :

$$\tilde{\mathbf{r}}_j = \alpha_j \mathbf{1}_T + \beta_j \tilde{\mathbf{r}}_{M^{\wedge}} + \tilde{\mathbf{e}}_j \quad j = 1, \dots, N \quad (12)$$

$\tilde{\mathbf{e}}_{jt}$ avec :

$$\tilde{\mathbf{r}}_j = \begin{bmatrix} \tilde{r}_{j1} \\ \vdots \\ \tilde{r}_{jt} \\ \vdots \\ \tilde{r}_{jT} \end{bmatrix} \quad \tilde{\mathbf{r}}_{M^{\wedge}} = \begin{bmatrix} \tilde{r}_{M^{\wedge}1} \\ \vdots \\ \tilde{r}_{M^{\wedge}t} \\ \vdots \\ \tilde{r}_{M^{\wedge}T} \end{bmatrix} \quad \tilde{\mathbf{e}}_j = \begin{bmatrix} \tilde{e}_{j1} \\ \vdots \\ \tilde{e}_{jt} \\ \vdots \\ \tilde{e}_{jT} \end{bmatrix} \quad (13)$$

et $\mathbf{1}_T$ est le vecteur de \mathbb{R}^T dont tous les éléments sont égaux à l'unité. Le vecteur $\tilde{\mathbf{e}}_j$ est alors supposé suivre une loi de probabilité T -dimensionnelle de moyenne $\mathbf{0}$ et de matrice des variances-covariances $\sigma_{ij}^2 \mathbf{I}_T$. La relation (12) représente donc un système de N équations à estimer. Toutefois, ces dernières peuvent être rassemblées dans une structure matricielle de sorte qu'en notant :

$$\mathbf{r}^{nc} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{r}}_1 \\ \vdots \\ \tilde{\mathbf{r}}_j \\ \vdots \\ \tilde{\mathbf{r}}_N \end{bmatrix}, \quad \mathbf{X}^{nc} = [\mathbf{1}_T \mid \tilde{\mathbf{r}}_{M^{\wedge}}] \otimes \mathbf{I}_N, \quad \mathbf{b}^{nc} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \alpha_j \\ \beta_j \\ \vdots \\ \alpha_N \\ \beta_N \end{bmatrix}, \quad \mathbf{e}^{nc} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{e}}_1 \\ \vdots \\ \tilde{\mathbf{e}}_j \\ \vdots \\ \tilde{\mathbf{e}}_N \end{bmatrix} \quad (14)$$

il vient :

$$\mathbf{r}^{nc} = \mathbf{X}^{nc} \mathbf{b}^{nc} + \mathbf{e}^{nc} \quad (15)$$

Si nous supposons que :

$$\forall (i, j) \in \{1, \dots, N\}^2, \quad \mathbf{E}\tilde{\mathbf{e}}_i = \mathbf{E}\tilde{\mathbf{e}}_j = \mathbf{0} \quad \text{et} \quad \mathbf{E}\tilde{\mathbf{e}}_i \tilde{\mathbf{e}}_j' = \begin{cases} \sigma_{ii}^2 \mathbf{I}_T & \text{si } i = j \\ \sigma_{ij}^2 \mathbf{I}_T & \text{si } i \neq j \end{cases} \quad (16)$$

\mathbf{e}^{nc} est alors un vecteur aléatoire d'espérance mathématique nulle et de matrice des variances-covariances :

$$\Sigma_{nc} = \mathbf{E}\mathbf{e}^{nc} \mathbf{e}^{nc'} = \tilde{\Sigma}_{nc} \otimes \mathbf{I}_T = s^2 \Omega_{nc} \quad (17)$$

(NT, NT) (N, N) (T, T)

$\tilde{\Sigma}_{nc}$ étant la matrice des variances-covariances instantanée¹ de terme générique σ_{ij} . Elle est supposée symétrique et définie positive.

1. L'adjectif instantané est une traduction du terme anglo-saxon *contemporaneous*.

TESTS DU MEDAF À DEUX FACTEURS

Un moyen d'estimer le modèle (15) est d'adopter la méthodologie dite *SUR* – Seemingly Unrelated Regressions – de Zellner (1962). En effet, si les vecteurs $\tilde{\mathbf{e}}_j$ sont supposés normalement distribués, cette méthode permet d'obtenir des estimateurs sans biais et asymptotiquement efficaces. En fait, avec un régresseur unique, comme cela est le cas dans le modèle (15), et sous l'hypothèse alternative, les estimateurs des *MCO*, appliqués équation par équation, coïncident avec ceux de la méthode *SUR*. En effet, dans ce contexte, le modèle de marché ne reposant sur aucun *a priori* théorique, il n'y a aucune raison pour que les estimations des constantes reflètent l'unicité de la rentabilité attendue du portefeuille orthogonal. Par conséquent, les vecteurs aléatoires $\tilde{\mathbf{e}}_i, \tilde{\mathbf{e}}_j$ sont non corrélés – voir Fomby, Hill & Johnson (1984). Un raisonnement symétrique permet de comprendre la pertinence de la régression *SUR* pour tester l'hypothèse nulle. Sous cette dernière, c'est-à-dire quand on impose la contrainte $\alpha = \gamma (\mathbf{1}_N - \beta)$, les *MCO* sont inefficients par rapport à la méthode des *MCG* inhérente à la régression *SUR*.

Maintenant, dans le cas qui nous préoccupe, la contrainte imposée sous l'hypothèse nulle est non linéaire. Un moyen de pallier cette lacune est d'appliquer la méthode du maximum de vraisemblance – voir, par exemple Kandel (1984). Néanmoins, son application supposerait que nous connaissions la fonction de densité de probabilité jointe des rentabilités des actifs. Or, dans cet article, celles-ci seront supposées elliptiquement distribués sans qu'il soit nécessaire d'explicitier la forme analytique de leur distribution. C'est pourquoi nous nous inspirerons de Gibbons (1982) et utiliserons une méthode dont il montre que les propriétés asymptotiques sont équivalentes à celles du maximum de vraisemblance. L'argument est que la satisfaction des conditions de premier ordre lors de la maximisation de la fonction de vraisemblance peut être assimilée à l'itération en avant et en arrière entre deux ensembles de régressions à l'aide de l'algorithme qui suit :

1. Effectuer N régressions du type (12) en utilisant les *MCO*, ce qui permet d'obtenir des estimations initiales des paramètres α_j et $\beta_j, j = 1, \dots, N$.
2. Utiliser les N séries de résidus obtenues à partir de ces régressions pour former une estimation de $\tilde{\Sigma}_{nc}$, la matrice instantanée des variances-covariances.
3. Les estimations initiales des paramètres α_j et $\beta_j, j = 1, \dots, N$, ainsi que l'estimation de $\tilde{\Sigma}_{nc}$ permettent alors d'obtenir, par application des *MCG*, l'estimateur de *Black, Jensen* et *Scholes* de la rentabilité espérée du portefeuille orthogonal :

$$\hat{\gamma} = \frac{\hat{\alpha}' \tilde{\Sigma}_{nc}^{-1} (\mathbf{1}_N - \hat{\beta})}{(\mathbf{1}_N - \hat{\beta})' \tilde{\Sigma}_{nc}^{-1} (\mathbf{1}_N - \hat{\beta})} \quad (18)$$

4. Après avoir utilisé l'expression (18) pour obtenir une estimation $\hat{\gamma}$ de la rentabilité espérée du portefeuille orthogonal, effectuer N régressions du modèle de *Black* sans constante, c'est-à-dire :

$$(\tilde{\mathbf{r}}_j - \hat{\gamma} \mathbf{1}_T) = \hat{\beta}_j (\tilde{\mathbf{r}}_M - \hat{\gamma} \mathbf{1}_T) + \tilde{\mathbf{e}}_j \quad (19)$$

5. Avec le nouveau vecteur $\hat{\beta}$ d'estimations des $\hat{\beta}_j$ refaire les étapes 3 et 4.

TESTS DU MEDAF À DEUX FACTEURS

6. Itérer en arrière puis en avant entre (18) et (19) jusqu'à ce qu'il y ait convergence avec, à chaque fois, réactualisation de l'estimation de la matrice instantanée des variances-covariances $\hat{\Sigma}_{nc}$.

En fait, la lourdeur d'implémentation d'un tel algorithme ne constitue pas réellement un obstacle car il n'est pas nécessaire de l'appliquer dans son intégralité. S'appuyant sur des résultats dus à Gallant (1975) et Fuller (1976), Gibbons (1982) montre qu'une procédure de *Gauss-Newton* en une étape permet d'obtenir des estimateurs dont les propriétés asymptotiques sont équivalentes à celles des estimateurs du maximum de vraisemblance¹. En réalité, l'intérêt de l'algorithme présenté ci-dessus est qu'il permet d'une part, d'éviter le problème des erreurs sur les variables car γ et β sont estimés simultanément, d'autre part, la précision de l'estimateur est accrue car il y est tenu compte de la matrice instantanée des variances-covariances : c'est un estimateur convergent et asymptotiquement efficace.

La procédure de *Gauss-Newton* en une étape va alors consister tout d'abord en la linéarisation de la contrainte au voisinage des estimateurs convergents obtenus grâce à la mise en œuvre de la première itération – étapes 1 à 5 – de l'algorithme présenté ci-dessus. Ainsi, en appliquant un développement de Taylor, il vient :

$$\gamma \beta_j \approx \hat{\gamma} \hat{\beta}_j + \hat{\beta}_j (\gamma - \hat{\gamma}) + \hat{\gamma} (\beta_j - \hat{\beta}_j) = \hat{\gamma} \hat{\beta}_j + \hat{\gamma} \beta_j - \hat{\gamma} \hat{\beta}_j \quad (20)$$

Maintenant, si l'on substitue la relation (19) dans le système de N équations (12) et si l'on écrit ce dernier sous forme matricielle compatible avec une structure *SUR*, il devient :

$$\mathbf{r}^c = \mathbf{X}^c \mathbf{b}^c + \mathbf{e}^c \quad (21)$$

avec :

$$\mathbf{r}^c = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{r}}_1 - \hat{\gamma} \hat{\beta}_1 \mathbf{1}_T \\ \vdots \\ \tilde{\mathbf{r}}_j - \hat{\gamma} \hat{\beta}_j \mathbf{1}_T \\ \vdots \\ \tilde{\mathbf{r}}_N - \hat{\gamma} \hat{\beta}_N \mathbf{1}_T \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}^c = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_j \\ \vdots \\ \beta_N \\ \gamma \end{bmatrix}, \quad \mathbf{e}^c = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{e}}_1^c \\ \vdots \\ \tilde{\mathbf{e}}_j^c \\ \vdots \\ \tilde{\mathbf{e}}_N^c \end{bmatrix} \quad (22)$$

$$\text{et :} \quad \mathbf{X}^c = [\mathbf{I}_N \otimes (\tilde{\mathbf{r}}_M^c - \hat{\gamma} \mathbf{1}_T) \mid (\mathbf{1}_N - \hat{\beta}) \otimes \mathbf{I}_T] \quad (23)$$

\mathbf{e}^c est alors un vecteur aléatoire centré de matrice des variances-covariances $\Sigma_c = s^2 \Omega_c$.

Ainsi, nous pouvons obtenir deux ensembles d'estimateurs de α et de β :

- Un ensemble construit sous l'hypothèse nulle – en estimant (21).
- Un ensemble construit sous l'hypothèse alternative – en estimant (15).

1. Il suppose pour cela que les rentabilités des actifs financiers sont normalement distribuées.

TESTS DU MEDAF À DEUX FACTEURS

De ce fait, il est toujours possible d'effectuer un test qui permette *de trancher en faveur* de l'une ou l'autre des hypothèses. Dans un tel contexte, trois tests sont *a priori* applicables :

1. Le test de *Wald*.
2. Le test du multiplicateur de Lagrange.
3. Le test du rapport des vraisemblances – qui sera utilisé par la suite –.

Toutefois, auparavant, nous voulons nous assurer que les hypothèses sous-jacentes à cette méthodologie sont vérifiées et, sinon, introduire les adaptations que leur violation impose. C'est l'objet de la section qui suit.

3. Nature des rentabilités financières

Les données utilisées ci-après sont extraites du flux journalier du *Marché à Règlement Mensuel* de la place de Paris et, plus précisément, d'une base constituée par les actifs qui composaient le *CAC 40* fin Octobre 1990.

Couvrant l'intervalle de temps courant du 1^{er} Juillet 1986 au 31 Octobre 1990 – 1 132 jours ouvrables et fériés à l'exception des week-ends –, cette base intègre donc des valeurs qui ont été privatisées en 1987 et 1988. Pour conserver l'homogénéité temporelle de l'échantillon, il a été décidé de ne pas intégrer ces entreprises dans l'analyse, ce qui a éliminé essentiellement des entreprises du secteur bancaire et de l'assurance.

De plus, les entreprises ayant fusionné durant cette période ont aussi été écartées de l'échantillon, à l'exception de *La Lyonnaise des Eaux* et de *Dumez* dont la fusion n'est intervenue que dans les derniers jours couverts par la base.

En fin de compte, cette dernière est composée des séries des rentabilités de trente entreprises du *CAC 40* représentant, en 1989, 28 % de la capitalisation boursière française.

Les séries traitées concernent ici des cours de clôture – sont aussi disponibles les cours d'ouverture, le plus haut et le plus bas – qui ont été ajustés pour prendre en compte les distributions d'actions gratuites, les émissions d'actions et les divisions du patrimoine. Les rentabilités intègrent bien entendu les dividendes versés ajustés, mais aucun traitement particulier n'a été réservé à l'avoir fiscal.

Sur l'intervalle temporel retenu, les places boursières ont été secouées par des chocs nombreux qui ont extrêmement déstabilisé les cours, occasionnant ponctuellement des rentabilités très anormales. Ces dernières ont été repérées en considérant comme anormale toute rentabilité \tilde{r}_{jt} ($t = 1, \dots, T$), pour laquelle $|\tilde{r}_{jt} - E\tilde{r}_j| > 3\sigma_r$. Ces rentabilités aberrantes sont alors remplacées par la valeur moyenne de la série des rentabilités de l'action j .

Un tel choix peut sembler arbitraire. Cependant, on peut considérer que les rentabilités observées qui tombent à l'extérieur de cet intervalle sont le fait d'évène-

TESTS DU MEDAF À DEUX FACTEURS

ments rares qui ne peuvent apparaître que sous l'impulsion d'un processus discret – par exemple un processus de type poissonnien – qui déstructure les modes anticipatifs des investisseurs et dérègle le marché sur une période ultra-courte.

A côté des rentabilités des actifs financiers, un indice de marché *équiréparti* a été construit – noté (IEE) dans les tableaux qui suivent –. En fait, il semble préférable d'employer cet indice plutôt que l'un des indices *CAC* ou *CAC 40*, parce qu'il intègre tous les ajustements nécessaires qui ont dû être réalisés sur le cours des actifs.

Bien entendu, en première approche, par comparaison avec le marché au règlement mensuel, c'est un mauvais indice puisqu'il apparaît que le poids des actifs dans la capitalisation boursière de ce marché est très inégalitaire. On rappelle cependant que, si le MEDAF explique correctement la formation des cours sur le marché financier français, alors ce dernier doit être compris comme l'ensemble de tous les actifs disponibles en France.

Cet indice n'a pu être évalué que pour les données hebdomadaires. Les données journalières, qui sont sujettes à des événements de périodicités bien connues – comme l'effet du lundi –, nécessitent un traitement spécifique pouvant significativement perturber les résultats. On notera donc que les tests qui sont proposés plus loin ont été construits sur des données hebdomadaires. Ceci est relativement rare dans la littérature, l'essentiel des tests ayant été construit sur des données mensuelles ou annuelles. L'acceptation de la perte d'information induite par le passage des séries hebdomadaires aux séries mensuelles, voire annuelles, ne semble se justifier que par la recherche d'une adéquation de la distribution des rentabilités à la loi normale.

En effet, de nombreuses raisons expliquent la domination de l'analyse probabiliste et de la statistique par la *loi normale*. Celles-ci peuvent être rassemblées autour de trois points :

- Par définition, un vecteur de variables aléatoires $\mathbf{r} \in \mathbf{R}^\tau$ est distribué normalement avec une espérance $E\mathbf{r} = \boldsymbol{\mu}$ et une matrice des variances-covariances $\mathbf{V}(\mathbf{r}) = \boldsymbol{\Omega}$ définie positive – on notera $\mathbf{r} \rightarrow \mathcal{N}(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Omega})$ – si et seulement si pour tout vecteur $\mathbf{a} \in \mathbf{R}^\tau - \mathbf{a} \neq \mathbf{0} - \mathbf{a}'\mathbf{r} \rightarrow \mathcal{N}(\mathbf{a}'\boldsymbol{\mu}, \mathbf{a}'\boldsymbol{\Omega}\mathbf{a})$.

En d'autres termes, \mathbf{r} est un vecteur multinormal si et seulement si toute combinaison linéaire des variables aléatoires qui le composent est elle-même une variable aléatoire normale. Ceci a pour conséquence directe que les lois marginales de \mathbf{r} – les lois suivies par les composantes $r_l - l = 1, \dots, \tau$ de \mathbf{r} – sont aussi normales.

En outre, si l'on considère la partition de \mathbf{r} telle que $\mathbf{r}' = [\mathbf{r}'_1 \ \mathbf{r}'_2]$ pour $\mathbf{r}_1 \in \mathbf{R}^p$ et $\mathbf{r}_2 \in \mathbf{R}^q - p + q = \tau$, partition à laquelle sont associées les partitions suivantes de $\boldsymbol{\mu}$ et $\boldsymbol{\Omega}$:

$$\boldsymbol{\mu} = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{\Omega} = \begin{pmatrix} \Omega_{11} & \Omega_{12} \\ \Omega_{21} & \Omega_{22} \end{pmatrix} \quad (24)$$

où Ω_{11} et Ω_{22} sont deux matrices définies positives, alors on sait que la distribution conditionnelle de \mathbf{r}_1 pour $\mathbf{r}_2 = \bar{\mathbf{r}}_2$ donné est elle-même normale avec :

TESTS DU MEDAF À DEUX FACTEURS

$$\mathbf{r}_1 | \mathbf{r}_2 = \bar{\mathbf{r}}_2 \rightarrow \mathcal{N}(\mu_1 + \Omega_{12}\Omega_{22}^{-1}(\bar{\mathbf{r}}_2 - \mu_2), \Omega_{11} - \Omega_{12}\Omega_{22}^{-1}\Omega_{21})$$

On constate de plus que $\mathbf{r}_1 | \mathbf{r}_2 = \bar{\mathbf{r}}_2$ est linéaire en $\bar{\mathbf{r}}_2$. Ainsi apparaît le premier attrait de la *loi normale* : elle constitue un monde clos dans lequel distributions marginales et distributions conditionnelles sont aussi normales.

- Sous des conditions assez générales, elle se présente comme distribution limite d'une somme de variables aléatoires indépendantes, ce qui la place comme candidat idéal à la modélisation de chocs exogènes indépendants.
- Les distributions de fonctions élémentaires de vecteurs normaux – formes quadratiques, logarithmes... – sont connues et leurs propriétés ont été étudiées de manière intensive. Elles permettent donc de développer de manière quasi-automatique une large batterie de tests d'adéquation des modèles sous les hypothèses de normalité ou de normalité asymptotique, qui constituent le cœur de l'économétrie traditionnelle.

Tout ceci serait parfait si, en finance tout au moins, l'hypothèse de normalité ne s'avérait pas systématiquement irréaliste.

En effet, pour pouvoir accepter l'hypothèse de normalité des vecteurs de rentabilités des actifs financiers, il faut que certaines conditions très strictes soient vérifiées.

Si on note $\mathbf{r}' = [\tilde{\mathbf{r}}_1' \dots \tilde{\mathbf{r}}_j' \dots \tilde{\mathbf{r}}_N']$ avec pour tout $j = 1, \dots, N$,

$$\tilde{\mathbf{r}}_j = [\tilde{r}_{j1} \dots \tilde{r}_{jt} \dots \tilde{r}_{jT}]'$$

ces conditions peuvent être énoncées comme suit :

- Les vecteurs de rentabilités $\tilde{\mathbf{r}}_j - j = 1, \dots, N$ – doivent être stationnaires.
- Les distributions marginales doivent être symétriques : le coefficient de *Skewness* :

$$\sqrt{b_{1j}} = \frac{\mathbf{E} [\tilde{r}_{jt} - \mu_j]^3}{(\mathbf{E} [\tilde{r}_{jt} - \mu_j]^2)^{\frac{3}{2}}} \quad j = 1, \dots, N \quad \text{et} \quad t = 1, \dots, T \quad (25)$$

doit être nul.

- Le coefficient d'aplatissement – ou *Kurtosis* – défini par :

$$b_{2j} = \frac{\mathbf{E} [\tilde{r}_{jt} - \mu_j]^4}{(\mathbf{E} [\tilde{r}_{jt} - \mu_j]^2)^2} \quad j = 1, \dots, N \quad \text{et} \quad t = 1, \dots, T \quad (26)$$

doit être égal à 3.

On remarquera que les deux dernières conditions présentent la particularité de n'imposer qu'une vérification sur chaque série de rentabilités financières et non pas sur le vecteur des séries lui-même. Cependant, elles ne représentent qu'une condition nécessaire pour qu'il y ait normalité.

TESTS DU MEDAF À DEUX FACTEURS

Tableau 1.

N°	Entreprise	$\sqrt{b_1}$	α_1	$\bar{b}_2 - 3$	α_2	λ	α_λ
1	Accor	-.066	.36	1.15	0	63.45	0
2	Air Liquide	.19	.011	1.510	0	114.22	0
3	Arjomari-Prioux	.065	.38	1.79	0	150.97	0
4	Bouygues	.09	.22	2.66	0	332.72	0
5	BSN	.57	0	6.5	0	2053.57	0
6	Carrefour	-.14	.06	1.42	0	99.10	0
7	Casino	1.40	0	15.54	0	11753.80	0
8	CFF	.072	.32	1.70	0	137.76	0
9	CGIP	-.0230	.75	.92	0	40.80	0
10	Chargeurs	.0075	.31	.80	0	31.43	0
11	Club Méditerranée	.12	.10	1.26	0	77.33	0
12	Compagnie Bancaire	-.022	.76	1.55	0	112.97	0
13	Dumez	.24	.11E-2	3.30	0	523.050	0
14	Elf Aquitaine	.23	.2E-2	1.12	0	69.03	0
15	Générale des Eaux	.078	.29	0.99	0	47.40	0
16	Hachette	.35	.17E-5	3.46	0	586.09	0
17	Lafarge-Copée	-.14	.058	10.07	0	4786.21	0
18	Havas	.27	.2E-30	2.88	0	405.34	0
19	Legrand	-.066	.36	3.49	0	574.32	0
20	Lyonnaise des Eaux	.19	.87E-2	5.76	0	1570.94	0
21	Matra	-11.01	0	274.46	0	.36E7	0
22	Merlin-Gerin	.78	0	8.50	0	3520.91	0
23	Michelin	-.39	0	6.11	0	1787.56	0
24	Midi	.96	0	9.82	0	4714.50	0
25	L'Oréal	1.28	0	15.33	0	1383.96	0
26	Pernod-Ricard	.041	.57	1.52	0	109.27	0
27	Peugeot	-.16	.031	4.01	0	760.65	0
28	Sanofi	.14	.062	.74	0	29.28	0
29	St Louis	.16	.031	1.10	0	61.59	0
30	Thomson	.15	.035	6.97	0	2293.26	0

TESTS DU MEDAF À DEUX FACTEURS

Tableau 2.

N°	Entreprise	$\sqrt{\delta_1}$	α_1	$\tilde{b}_2 - 3$	α_2	λ	α_λ
1	Accor	-.012	.94	.94	.0046	8.3	.016
2	Air Liquide	.22	.019	1.54	0.3E-5	24.32	0
3	Arjomari-Prioux	.05	.74	1.59	.14E-5	24.15	0
4	Bouygues	-.1	.54	2.40	0	54.79	0
5	BSN	-.05	0.98	1.36	.39E-4	17.45	.18E-3
6	Carrefour	.067	.68	.1	.75	.27	.87
7	Casino	1.28	0	4.66	0	267.42	0
8	CFF	.12	.48	.78	.018	6.25	.044
9	CGIP	.28	.085	.92	.5E-2	11.01	.4E-2
10	Chargeurs	.26	.11	.15	.65	2.83	.24
11	Club Méditerranée	.11	.50	.94	.4E-2	8.84	.01
12	Compagnie Bancaire	.3	.069	.48	.15	5.54	.06
13	Dumez	.51	.19E-2	2.67	0	77.09	0
14	Elf Aquitaine	.20	.22	.20	.54	1.91	.39
15	Générale des Eaux	.42	.01	0.72	.03	11.46	.0032
16	Hachette	.072	.66	1.26	.13E-3	15.30	.48E-3
17	Havas	.47	.37E-2	2.88	0	86.79	0
18	Lafarge-Copée	-.019	.91	1.68	.35E-6	26.79	0
19	Legrand	-.13	.41	3.80	0	137.06	0
20	Lyonnaise des Eaux	.066	.69	.84	.011	6.77	.034
21	Matra	.87	.11E-6	4.71	0	238.18	0
22	Merlin-Gerin	-.087	.60	2.46	0	57.65	0
23	Michelin	-.27	.10	.90	.66E-2	10.30	.58E-2
24	Midi	.34	.037	1.31	.77E-4	20.54	.35E-4
25	L'Oréal	2.66	0	21.29	0	4555.16	0
26	Pernod-Ricard	.35	.034	.30	.36	5.40	.0067
27	Peugeot	-.069	.67	2.22	0	46.91	0
28	Sanofi	-.16	.32	.38	.25	2.33	.31
29	St Louis	.13	.43	1.39	.25E-4	18.98	.7610E-4
30	Thomson	.10	.52	.58	.081	3.57	.17
31	IEE	-.20	.22	.96	.37E-2	10.23	.60E-2

TESTS DU MEDAF À DEUX FACTEURS

Or, l'analyse des tableaux 1 et 2 – tableaux évalués sur des données journalières et hebdomadaires – prouve qu'il n'est pas réaliste d'adopter l'hypothèse de normalité des rentabilités des actifs financiers quand on désire travailler sur ces données temporelles.

Dans ces tableaux, ont été évaluées les estimations du skewness – $\sqrt{\tilde{b}_{1j}}$ – et du kurtosis – \tilde{b}_{2j} –, ainsi que λ la statistique de *Bera-Jarque* – voir¹ Judge, Hill, Griffiths, Lutkepohl & Lee (1988) et Tassi (1989) –, ainsi que les probabilités critiques qui leur sont associées.

Lorsque les probabilités critiques sont inférieures au seuil de risque souhaité, par exemple $\alpha = 5\%$, elles conduisent au rejet de l'hypothèse de base de nullité des paramètres estimés. En données journalières, les colonnes 7 et 8 du tableau 1 conduisent globalement au rejet de l'hypothèse de normalité des rentabilités.

Les colonnes 5 et 6 confirment ce rejet puisqu'elles indiquent que les queues de leurs distributions sont généralement beaucoup plus épaisses que celles de la distribution gaussienne. En revanche, les colonnes 3 et 4 indiquent que pour un bon nombre d'entreprises, la non normalité est due à l'aplatissement et non pas à l'asymétrie.

La comparaison de ces résultats avec ceux du tableau 2 est des plus intéressante puisqu'elle montre comment l'agrégation hebdomadaire modifie le profil des distributions des rentabilités. Sans signifier qu'il y a normalité, les probabilités critiques sont maintenant plus élevées. De ce fait, les distributions ont tendance à être plus symétriques avec des queues plus aplaties.

Ces résultats sont parfaitement conformes à ceux qui ont été mis en évidence dès 1963 aux U.S.A et en G.B. Mandelbrodt (1963) et Fama (1965) ont prétendu que les lois stables de *Pareto-Levy*² ajustaient mieux les rentabilités financières que n'importe quelle autre distribution.

Cependant, leurs résultats ont été infirmés par de nombreuses études menées par Blatberg & Gonedes (1974), Hagerman (1978) ou Perry (1983) et surtout par Fama (1976) lui-même qui est aujourd'hui convaincu de la quasi-normalité des rentabilités mensuelles.

La principale distribution de probabilité qui est alors apparue dans la littérature en substitution aux lois stables et à la loi normale est la loi de Student – voir Praetz (1972).

Toutefois, en ce qui concerne notre échantillon d'entreprises, la loi de Student est systématiquement rejetée en données journalières aussi bien par un test de Kolmogoroff-Smirnov que par un test du χ^2 comme le prouve le tableau 3.

1. On rappelle que dans de grands échantillons les résultats suivants sont vérifiés :

$$\sqrt{\tilde{b}_1} \rightarrow \mathcal{N}(0,6/T), \tilde{b}_2 \rightarrow \mathcal{N}(3,24/T) \text{ et } \lambda = T[(\sqrt{\tilde{b}_1})/6 + (\tilde{b}_2 - 3)^2/24] \rightarrow \chi_{(2)}^2.$$

2. On dit qu'une variable aléatoire \tilde{r} possède une *distribution stable* s'il existe des constantes a_N et b_N et une suite de variables aléatoires indépendantes $\tilde{\xi}_j - j = 1, \dots, N$ – de même distribution telle que : $a_N \tilde{r} + b_N \stackrel{d}{=} \sum_{j=1}^N \tilde{\xi}_j$ où $\stackrel{d}{=}$ signifie *a la même distribution que*.

TESTS DU MEDAF À DEUX FACTEURS

Tableau 3.

N°	Entreprise	D +	D -	DN	P _c	χ ²	P _c
1	Accor	.100	.069	.100	0	191.313	0
2	Air Liquide	.023	.079	.078	1.63E-6	81.52	4.50E-9
3	Arjomari-Prioux	.052	.072	.072	1.81E-5	118.345	2.28E-16
4	Bouygues	.075	.074	.075	6.55E-6	194.762	0
5	BSN	.081	.065	.081	7.10E-7	162.126	0
6	Carrefour	.067	.081	.081	6.36E-7	210.254	0
7	Casino	.068	.069	.069	4.78E-5	233.683	0
8	CFF	.067	.065	.066	8.84E-5	164.709	0
9	CGIP	9.73E-3	.070	.070	3.19E-5	11.58	.480
10	Chargeurs	.094	.084	.094	0	260.765	0
11	Club Méditerranée	.068	.069	.069	4.78E-5	233.683	0
12	Compagnie Bancaire	.052	.058	.068	8.87E-3	127.067	0
13	Dumez	.081	.037	.081	6.99E-7	72.850	3.07E-8
14	Elf Aquitaine	.031	.087	.087	8.29E-8	92.530	1.26E-13
15	Générale des Eaux	.067	.065	.067	8.84E-5	164.709	0
16	Hachette	.038	.070	.070	3.19E-5	93.133	9.19E-12
17	Lafarge-Copée	.086	.082	.086	1.15E-7	183.442	0
18	Havas	.029	.058	.058	8.96E-4	89.891	3.46E-11
19	Legrand	.037	.070	.70	3.19E-5	62.027	5.16E-8
20	Lyonnaise des Eaux	.057	.053	.058	1.131E-3	59.96	9.43E-9
21	Matra	.067	.064	.067	7.26E-5	61.957	1.12E-12
22	Merlin-Gerin	.029	.070	.070	3.19E-5	71.914	3.56E-10
23	Michelin	.100	.069	.100	0	191.313	0
24	Midi	.085	.051	.085	1.648E-7	117.047	0
25	L'Oréal	.093	.078	.093	7.009E-9	152.984	0
26	Pernod-Ricard	.028	.057	.057	1.42E-3	27.028	1.38E-3
27	Peugeot	.054	.0672	.0672	7.50E-5	137.901	0
28	Sanofi	.046	.084	.084	2.13E-7	110.087	1.11E-16
29	St Louis	.053	.066	.066	1.055E-4	146.308	0
30	Thomson	.052	.071	.071	2.22E-5	194.43	0

TESTS DU MEDAF À DEUX FACTEURS

Tableau 4.

<i>N°</i>	<i>Entreprise</i>	<i>D +</i>	<i>D -</i>	<i>DN</i>	<i>P_c</i>	χ^2	<i>P_c</i>
1	Accor	.177	.215	.215	0	275.59	0
2	Air Liquide	.154	.176	.176	1.575E-6	171.712	0
3	Arjomari-Prioux	.187	.218	.218	0	346.47	0
4	Bouygues	.210	.205	.210	5.265E-9	375.107	0
5	BSN	.138	.242	.242	0	187.692	0
6	Carrefour	.182	.228	.228	0	311.163	0
7	Casino	.264	.216	.264	0	390.209	0
8	CFF	.221	.180	.221	0	293.883	0
9	CGIP	.244	.227	.244	0	444.087	0
10	Chargeurs	.239	.218	.239	0	476.157	0
11	Club Méditerranée	.172	.204	.204	1.269E-8	323.524	0
12	Compagnie Bancaire	.269	.228	.269	0	511.245	0
13	Dumez	.218	.248	.248	0	413.925	0
14	Elf Aquitaine	.163	.238	.238	0	312.14	0
15	Générale des Eaux	.156	.202	.202	1.88E-8	291.550	0
16	Hachette	.245	.248	.248	0	516.468	0
17	Lafarge-Copée	.176	.228	.228	0	269.102	0
18	Havas	.152	.260	.260	0	342.725	0
19	Legrand	.142	.241	.241	0	266.507	0
20	Lyonnaise des Eaux	.171	.224	.224	0	370.712	0
21	Matra	.217	.218	.218	0	305.754	0
22	Merlin-Gerin	.171	.261	.261	0	322.017	0
23	Michelin	.236	.213	.236	0	458.888	0
24	Midi	.085	.239	.164	.239	341.606	0
25	L'Oréal	.180	.243	.243	0	229.04	0
26	Pernod-Ricard	.224	.209	.224	0	345.31	0
27	Peugeot	.190	.273	.273	0	410.763	0
28	Sanofi	.187	.223	.223	0	294.122	0
29	St Louis	.140	.225	.225	0	248.774	0
30	Thomson	.278	.209	.278	0	546.711	0
31	IEE	.099	.188	.188	2.179E-7	127.64	0

TESTS DU MEDAF À DEUX FACTEURS

Les données hebdomadaires confirment ce résultat : la loi de Student est systématiquement rejetée par les deux tests – voir tableau 4.

Une alternative à la loi de Student qui connaît de nombreux développements est le mélange de lois normales – voir Clark (1973) ou Kon (1984).

On peut imaginer un processus élémentaire expliquant de manière assez satisfaisante l'apparition de tels mélanges : par exemple, on peut considérer qu'il existe un certain nombre d'ensembles distincts d'information qui expliquent le marché. Ainsi, la rentabilité d'un actif financier serait pour certains jours tirée dans un ensemble particulier, pour les autres, dans d'autres ensembles. Dans le cas où deux ensembles d'information expliquent la formation des rentabilités financières, la rentabilité \tilde{r} d'un actif sera une variable aléatoire de densité

$$f(r) = \pi \mathcal{N}(r; \mu_1, \sigma_1) + (1 - \pi) \mathcal{N}(r; \mu_2, \sigma_2)$$

où $\mathcal{N}(r; \mu, \sigma)$ est la densité de la loi normale d'espérance μ et de variance σ^2 .

La recherche des processus qui engendrent les rentabilités des actifs financiers s'est donc concentrée autour d'un petit nombre de distributions de probabilité. Or, de manière assez étonnante, non seulement la plupart de ces distributions appartiennent à la même classe – celle des distributions elliptiques – mais de plus, elles constituent une des conditions suffisantes pour que l'analyse *moyenne-variance* des marchés financiers soit valide.

Les distributions elliptiques sont une généralisation naturelle des lois normales. On ne s'étonnera donc pas de rencontrer un certain parallélisme dans leurs définitions. Ainsi, la loi normale standard – i.e. : centrée et réduite – a pour *alter ego* dans la classe des distributions elliptiques, les distributions sphériques. Par définition, un vecteur aléatoire \mathbf{r} à valeurs dans \mathbf{R}^r est sphérique, si pour toute matrice Γ orthogonale, matrice telle que $\Gamma\Gamma = \mathbf{I}_r$ où \mathbf{I}_r est la matrice unité de \mathbf{R}^r : $\Gamma\mathbf{r} = \mathbf{r}$. On montre que sa fonction caractéristique – $\psi(\mathbf{t})$ – est telle qu'il existe une fonction scalaire $\phi(\cdot)$ vérifiant $\psi(\mathbf{t}) = \phi(\mathbf{t}'\mathbf{t})$. On note $\mathbf{r} \rightarrow S_k(\phi)$ pour signifier que \mathbf{r} est sphérique de fonction caractéristique $\phi(\cdot)$.

Dès lors, un vecteur de variables aléatoires \mathbf{r} est réputé elliptique de paramètres $\mu \in \mathbf{R}^r$ et Ω si et seulement si :

$$\mathbf{r} = \mu + \mathbf{A}'\mathbf{d} \tag{27}$$

où \mathbf{A} est une matrice $k \times r$ de rang k telle que $\mathbf{A}'\mathbf{A} = \Omega$, $\text{rang}(\Omega) = k$ et $\mathbf{d} \rightarrow S_k(\phi)$.

On montre aussi qu'un vecteur aléatoire \mathbf{r} est elliptique si et seulement si sa fonction caractéristique est de la forme : $\psi(\mathbf{t}) = e^{i\mathbf{t}'\mu} \phi(\mathbf{t}'\Omega\mathbf{t})$. On note alors :

$$\mathbf{r} \rightarrow \mathcal{E}_r(\mu, \Omega; \phi).$$

Enfin, quand la densité de probabilité associée à \mathbf{r} existe – hypothèse qui est la règle en économie –, cette dernière est de la forme :

$$f(\mathbf{r}) = c |\Omega|^{-1/2} g[(\mathbf{r} - \mu)'\Omega^{-1}(\mathbf{r} - \mu)],$$

TESTS DU MEDAF À DEUX FACTEURS

où c est une constante de normalisation qui garantit que $f(\cdot)$ est une densité de probabilité.

Bien que l'étude systématique de cette classe de vecteurs aléatoires soit relativement récente – le papier séminal de Kelker (1970) n'a qu'une vingtaine d'années –, lui appartiennent, comme cela a déjà été signalé précédemment, les principales distributions de probabilité employées en économie et essentiellement en probabilité. Ainsi, les lois multinormales, les multistudents, multicauchys, logistiques, uniformes ou autres mélanges de lois multinormales sont des distributions elliptiques. On note au passage que ces distributions sont dites elliptiques car dans \mathbf{R}^2 leurs contours d'isoprobabilité sont des ellipses.

Naturellement, les vecteurs de variables aléatoires elliptiques sont particulièrement intéressants d'un point de vue analytique parce qu'ils répliquent et généralisent aussi les propriétés des vecteurs normaux. On note que, quand les moments des vecteurs existent, conformément à l'intuition, on a : $\mathbf{E}\mathbf{r} = \boldsymbol{\mu}$. En revanche¹ : $\text{cov}(\mathbf{r}) = -2\phi'(0)\Omega$.

En outre, étant donnée la partition du vecteur \mathbf{r} introduite plus haut, les distributions marginales associées à une distribution elliptique sont aussi elliptiques. On a :

$$\mathbf{r}_l \rightarrow \mathcal{E}_k(\boldsymbol{\mu}_l, \Omega_{ll}; \phi) \quad l = 1, 2 \quad \text{et} \quad k = \begin{cases} p & \text{si } l = 1 \\ q & \text{sinon} \end{cases} \quad (28)$$

Cette dernière propriété est aussi partagée par les distributions conditionnelles – voir en particulier Fang, Kotz & Ng (1990). Un point qui mérite d'être signalé est que toute translation d'un vecteur elliptique est aussi un vecteur elliptique. Plus précisément, si \mathbf{B} est une matrice $k \times m$ et \mathbf{v} un vecteur $m \times 1$, on a :

$$\mathbf{v} + \mathbf{B}'\mathbf{r}_l \rightarrow \mathcal{E}_m(\mathbf{v} + \mathbf{B}'\boldsymbol{\mu}_l, \mathbf{B}'\Omega_{ll}\mathbf{B}; \phi) \quad (29)$$

Par conséquent, les distributions elliptiques traduisent une certaine forme de stabilité puisque toute combinaison linéaire de variables elliptiques est distribuée elliptiquement.

La classe des vecteurs aléatoires elliptiques possède une dernière propriété très importante : certaines fonctions de ces vecteurs ont une distribution invariante. Ainsi :

$$t(\mathbf{r}) = \frac{\sqrt{\tau-1}}{\tau} \frac{\mathbf{1}'_{\tau}\mathbf{r}}{\sqrt{\mathbf{r}'(\mathbf{I}_{\tau} - \frac{1}{\tau}\mathbf{1}_{\tau}\mathbf{1}'_{\tau})\mathbf{r}}} \rightarrow t_{\tau-1} \quad (30)$$

De la même manière :

$$F(\mathbf{r}) = \frac{b}{a} \frac{\mathbf{r}'\mathbf{A}\mathbf{r}}{\mathbf{r}'\mathbf{B}\mathbf{r}} \rightarrow F(a, b) \quad (31)$$

où \mathbf{A} et \mathbf{B} sont deux matrices de projection orthogonales – $\mathbf{A}\mathbf{B} = \mathbf{0}$ – de rangs respectifs a et b avec $a + b < \tau$.

¹ Ceci signifie que l'on ne peut interpréter la matrice Ω comme une matrice des variances-covariances de \mathbf{r} à moins que $\phi'(0) = -1/2$, ce qui n'est le cas que pour la loi normale.

TESTS DU MEDAF À DEUX FACTEURS

On constate donc qu'un grand nombre de tests statistiques développés autour de la loi normale sont invariants sur toute la classe des distributions elliptiques. Pour conclure sur ce point, on notera qu'il est possible d'associer à chaque distribution elliptique une distribution log-elliptique. Ainsi, l'analogie avec la distribution normale reste entière et s'il est possible de modéliser les rentabilités des actifs financiers à partir des distributions elliptiques, on peut, en parallèle, modéliser leurs prix à partir des distributions log-elliptiques.

Les distributions elliptiques sont particulièrement importantes pour la finance parce qu'elles permettent d'obtenir la plupart des résultats qui sont valides dans un contexte gaussien.

Ainsi, on sait que les analyses *moyenne-variance*, c'est-à-dire les analyses dans lesquelles l'espérance de l'utilité des investisseurs est remplacée par une fonction de l'espérance et de la variance des rentabilités des projets, sont valides si :

- Soit les fonctions d'utilité des investisseurs sont quadratiques.
- Soit la distribution des rentabilités appartient à la classe des distributions de probabilité caractérisées par des paramètres de localisation et d'échelle¹ – voir Piatecki (1993).

Or, Owen & Rabinovitch (1982) ont montré que, dans la mesure où espérance et variance existent, cette classe de distributions de probabilité est équivalente à la classe des distributions elliptiques. Par conséquent, le théorème de séparation de Tobin (1958) qui énonce les conditions sous lesquelles le choix optimal de l'investissement dans des actifs risqués est indépendant de la richesse peut être étendu aux distributions elliptiques.

On notera cependant que, pour un portefeuille w d'actifs de distribution $\mathcal{EE}_\tau(\mu, \Omega; \phi)$ elliptique, $w'\Omega w$ n'est pas la variance de la rentabilité du portefeuille car Ω n'est que proportionnelle à la matrice des variances-covariances des actifs.

On en déduit que, *toutes choses égales par ailleurs*, le MEDAF demeure vérifié sous l'hypothèse d'ellipticité, moyennant une redéfinition de la prime de risque.

Toutefois, sur le plan statistique et économétrique, des adaptations doivent être introduites pour tenir compte de l'abolition de l'hypothèse de normalité.

Ainsi, en raison de l'unicité du régresseur dans les N équations qui composent le système (21), l'adoption de la structure *SUR* emprunte sa légitimité uniquement à la corrélation qu'il y a entre les N vecteurs des résidus $\tilde{\epsilon}_j$. De ce fait, la méthode d'estimation est celle des *MCG*.

1. Considérons un vecteur aléatoire r dont la distribution dépend d'un vecteur μ de paramètres et d'une matrice définie positive Ω . Considérons pour un scalaire h et un vecteur ρ la variable aléatoire

$$z = (\rho'r - E[\rho'r]) / (h\sqrt{\rho'\Omega\rho}).$$

Dans ce cas, la distribution de probabilité de r appartient à la classe des densités de probabilité caractérisée par des paramètres de localisation et d'échelle si et seulement si la densité de z est indépendante de ρ , c'est-à-dire $f(z, \rho) = f(z)$.

TESTS DU MEDAF À DEUX FACTEURS

Cependant, il est bien connu qu'appliquer les *MCG* pour l'estimation du vecteur \mathbf{c} dans l'équation (21) revient – pour peu que la matrice de dimension (NT, NT) , $s^2\Omega_c$ des variances-covariances des résidus ne soit pas singulière – à appliquer les *MCO* pour l'estimation de :

$$\tilde{\mathbf{r}}^c = \mathbf{X}^c \mathbf{b}^c + \tilde{\mathbf{e}}^c \quad (32)$$

avec :
$$\tilde{\mathbf{r}}^c = \frac{1}{s} \Omega_c^{-1/2} \mathbf{r}^c \quad \tilde{\mathbf{X}}^c = \frac{1}{s} \Omega_c^{-1/2} \mathbf{X}^c \quad \text{et} \quad \tilde{\mathbf{e}}^c = \frac{1}{s} \Omega_c^{-1/2} \mathbf{e}^c$$

Ainsi, l'estimateur $\hat{\mathbf{b}}^c$ des *MCO* est :

$$\hat{\mathbf{b}}^c = [\mathbf{X}^c{}' \mathbf{X}^c]^{-1} \mathbf{X}^c{}' \tilde{\mathbf{r}}^c = [\mathbf{X}^c{}' \Omega_c^{-1} \mathbf{X}^c]^{-1} \mathbf{X}^c{}' \Omega_c^{-1} \mathbf{r}^c \quad (33)$$

L'estimateur (33) est solution du programme de minimisation :

$$\min_{\mathbf{b}^c} d_{\mathbf{I}}^2(\tilde{\mathbf{r}}^c, \mathbf{L}) \Leftrightarrow \min_{\mathbf{b}^c} d_{\Omega_c^{-1}}^2(\mathbf{r}^c, \mathbf{L}) \quad (34)$$

où $d_{\mathbf{I}}^2(\tilde{\mathbf{r}}^c, \mathbf{L})$ est la distance euclidienne entre $\tilde{\mathbf{r}}^c$ et le sous-espace vectoriel \mathbf{L} engendré par les vecteurs colonnes de $\tilde{\mathbf{X}}^c$ et $d_{\Omega_c^{-1}}^2(\mathbf{r}^c, \mathbf{L})$ est la Ω_c^{-1} – distance entre \mathbf{r}^c et le sous-espace vectoriel engendré par les vecteurs colonnes de \mathbf{X}^c .

Ces précisions faites, nous pouvons désormais raisonner en termes de distance euclidienne c'est-à-dire avec la métrique \mathbf{I} . Autrement dit, nous pouvons considérer un *modèle abstrait* représentatif aussi bien de (21) que de (15) :

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= \underset{(NT, 1)}{\mathbf{X}} \underset{(NT, k)}{\mathbf{b}} + \underset{(NT, 1)}{\mathbf{e}} & (35) \\ k = 2N \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}^{nc} \quad \mathbf{X} = \mathbf{X}^{nc} \quad \mathbf{b} = \mathbf{b}^{nc} \quad \text{et} \quad \mathbf{e} = \mathbf{e}^{nc} & \text{ sous } H_A \\ k = N + 1 \quad \mathbf{r} = \tilde{\mathbf{r}}^c \quad \mathbf{X} = \tilde{\mathbf{X}}^c \quad \mathbf{b} = \mathbf{b}^c \quad \text{et} \quad \mathbf{e} = \tilde{\mathbf{e}}^c & \text{ sous } H_0 \end{aligned}$$

Maintenant, minimiser la distance euclidienne entre \mathbf{r} et le sous-espace vectoriel engendré par les vecteurs colonnes de \mathbf{X} revient à effectuer la projection orthogonale de \mathbf{r} sur ce dernier. Cette projection $\hat{\mathbf{r}}$ est une fonction linéaire de \mathbf{r} et est telle que :

$$\hat{\mathbf{r}} = \mathbf{P}\mathbf{r} \quad \text{avec} \quad \mathbf{P} = \mathbf{I} - \mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}' \quad (36)$$

Remarquons aussi que chaque composante du vecteur \mathbf{r} – qui représente en fait l'échantillon observé de taille $\tau = NT$ sur la variable endogène – peut être considérée comme la réalisation d'une variable aléatoire r et que chaque vecteur-ligne de \mathbf{X} est assimilable à la réalisation d'un vecteur aléatoire à k composantes \mathbf{x}' . Dans ce cas, la matrice des variances-covariances de $[\mathbf{x}', r]'$, de terme générique σ_{ij} s'écrit :

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \Sigma_{\mathbf{xx}} & \vdots & \Sigma_{\mathbf{x}r} \\ \dots & \vdots & \dots \\ \Sigma_{\mathbf{x}r} & \vdots & \Sigma_{rr} \end{pmatrix} \quad (37)$$

et un estimateur convergent de cette matrice est $\hat{\Sigma}$ de terme générique¹ :

1. Pour alléger les notations, on supposera que les variables endogène et exogène ont été préalablement centrées.

TESTS DU MEDAF À DEUX FACTEURS

$$\hat{\sigma}_{ij}^2 = \frac{1}{\tau} \sum_{s=1}^{\tau} x_{is} x_{js} \quad i, j = 1, \dots, k+1 \quad (38)$$

où $x_{k+1,s} = r_s$, c'est-à-dire la s -ième observation de r , $s = 1, \dots, \tau = NT$ dans l'échantillon.

Lorsque $[\mathbf{x}' \ r]'$ est tiré d'une loi normale $\mathcal{N}(\mathbf{0}, \Sigma)$, l'estimateur des MCO qui peut encore s'écrire :

$$\hat{\mathbf{b}} = \hat{\Sigma}_{\mathbf{xx}}^{-1} \hat{\Sigma}_{\mathbf{xr}} \quad (39)$$

converge en probabilité et est distribué selon une loi normale. Sa variance s'écrit :

$$\mathbf{V}(\hat{\mathbf{b}}) = \frac{1}{\tau} \sigma_e^2 \Sigma_{\mathbf{xx}}^{-1} \quad (40)$$

où σ_e^2 désigne la variance des erreurs \mathbf{e} et dont un estimateur convergent est :

$$\hat{\sigma}_e^2 = \frac{1}{\tau} \|\mathbf{r} - \mathbf{X}\hat{\mathbf{b}}\|^2 = \hat{\Sigma}_{rr} - \hat{\Sigma}_{\mathbf{x}r} \hat{\Sigma}_{\mathbf{xx}}^{-1} \hat{\Sigma}_{\mathbf{x}r} \quad (41)$$

D'après le théorème *central-limite* de *Lindeberg-Lévy* – voir Theil (1971) ou Fomby et al. (1984) –, les termes de la matrice des variances-covariances $\mathbf{V}(\hat{\Sigma})$ de la distribution limite de $\sqrt{\tau} \hat{\Sigma}$ s'écrivent :

$$\text{COV}(\mathbf{x}_h' \mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j' \mathbf{x}_l) = \pi_{hijl} - \sigma_{hi} \sigma_{jl} \quad (42)$$

avec $\pi_{hijl} = \mathbf{E}(\mathbf{x}_h' \mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j' \mathbf{x}_l)$ et $h, i, j, l = 1, \dots, k+1$.

Or, on sait également que, si $\phi(\cdot)$ est une fonction vectorielle de $\hat{\Sigma}$ qui est différentiable en Σ , alors :

$$\sqrt{\tau} (\phi(\hat{\Sigma}) - \phi(\Sigma)) \xrightarrow{\text{asy}} \mathcal{N}(\mathbf{0}, \phi_{\Sigma} \mathbf{V}(\hat{\Sigma}) \phi_{\Sigma}') \quad (43)$$

où ϕ_{Σ} est la matrice des dérivées partielles de $\phi(\cdot)$ par rapport à Σ – voir Wesselman & Praag (1987), Praag & Wesselman (1989), Praag (1981) ou Praag, de Leeuw & Kloek (1988).

Il s'en suit que, comme l'estimateur $\hat{\mathbf{b}}$ est, d'après l'équation (39), fonction de $\hat{\Sigma}$, qui suit asymptotiquement une loi normale, il vient :

$$\sqrt{\tau} (\hat{\mathbf{b}} - \mathbf{b}) \xrightarrow{\text{asy}} \mathcal{N}(\mathbf{0}, \mathbf{b}_{\Sigma} \mathbf{V}(\hat{\Sigma}) \mathbf{b}_{\Sigma}') \quad (44)$$

où \mathbf{b}_{Σ} est la matrice des dérivées partielles de $\hat{\mathbf{b}}$ par rapport à Σ qui peut être définie comme suit : si on note $\text{vec}(\Sigma)$ le vecteur-colonne dans lequel sont superposés les $k+1$ vecteurs-colonnes à $k+1$ composantes chacun de Σ , alors :

$$\mathbf{b}_{\Sigma} = [-\mathbf{b}' \otimes [\mathbf{0} \ \Sigma_{\mathbf{xx}}^{-1}] \ [\mathbf{0} \ \Sigma_{\mathbf{xx}}^{-1}]] \quad (45)$$

En revanche, si on considère que le vecteur aléatoire $[\mathbf{x}' \ r]'$ est tiré dans la classe plus générale des distributions elliptiques, alors son moment centré d'ordre 4 est :

$$\pi_{hijl} = (1 + \kappa) (\sigma_{hi} \sigma_{jl} + \sigma_{hj} \sigma_{il} + \sigma_{hi} \sigma_{ij}) \quad h, i, j, l = 1, \dots, k+1 \quad (46)$$

TESTS DU MEDAF À DEUX FACTEURS

où $\kappa = (b_2 - 3)/3$ est le *kurtosis* commun des distributions marginales de $[\mathbf{x}' \ r]'$. De ce fait, si on remplace π_{hij} dans l'équation (42) par l'expression ci-dessus, il apparaît que le terme générique de la matrice $\mathbf{V}_{\mathcal{L}\mathcal{L}}(\hat{\Sigma})$ des variances-covariances de $\hat{\Sigma}$ sous l'hypothèse d'ellipticité est :

$$\text{COV}(\mathbf{x}_h' \mathbf{x}_i, \mathbf{x}_l' \mathbf{x}_j) = (1 + \kappa) (\sigma_{hi}\sigma_{jl} + \sigma_{hj}\sigma_{il} + \sigma_{hl}\sigma_{ij} - \sigma_{hi}\sigma_{jl}) \quad (47)$$

La matrice $\mathbf{V}_{\mathcal{L}\mathcal{L}}(\hat{\Sigma})$ ainsi constituée, quand elle est introduite dans l'expression $\mathbf{b}'_{\Sigma} \mathbf{V}(\hat{\Sigma}) \mathbf{b}_{\Sigma}$, implique que, sous l'hypothèse d'ellipticité, la variance de l'estimateur $\hat{\mathbf{b}}$ s'écrit :

$$\mathbf{V}_{\mathcal{L}\mathcal{L}}(\hat{\mathbf{b}}) = (1 + \kappa) \frac{1}{T} \sigma_e^2 \hat{\Sigma}_{xx}^{-1} = (1 + \kappa) (\hat{\Sigma}_{rr} - \hat{\Sigma}'_{xr} \hat{\Sigma}_{xx}^{-1} \hat{\Sigma}_{xr}) \hat{\Sigma}_{xx}^{-1} \quad (48)$$

Comme le soulignent Wesselman & Praag (1987), sous l'hypothèse d'ellipticité, la variance de l'estimateur $\hat{\mathbf{b}}$ obtenue sous l'hypothèse de normalité doit être corrigée par un facteur égal à $1 + \kappa$. On remarquera alors que lorsque les observations – en l'occurrence les rentabilités – sont normalement distribuées – $\kappa = 0$ et $b_2 = 3$ –, on retrouve la forme habituelle de la variance de l'estimateur des *MCO* ou des *MCG*. En revanche, quand les rentabilités sont elliptiquement distribuées, alors, selon l'épaisseur des queues de la distribution – $\kappa > 0$ ou $\kappa < 0$ – la variance doit être corrigée. Bien entendu κ doit être estimé. On pourra, par exemple, l'estimer par la moyenne empirique des kurtosis des différentes variables.

On voit donc bien que l'adoption de l'hypothèse plus réaliste d'ellipticité des rentabilités des actifs financiers n'induit pas de difficulté majeure pour tester le MEDAF. En effet, la seule modification que cela impose par rapport à la démarche traditionnelle est celle mise en évidence dans la relation (48) et concerne donc uniquement le test de Student relatif à la significativité des paramètres du modèle : plus la queue de la distribution d'une rentabilité est épaisse, plus le kurtosis est élevé, plus la variance est importante, plus la statistique de Student observée est réduite et plus on s'approche de la région d'acceptation de l'hypothèse nulle.

En outre, Kariya (1977) et Kariya & Sinha (1989) montrent que les tests d'auto-corrélation des résidus dans un modèle linéaire demeurent robustes même sous l'hypothèse d'ellipticité ; c'est-à-dire qu'ils restent UPP ou même uniformément plus puissant sans biais dans le cas du test de *Durbin* et *Watson*¹.

Un dernier test qui nous intéresse particulièrement dans le cadre du MEDAF est celui du rapport des vraisemblances. A cet égard, si l'on suppose que $\mathbf{r} \rightarrow \mathcal{E}\mathcal{E} \tau(\cdot, \cdot; \phi)$ alors $\mathbf{e} \rightarrow S(\phi)$. Il s'en suit, d'après un théorème dû à *Anderson* et *Fang* et rapporté par *Fang*, *Fang* et al. (1990) que, si $\phi(\cdot)$ est une fonction continue décroissante, le rapport des vraisemblances pour tester l'hypothèse linéaire multiple :

$$\begin{aligned} H_0 : \mathbf{H}\mathbf{b}^{nc} &= \mathbf{h} \\ H_1 : \mathbf{H}\mathbf{b}^{nc} &\neq \mathbf{h} \end{aligned} \quad (49)$$

$$\text{est :} \quad -2 \ln \lambda = \tau [\ln | \hat{\Sigma}_c | - \ln | \hat{\Sigma}_{nc} |] \quad (50)$$

1. Voir aussi la revue de la littérature dans l'article de Chmielewski (1981).

TESTS DU MEDAF À DEUX FACTEURS

Enfin, sous H_0 , $-2 \ln \lambda$ suit un χ_N^2 qui est indépendant de $\phi(\cdot)$. Cependant, Fomby et al. (1984) montrent que ce test est seulement asymptotiquement valide et qu'une distribution de Fisher $F_{N, \tau-k}$ peut être utilisée au lieu du χ_N^2 lorsque le nombre d'observations est jugé insuffisant.

4. Le MEDAF et le marché français

Comme cela a déjà été signalé plus haut, la méthode de *Gibbons* permet d'obtenir deux ensembles d'estimations :

- Les estimations des α_j et β_j sans contrainte (voir tableaux 5 et 6).
- Les estimations de β_j et de γ sous contrainte d'efficacité (voir tableau 7 et 8).

Le tableau 5 présente pour chacune des 30 entreprises composant l'échantillon étudié, les valeurs estimées des paramètres α_j et β_j du modèle de marché issues de la régression *SUR* – colonne 3 –. À côté de ces estimations, sont présentés les écarts-types des estimateurs dont elles sont la réalisation – colonne 4 –, les t de Student – colonne 5 – et les probabilités critiques qui leurs correspondent – colonne 6 –. Ces dernières désignent la probabilité que la valeur du t de Student soit dépassée en valeur absolue. Si le seuil de risque – $\alpha = 5\%$ par exemple – est supérieur à cette valeur, l'hypothèse nulle est rejetée. On note qu'en raison de problèmes de multicolinéarité, aucune de ces statistiques n'a été évaluée pour Havas.

À la lumière de ces résultats évalués sous l'hypothèse de normalité des rentabilités financières, on remarque que les constantes α_j du modèle de marché ne sont en général pas significatives. Elles ne le sont au seuil $\alpha = 5\%$ que pour Bouygues et Michelin, et au seuil $\alpha = 10\%$ que pour ces dernières ainsi que BSN, La Compagnie Bancaire et Thomson. En revanche, tous les β_j se sont avérés significatifs.

Ces résultats pourraient laisser penser que le modèle de marché ne peut être tenu pour convenablement spécifié. En réalité, il n'en est rien puisqu'une série de tests de Fisher – tests qui ne sont pas présentés ici – a été évaluée et a permis de conclure à la validité globale du modèle de marché et ce, pour un seuil de risque $\alpha = 1\%$ et pour l'ensemble des 29 entreprises considérées.

Le tableau 6 a la même structure que le tableau précédent, à l'exception de la troisième colonne qui présente les statistiques de Durbin et Watson. Les colonnes 4, 5 et 6 contiennent la même information que leurs analogues du tableau 5 ; information qui est évaluée cette fois sous l'hypothèse d'ellipticité des rentabilités financières.

En général, les conclusions statistiques demeurent inchangées. Le Kurtosis moyen des séries considérées étant positif – $\kappa = 2.10$ – l'écart-type des estimateurs sous l'hypothèse elliptique ne peut qu'être supérieur à celui préalablement obtenu. Les statistiques de Student sont par conséquent inférieures à celles suggérées par l'hypothèse de normalité. De ce fait, les probabilités critiques sont plus élevées. Pratiquement, on peut constater que, malgré cela, tous les β_j demeurent significatifs. En revanche, la constante du modèle de marché n'est plus significative pour aucun titre.

TESTS DU MEDAF À DEUX FACTEURS

Tableau 5.

N°	Entreprise	Normalité			
		$\frac{\kappa}{\alpha}$ $\frac{\kappa}{\beta}$	$\frac{\sigma_{\alpha}}{\sigma_{\beta}}$	t_{α} t_{β}	$\frac{P^{\alpha}}{P^{\beta}}$ $\frac{P^{\alpha}}{P^{\beta}}$
1	Accor	2.96E-3	.184E-2	.161	.87
		.963	.683E-1	15.093	.18E-50
2	Air Liquide	.671E-3	.171E-2	.392	.69
		.788	.593E-1	13.280	.30E-39
3	Arjomari-Prioux	-.359E-4	.231E-2	-.155E-1	.99
		.952	.800E-1	11.897	.12E-31
4	Bouygues	-.495E-2	.233E-2	-2.126	.34E-1
		1.257	.807E-1	15.588	.88E-54
5	BSN	.293E-2	.151E-2	1.939	.52E-1
		.748	.524E-1	14.273	.32E-45
6	Carrefour	.155E-2	.172E-2	.901	.37
		.864	.595E-1	14.525	.84E-47
7	Casino	.204E-3	.316E-2	.646E-1	.95
		1.146	.109	10.476	.11E-24
8	CFF	-.107E-2	.224E-2	-.478	.63
		.707	.778E-1	9.092	.97E-19
9	CGIP	-.265E-3	.209E-2	-.415	.68
		1.153	.723	15.939	.34E-56
10	Chargeurs	-.183E-2	.233E-2	-.821	.41
		1.008	.755E-1	13.012	.10E-37
11	Club Méditerranée	.316E-3	.209E-2	.151	.88
		.838	.725E-1	11.560	.66E-30
12	Compagnie Bancaire	-.437E-2	.243E-2	-1.794	.73E-1
		1.100	.844E-1	13.036	.76E-38
13	Dumez	-.125E-3	.241E-2	-.520E-1	.96
		1.361	.834E-1	16.313	.80E-59
14	Elf Aquitaine	.404E-2	.207E-2	1.96	.51E-1
		.470	.716	6.566	.52E-10
15	Générale des Eaux	.167E-2	.178E-2	.934	.35
		.902	.619E-1	14.590	.33E-47
16	Hachette	-.142E-2	.273E-2	-.521	.60
		1.155	.945E-1	12.230	.21E-33
17	Lafarge-Copée	-.803E-3	.171E-2	-.470	.64
		1.276	.592E-1	21.557	.45E-102
18	Havas	NE	NE	NE	NE
		NE	NE	NE	NE
19	Legrand	.656E-3	.194E-2	.338	.74
		1.052	.673E-1	15.648	.34E-54
20	Lyonnaise des Eaux	.190E-2	.202E-2	.940	.35
		1.044	.700E-1	14.920	.24E-49
21	Matra	.125E-2	.289E-2	.432	.67
		1.022	.100	10.191	.22E-23
22	Merlin-Gerin	.372E-2	.271E-2	1.376	.17
		1.047	.938E-1	11.154	.69E-28
23	Michelin	-.650E-2	.249E-2	-2.067	.91E-2
		1.390	.864E-1	16.088	.31E-57
24	Midi	-.375E-2	.239E-2	-1.569	.12
		1.030	.829E-1	12.426	.19E-34
25	L'Oréal	.356E-2	.242E-2	1.478	.14
		1.114	.835E-1	13.340	.14E-39
26	Permod-Ricard	-.315E-3	.192E-2	-.164	.87
		.871	.666E-1	13.078	.44E-38
27	Peugeot	.118E-3	.206E-2	.572E-1	.95
		1.273	.713E-1	17.845	.32E-70
28	Sanofi	.182E-4	.183E-2	.991E-2	.99
		.813	.635E-1	12.795	.17E-36
29	St Louis	.286E-2	.232E-2	1.232	.22
		.545	.804E-1	6.781	.12E-10
30	Thomson	-.472E-2	.247E-2	-1.908	.56E-1
		1.141	.858E-1	13.301	.23E-39

TESTS DU MEDAF À DEUX FACTEURS

Tableau 6.

N°	Entreprise	DW	Ellipticité		
			$\frac{\sigma_\alpha}{\sigma_\beta}$	$\frac{t_\alpha}{t_\beta}$	$\frac{p_c^2}{p_c^2}$
1	Accor	2.36	.324E-2	.913E-1	.93
			.112	8.567	.11E-16
2	Air Liquide	2.05	.302E-2	.223	.82
			.105	7.537	.48E-13
3	Arjomari-Prioux	1.87	.407E-2	-.882E-2	.99
			.141	6.753	.15E-10
4	Bouygues	2.01	.410E-2	-1.207	.23
			.142	8.847	.90E-18
5	BSN	2.29	.266E-2	1.101	.27
			.923E-1	8.101	.55E-15
6	Carrefour	2.13	.302E-2	.511	.61
			.105	8.244	.17E-15
7	Casino	2.40	.556E-2	.366E-1	.97
			.193	5.946	.28E-8
8	CFF	1.80	.395E-2	-.271	.79
			.137	5.160	.25E-6
9	CGIP	2.27	.368E-2	-.235	.814
			.127	9.046	.15E-18
10	Chargeurs	2.13	.394E-2	-.466	.64
			.136	7.385	.15E-12
11	Club Méditerranée	2.07	.368E-2	857E-1	.93
			.128	6.561	.53E-10
12	Compagnie Bancaire	2.23	.499E-2	-1.018	.31
			.149	7.399	.14E-12
13	Dumez	2.08	.424E-2	-.295E-1	.98
			.147	9.259	.21E-19
14	Elf Aquitaine	2.08	.364E-2	1.110	.27
			.126	3.727	.19E-3
15	Générale des Eaux	2.19	.314E-2	.530	.60
			.109	8.281	.123E-15
16	Hachette	2.32	.480E-2	-.296	.77
			.166	6.942	.39E-11
17	Lafarge-Copée	2.04	.301E-2	-.267	.79
			.104	12.235	.20E-33
18	Havas	NE	NE	NE	NE
			NE	NE	NE
19	Legrand	2.33	.324E-2	.192	.85
			.119	8.881	.66E-18
20	Lyonnaise des Eaux	2.11	.356E-2	.534	.59
			.123	8.468	.25E-16
21	Matra	2.19	.510E-2	.245	.81
			.177	5.784	.73E-8
22	Merlin-Gerin	1.93	.477E-2	.781	.43
			.165	6.331	.24E-9
23	Michelin	2.10	.439E-2	-1.480	.14
			.152	9.131	.68E-19
24	Midi	2.08	.421E-2	-.891	.37
			.146	7.053	.18E-11
25	L'Oréal	1.90	.424E-2	.839	.40
			.147	7.571	.37E-13
26	Pernod-Ricard	2.21	.338E-2	.932E-1	.93
			.117	7.423	.11E-12
27	Peugeot	1.96	.363E-2	.325E-1	.97
			.126	10.128	.41E-23
28	Sanofi	2.34	.323E-2	.563E-2	1.00
			.112	7.262	.38E-12
29	St Louis	2.04	.409E-2	.699	.48
			.142	3.848	.12E-3
30	Thomson	1.98	.436E-2	-1.083	.279
			.151	7.549	.44E-13

TESTS DU MEDAF À DEUX FACTEURS

Tableau 7.

N°	Entreprise	$\hat{\beta}$	Normalité		
			$\hat{\sigma}_{\beta}$	t	P _c
1	Accor	.962	.631E-1	15.251	.162E-51
2	Air Liquide	.792	.588E-1	13.476	.218E-40
3	Arjomari-Prioux	.954	.792E-1	12.047	.202E-32
4	Bouygues	1.273	.802E-1	15.879	.885E-56
5	BSN	.742	.520E-1	14.273	.325E-45
6	Carrefour	.861	.590E-1	14.260	.209E-47
7	Casino	1.141	.108	10.528	.642E-25
8	CFF	.722	.773E-1	9.347	.902E-20
9	CGIP	1.152	.716E-1	16.093	.286E-57
10	Chargeurs	1.017	.767E-1	13.248	.461E-39
11	Club Méditerranée	.842	.718E-1	11.73	.867E-31
12	Compagnie Bancaire	1.118	.839E-1	13.327	.161E-39
13	Dumez	1.349	.827E-1	16.301	.976E-59
14	Elf Aquitaine	.468	.710E-1	6.590	.438E-10
15	Générale des Eaux	.897	.613E-1	14.6514	.131E-47
16	Hachette	1.157	.935E-1	12.378	.346E-34
17	Lafarge-Copée	1.270	.587E-1	21.657	.526E-103
18	Havas	NE	NE	NE	NE
19	Legrand	1.047	.667E-1	15.729	.956E-55
20	Lyonnaise des Eaux	1.033	.694E-1	14.88	.428E-49
21	Matra	1.015	.993E-1	10.224	.155E-23
22	Merlin-Gerin	1.027	.933E-1	11.002	.372E-27
23	Michelin	1.409	.860E-1	16.379	.268E-59
24	Midi	1.048	.824E-1	12.713	.498E-36
25	L'Oréal	1.092	.832E-1	13.128	.228E-38
26	Pernod-Ricard	.877	.659E-1	13.296	.245E-39
27	Peugeot	1.263	.708E-1	17.849	.294E-70
28	Sanofi	.819	.629E-1	13.015	.101E-37
29	St Louis	.547	.7977E-1	6.8629	.691E-11
30	Thomson	1.159	.853	13.593	.439E-41

TESTS DU MEDAF À DEUX FACTEURS

Tableau 8.

N°	Entreprise	DW	Normalité		
			$\hat{\sigma}_\beta$	t	P _c
1	Accor	2.36	.111	8.656	.488E-17
2	Air Liquide	2.05	.104	7.648	.204E-13
3	Arjomari-Prioux	1.86	.140	6.837	.807E-11
4	Bouygues	1.99	.141	9.013	.20E-18
5	BSN	2.28	.916E-1	8.101	.547E-15
6	Carrefour	2.13	.104	8.298	.11E-15
7	Casino	2.40	.191	5.975	.23E-8
8	CFF	1.78	.136	5.305	.11E-6
9	CGIP	2.27	.126	9.134	.66E-19
10	Chargeurs	2.13	.135	7.519	.55E-13
11	Club Méditerranée	2.07	.126	6.659	.28E-10
12	Compagnie Bancaire	2.21	.148	7.564	.39E-13
13	Dumez	2.07	.146	9.252	.22E-19
14	Elf Aquitaine	2.08	.125	3.741	.18E-3
15	Générale des Eaux	2.19	.108	8.316	.91E-16
16	Hachette	2.32	.165	7.025	.21E-11
17	Lafarge-Copée	2.04	.103	12.292	.10E-33
18	Havas	NE	NE	NE	NE
19	Legrand	2.32	.117	8.927	.44E-18
20	Lyonnaise des Eaux	2.10	.122	8.447	.30E-16
21	Matra	2.19	.175	5.803	.65E-8
22	Merlin-Gerin	1.91	.164	6.245	.42E-9
23	Michelin	2.07	.152	9.296	.15E-19
24	Midi	2.07	.145	7.216	.54E-12
25	L'Oréal	1.88	.147	7.451	.93E-13
26	Pernod-Ricard	2.20	.116	7.546	.45E-13
27	Peugeot	1.96	.125	10.131	.40E-23
28	Sanofi	2.33	.111	7.387	.15E-12
29	St Louis	2.04	.140	3.893	.99E-4
30	Thomson	1.96	.150	7.715	.12E-13

TESTS DU MEDAF À DEUX FACTEURS

On constate également que parmi les 29 entreprises considérées, 12 sont défensives – $\beta_j < 1$ – et plus particulièrement St-Louis avec un β de 0.545. Parmi les 17 titres offensifs restant, Michelin et Dumez sont les plus agressifs avec respectivement des β_j de 1.390 et 1.361.

Sous l'hypothèse nulle, c'est-à-dire d'adéquation entre le modèle de marché et le MEDAF, la rentabilité attendue du portefeuille orthogonal a été estimée à $\hat{\gamma} = .69E-2$ avec, sous l'hypothèse de normalité, un écart-type estimé à $\hat{\sigma}_\gamma = .187E-2$, un t de Student de 3,664 et une probabilité critique de $.25E-3$ qui traduit la significativité de ce paramètre.

Sous l'hypothèse d'ellipticité, les résultats sont statistiquement moins favorables, mais ne modifient pas les conclusions précédentes. En effet, on obtient un écart-type estimé $\hat{\sigma}_\gamma = .33E-2$, un t de Student de 2.10 et une probabilité critique de $.38E-1$.

En fait, la version linéarisée de la contrainte $\alpha = \gamma(1 - \beta)$ ne s'est pas révélée sensiblement contraignante puisque les valeurs des β ont varié très modérément ; en particulier, aucun titre offensif n'est *devenu* défensif et réciproquement.

Sous l'hypothèse nulle, tous les paramètres sont significatifs au seuil de 1 % et même en deçà. Cela n'est pas étonnant dans la mesure où la valeur de l'estimation $\hat{\gamma}$ étant la même dans toutes les équations, c'est le pouvoir explicatif de la rentabilité de marché qui se répercute sur la constante du modèle.

La substitution de l'hypothèse d'ellipticité à celle de normalité a entraîné un affaiblissement des probabilités critiques mais n'a pas nui à la significativité du modèle sous l'hypothèse nulle.

Tous ces résultats sont statistiquement cohérents en raison des propriétés statistiques des méthodes d'estimation adoptées et décrites plus haut, mais aussi parce que le choix de la régression *SUR* rend plausibles les hypothèses qui leur sont sous-jacentes ; en particulier, dans aucune des équations il n'y a autocorrélation des résidus au seuil $\alpha = 5\%$.

Enfin, la statistique $-2 \ln \lambda$ du test du rapport de vraisemblance a été évaluée à 847.96 et la probabilité pour que le χ^2 correspondant à 28 degrés de liberté soit dépassé est quasiment nulle, ce qui suggère le rejet de l'hypothèse nulle, c'est-à-dire l'efficacité de l'indice et des anticipations.

5. Conclusion

Les résultats de cette étude s'articulent autour de deux axes principaux :

- Le premier est théorique et relatif à la méthode adoptée.
- Le second, pratique, a trait aux résultats empiriques obtenus.

La non normalité empiriquement démontrée des rentabilités des actifs financiers fait peser une lourde suspicion sur la validité des méthodes économétriques généralement employées pour tester la validité du MEDAF. A l'opposé, l'hypothèse de normalité permet une interprétation des tests qui garantit une forte cohérence entre

TESTS DU MEDAF À DEUX FACTEURS

la théorie économique et la méthode statistique mise en œuvre pour la confirmer ou l'infirmier.

L'hypothèse elliptique adoptée ici présente deux avantages significatifs :

- Elle conserve l'essentiel des acquis de l'hypothèse normale tant sur le plan économétrique, puisque les outils principaux d'analyse restent utilisables pour peu que de légères adaptations leurs soient apportées que sur le plan de l'analyse de portefeuille, puisqu'elle permet des développements identiques à ceux de l'hypothèse normale.
- A l'inverse de cette dernière, elle présente toute une famille de distributions de probabilité qui semblent présenter une meilleure adéquation à la réalité des rentabilités financières

L'étude empirique qui a été développée dans ce papier semble indiquer que le marché Français est inefficace. Ce résultat est conforme avec ceux qui ont été obtenus aux États-Unis au cours de la dernière décennie. Il doit être nuancé pour au moins deux raisons :

- La plupart des tests anglo-saxons sont corroborés sur des sous-périodes de cinq ans en données mensuelles alors que nous n'avons pu disposer que d'un échantillon de taille réduite.
- Des études récentes ont montré sous l'hypothèse de normalité que les tests H_0 contre H_1 ont une puissance très faible – voir MacKinlay (1987). L'étude de la puissance de ces tests sous l'hypothèse d'ellipticité reste à venir. Cependant, on dispose de nombreux résultats statistiques qui montrent qu'en général, les propriétés des tests restent invariantes sur la classe des densités elliptiques – voir entre autres Kariya & Sinha (1989).

RÉFÉRENCES

- ARROW J.K. (1964) "The Role of Securities in the Optimal Allocation of Risk Bearing", *R. Economic Studies*, 91-96.
- BLACK F. (1972) "Capital Market Equilibrium with Restricted Borrowing", *J. of Business*, 444-455.
- BLATTBERG R.C. & GONEDES N. (1974) "A Comparison of the Stable and Student Distributions as Statistical Models for Stock Prices", *J. of Business*, 244-280.
- CHENG P.L. & GRAUER R.R. (1980) "An Alternative Test of the Capital Asset Pricing Model", *American Economic Review*, 4, 660-671.
- CHMIELEWSKI M.A. (1981) "Elliptical Symmetric Distributions : a Review And Bibliography", *International Statistical Review*, 67-74.
- CLARK P.K. (1973) "A Subordinated Stochastic Process Model with Finite Variance for Speculative Price", *Econometrica*, 135-155.
- COPELAND T. & WESTON J.F. (1988) *Financial Theory and Corporate Policy*, Addison-Wesley.
- DEBREU E. (1959) *The Theory of Value*, Yale University Press.

TESTS DU MEDAF À DEUX FACTEURS

- ELTON E.J. & GRUBER M.J. (1984) "Non-standard Capm's and the Market Portfolio", *J. of Finance*, 3, 911-924.
- FAMA E. (1965) "The Behaviour of Stock Market Prices", *J. of Business*, 34-105.
- FAMA E. (1976) *Foundation of Finance*, Basil Blackwell.
- FANG K.T., KOTZ S. & NG K.W. (1990) *Symmetric Multivariate Distributions*, Chapman & Hall.
- FOMBY T.B., HILL R.C. & JOHNSON S.R. (1984) *Advanced Econometric Methods*, Springer-Verlag.
- FULLER W.A. (1976) *Introduction to Statistical Time Series*, Wiley.
- GALLANT A.R. (1975) "Seemingly Unrelated Nonlinear Regressions", *J. of Econometrics*, 35-50.
- GIBBONS M.R. (1980) *Econometric Methods for Testing a Class of Financial Models : an Application of the Nonlinear Multivariate Regression Model*, Ph.d. dissertation, University of Chicago.
- GIBBONS M.R. (1982) "Multivariate Tests of Financial Models", *J. of Financial Economics*, 3-27.
- HAGERMAN R.L. (1978) "More Evidence on the Distribution of Security Returns", *J. of Finance*, 1213-1221.
- HAUGEN R. (1987) *Introductory Investment Theory*, Prentice-Hall.
- HUANG C.F. & LITZENBERGER R.H. (1988) *Foundations for Financial Economics*, North-Holland.
- INGERSOLL Jr, J.E. (1988) *Theory of Financial Decision Making*, North-Holland.
- JENSEN M. (1979) "Test of Capital Market Theory and Implications of the Evidence", in J.L. BICKSLER, ed., *Handbook of Financial Economics*, North-Holland.
- JUDGE G.G., HILL R.C., GRIFFITHS W.E. LUTKEPOHL H. & LEE T.S.C. (1988) *Introduction to the Theory and Practice of Econometrics*, Willey.
- KANDEL S. (1984) "On the Exclusion of Assets from Tests of the Mean Variance Efficiency of the Market Portfolio", *J. of Finance*, 1, 63-75.
- KARIYA T. (1977) "A Robustness Property of the Tests for Serial Correlation", *Annals of Statistics*, 6, 1212-1220.
- KARIYA T. & SINHA B.K. (1989) *Robustness of Statistical Tests*, Academic Press.
- KELKER D. (1970) "Distribution Theory of Spherical Distributions and a Location-scale Parameter Generalization", *Sankhiā*, 419-430.
- KON S.J. (1984) "Models of Stock Returns : a Comparison", *J. of Finance*, 147-165.
- LINTNER J. (1965) "The Valuation of Risk Assets and the Selection of Risky Investments in Stock Portfolio and Capital Budgets", *R. of Economics and Statistics*, 13-37.
- MACKINLAY A. (1987) "On Multivariate Tests of the Capm", *J. of Financial Economics*, 341-347.
- MANDEL BRODT B. (1963) "The Variation of Certain Speculative Prices", *J. of Business*, 394-419.
- MAYERS D. (1972) "Non-Marketable Assets and the Capital Market Equilibrium under Uncertainty", in M. JENSEN, ed., *Studies in the Theory of Capital Markets*, Praeger.
- MERTON R.C. (1973) "An Intertemporal Capital Asset Pricing Model", *Econometrica*, 867-880.
- MOSSIN J. (1966) "Equilibrium in a Capital Asset Model", *Econometrica*, 4, 768-783.

TESTS DU MEDAF À DEUX FACTEURS

- OWEN J. & RABINOVITCH R. (1982) "On the Class of Elliptical Distributions and their Applications to the Theory of Portfolio Choice", *J. of Finance*, 3, 745-752.
- PERRY P.R. (1983) "More Evidence on the Nature of the Distribution of Security Returns", *J. of Financial and Quantitative Analysis*, 211-221.
- PIATECKI C. (1993) *Théorie des jeux contre la nature*, Economica (à paraître).
- PRAAG B.M.S.V. (1981) "Model Free Regression", *Economic Letter*, 139-184.
- PRAAG B.M.S.V. & WESSELMAN B.M. (1989) "Elliptical Multivariate Analysis", *J. of Econometrics*, 189-203.
- PRAAG B.M.S.V., DE LEEUW J. & KLOEK T. (1988) "Large Sample Properties of Method of Moment Estimators under Different Data Generating Processes", *J. of Econometrics*, 25-36.
- PRAETZ P.D. (1972) "The Distribution of Share Price Changes", *J. of Business*, 49-55.
- ROLL R. (1977) "A Critique of the Asset Pricing Theory's Tests", *J. of Financial Economics*, 129-176.
- ROLL R. (1980) "Orthogonal Portfolio", *J. of Financial and Quantitative Analysis*, 5, 1005-1023.
- ROSS S. (1976) "The Arbitrage Theory of Capital Asset Pricing", *J. of Economic Theory*, 341-360.
- SHARPE W.F. (1964) "Capital Asset Prices : A Theory of Market Equilibrium under Conditions of Risk", *J. of Finance*, 425-442.
- STAMBAUGH R.F. (1982) "On the Exclusion of Assets from Tests of the Two-parameter Model", *J. of Financial Economics*, 237-268.
- TASSI P. (1989) *Méthodes statistiques*, Economica.
- THEIL H. (1971) *Principles of Econometrics*, Wiley.
- TOBIN J. (1958) "Liquidity Preference as Behavior Toward Risk", *R. of Economics and Statistics*, 1, 65-86.
- WESSELMAN B.M. & PRAAG B.M.S.V. (1987) "Elliptical Regression Operationalised", *Economic Letters*, 269-274.
- ZELLNER A. (1962) "An Efficient Method of Estimating Seemingly Unrelated Regressions and Tests for Agression Bias", *J. of American Statistical Association*, 348-368.